O Teorema da Representação de Stone

Hilário Fernandes de Araujo Júnior
Universidade Federal de São Paulo
fernandes.araujo@unifesp.br

RESUMO

Uma álgebra de Boole é um conjunto munido de três operações (sendo, destas, duas binárias e uma unária) e duas constantes que, algebricamente, captura noções do cálculo proposicional (como as leis da não contradição e terceiro excluído). Um espaço Booleano é um espaço topológico compacto, totalmente desconexo e de Hausdorff. Neste trabalho, apresentamos uma demonstração do Teorema da Representação de Stone para álgebras de Boole, que afirma que a categoria de tais álgebras é dualmente equivalente à categoria de espaços Booleanos. Tal resultado faz parte da dualidade de Stone, uma coleção de dualidades entre categorias de espaços topológicos e de conjuntos parcialmente ordenados.

ABSTRACT

A Boolean algebra is a set equipped with three operations (from which two are binary and one is unary) and two constants that captures notions from propositional calculus (such as the non-contradiction law and the law of excluded middle). A Boolean Space is a compact, Hausdorff and totally disconnected topological space. In this paper, we present a proof for Stone's Representation Theorem on Boolean algebras, which asserts that the category of Boolean algebras is dually equivalent to the category of Boolean spaces. This result is a part of Stone Duality, a framework of dualities between categories of topological spaces and partially ordered sets.

Palavras-chave: Álgebras de Boole, Espaços Topológicos, Teoria das Categorias.

1 Introdução

Em 1936, Marshall Stone (ver [1]) demonstrou uma relação entre a classe de álgebras de Boole (ver [2]) e uma classe especial de espaços topológicos, atualmente denominados espaços Booleanos. Algumas décadas depois, o surgimento da Teoria de Categorias possibilitou, entre outros resultados, um entendimento mais preciso desta relação entre estruturas aparentemente não relacionadas. Neste trabalho, demonstraremos a versão categórica do Teorema da Representação de Stone para álgebras de Boole.

Na Seção 2 apresentaremos conceitos e resultados relevantes em álgebras de Boole. Na Seção 3 estudamos espaços Booleanos. Na Seção 4 apresentamos noções básicas em Teoria de Categorias e na Seção 5 apresentamos o resultado principal deste trabalho. Assumimos que o leitor possui familiaridade com os conceitos fundamentais de topologia geral.

2 Noções e Resultados Preliminares em Álgebras de Boole

Iniciaremos este trabalho definindo noções básicas em álgebras de Boole. Para tal, nos basearemos em [3].

Definição 2.1: *Uma álgebra de Boole é uma estrutura* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ *onde* $+$ *e* $\cdot$ *são operações binárias e* $-$ *é uma operação unária que satisfazem para todos* $x, y, z \in \mathcal{A}$

1. $x + (y + z) = (x + y) + z$;
2. $x + y = y + x$;
3. $x + (x \cdot y) = x$;
4. $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$;
5. $x + (-x) = 1$;
6. $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$;
7. $x \cdot y = y \cdot x$;
8. $x \cdot (x + y) = x$;
9. $x + (y \cdot z) = (x + y) \cdot (x + z)$;
10. $x \cdot (-x) = 0$.

Proposição 2.1: *Seja* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ *uma álgebra de Boole. Então, para todo* $x \in \mathcal{A}$, *as seguintes propriedades são válidas:*

- $x \cdot 1 = x$;
- $x + 0 = x$;
- $1 + x = 1$;
- $0 \cdot x = 0$.

Demonstração

Pelo axioma 8 da Definição 2.1, para todo $y \in \mathcal{A}$ é verdade que $x \cdot (x + y) = x$. Em particular, se $y = -x$, temos $x \cdot (x+y) = x \implies x \cdot (x + (-x)) = x \implies x \cdot 1 = x$ (pelo axioma 5 da Definição 2.1). Analogamente, pelos axiomas 3 e 10 da Definição 2.1, $x + 0 = x$.
Pela primeiro item desta proposição e pelos axiomas 3 e 7 da Definição 2.1, temos $1 + x = 1 + (1 \cdot x) = 1$. Analogamente, pelo segundo item desta proposição e pelos axiomas 2 e 8 da Definição 2.1, temos $0 \cdot x = 0 \cdot (0 + x) = 0$. ■

Proposição 2.2: *Seja* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ *uma álgebra de Boole. Então, para todo* $x \in \mathcal{A}$, $x + x = x$ *e* $x \cdot x = x$.

Demonstração

Para todo $y \in \mathcal{A}$ o axioma 3 da Definição 2.1 implica que $x + (x \cdot y) = x$. Em particular, se $y = 1$ temos que, pela Proposição 2.1, $x + (x \cdot y) = x \implies x + (x \cdot 1) = x \implies x + x = x$. Analogamente, fazendo $y = 0$, o axioma 8 da Definição 2.1 implica que $x \cdot x = x$. ■

Proposição 2.3: *Seja* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ *uma álgebra de Boole e* $x, y \in \mathcal{A}$. *Então, se* $x + y = 1$ *e* $x \cdot y = 0$, $y = -x$.

Demonstração

$$\begin{aligned} y &= y \cdot 1 \\ &= y \cdot (-x + x) \\ &= (y \cdot (-x)) + (y \cdot x) \\ &= (y \cdot (-x)) + 0 \\ &= (y \cdot (-x)) + (x \cdot (-x)) \\ &= (-x) \cdot (y + x) \\ &= (-x) \cdot 1 \\ &= -x. \end{aligned} \tag{1}$$

■

Corolário 2.1: *Para todo* $x \in \mathcal{A}$, $-(-x) = x$.

Proposição 2.4: *Seja* $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ *uma álgebra de Boole e* $x, y \in \mathcal{A}$. *Então,* $x + y = -((-x) \cdot (-y))$.

Demonstração

Pela Proposição 2.3, basta demonstrarmos que $(x+y)\cdot((-x)\cdot(-y)) = 0$ e $x+y+((-x)\cdot(-y)) = 1$. De fato, pelos axiomas 2 e 4 da Definição 2.1,

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot ((-x) \cdot (-y)) &= (x \cdot (-x) \cdot (-y)) + (y \cdot (-x) \cdot (-y)) \\ &= (0 \cdot (-y)) + (0 \cdot (-x)) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0, \end{aligned} \tag{2}$$

enquanto, pelo axioma 9 da Definição 2.1,

$$\begin{aligned} x + y + ((-x) \cdot (-y)) &= ((x + y) + (-x)) \cdot ((x + y) + (-y)) \\ &= (y + 1) \cdot (x + 1) \\ &= 1 \cdot 1 \\ &= 1. \end{aligned} \tag{3}$$

■

Exemplo 2.1: *Seja* X *um conjunto. Tome então a coleção* $\mathrm{FinCofin}(X) = \{A \subset X \mid |A| < \aleph_0$ *ou* $|X \setminus A| < \aleph_0\}$. *Logo, a estrutura* $(\mathrm{FinCofin}(X), \cup, \cap, \complement, \emptyset, X)$ *é uma álgebra de Boole.*

Exemplo 2.2: *Seja* X *um conjunto e* $\mathcal{P}(X)$ *o conjunto das partes de* X. *Logo, a estrutura* $(\mathcal{P}(X), \cup, \cap, \complement, \emptyset, X)$ *é uma álgebra de Boole, denominada álgebra das partes de* X.

Exemplo 2.3: *Se* X *é um conjunto unitário, a álgebra das partes de* X *se reduz a* $\{0, 1\}$, *onde* $0 = \emptyset$ *e* $1 = X$. *Esta é denominada álgebra de 2 elementos cujas operações obedecem à seguinte tabela:*

x	y	$x + y$	$x \cdot y$	$-x$
0	0	0	0	1
0	1	1	0	1
1	0	1	0	0
1	1	1	1	0

Tal álgebra será particularmente relevante quando definirmos o conceito de ultrafiltros em álgebras de Boole.

Exemplo 2.4: *Sejam X um espaço topológico e $\mathrm{Clop}(X)$ a coleção de todos os clopens*[1] *de X. Logo, a estrutura $(\mathrm{Clop}(X), \cup, \cap, \complement, \emptyset, X)$ é uma álgebra de Boole, denominada álgebra dos clopens de X.*

Observação 2.1: *Por simplicidade, ao invés de dizermos que $(\mathcal{A}, +, \cdot, -, 0, 1)$ é uma álgebra de Boole, diremos que $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Boole.*

Definição 2.2 (Homomorfismo): *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras de Boole. Dizemos que uma função $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um homomorfismo se satisfaz:*

- $\phi(0_{\mathcal{A}}) = 0_{\mathcal{B}}$;
- $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1_{\mathcal{B}}$;
- $\phi(x +_{\mathcal{A}} y) = \phi(x) +_{\mathcal{B}} \phi(y)$;
- $\phi(x \cdot_{\mathcal{A}} y) = \phi(x) \cdot_{\mathcal{B}} \phi(y)$;
- $\phi(-x) = -\phi(x)$.

Se ϕ é um homomorfismo bijetor, dizemos que ϕ é um isomorfismo, e escrevemos $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Boole. Defina uma ordem natural $\leq$ sobre $\mathcal{A}$ da seguinte forma: $x \leq y \iff x + y = y$.

Proposição 2.5: *A relação $\leq$ define uma ordem parcial sobre $\mathcal{A}$.*

Demonstração

Sejam $x, y, z \in \mathcal{A}$.

- como $x + x = x$ (pela Proposição 2.2), então $x \leq x$;
- se $x \leq y$ e $y \leq x$, temos que $x + y = y$ e $y + x = x + y = x$, logo $x = y$;
- se $x \leq y$ e $y \leq z$, então $x + y = y$ e $y + z = z$. Logo $x + z = x + (y + z) = (x + y) + z = y + z = z$, logo $x \leq z$.

■

Daqui em diante, considere toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$ parcialmente ordernada por $\leq$ como definido acima.

Lema 2.1: *Sejam $x, y \in \mathcal{A}$. Então, $x \leq y \iff x \cdot y = x$.*

Demonstração

Suponha $x \leq y$. Por definição, $y = x + y$. Logo $x \cdot y = x \cdot (x + y)$. Pelo Axioma 8 da Definição 2.1 e pela Proposição 2.2, temos $x \cdot y = x \cdot (x + y) = x \cdot x = x$.
Por outro lado, suponha $x \cdot y = x$. Temos então $y + x = y + (x \cdot y)$. Pelos Axiomas 2, 3 e 7 da Definição 2.1 e pela Proposição 2.2, temos $x + y = y + (x \cdot y) = y + y = y$. Por definição, concluímos que $x \leq y$. ■

Lema 2.2: *Sejam $x, y \in \mathcal{A}$. Então, $x \leq x + y$.*

Demonstração

Pela Proposição 2.2, $x + (x + y) = (x + x) + y = x + y$. Pela definição de $\leq$, $x \leq x + y$. ■

[1] Em topologia, um *clopen* é um conjunto simultaneamente aberto (*open*) e fechado (*closed*).

Proposição 2.6: *Sejam $x, y, a, b \in \mathcal{A}$ tais que $x \leq y, a \leq b$. Então, $x \cdot a \leq y \cdot b$.*

Demonstração

Por hipótese, $x+y = y$ e $a+b = b$. Logo $(x+y)\cdot(a+b) = y\cdot b \implies (x\cdot a)+(y\cdot a)+(x\cdot b)+(y\cdot b) = y\cdot b$. Note que, pelo Lema 2.2, $(x \cdot a) + (y \cdot b) \leq (x \cdot a) + (y \cdot a) + (x \cdot b) + (y \cdot b) = y \cdot b$. Logo $x \cdot a \leq y \cdot b$. ■

Observação 2.2: *Sejam $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ álgebras de Boole e $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ homomorfismo. Dados $x, y \in \mathcal{A}$, note que $x \leq y \implies \phi(x) \leq \phi(y)$.*

2.1 FILTROS

Definição 2.3: *Um filtro em uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ é um subconjunto F de $\mathcal{A}$ satisfazendo:*

1. *$1 \in F$;*
2. *Se $x, y \in F$, então $x \cdot y \in F$;*
3. *Se $x \in F$ e $x \leq y$, então $y \in F$.*

Além disto, F é dito um ultrafiltro de $\mathcal{A}$ se a seguinte condição for adicionalmente satisfeita:

4. *Para todo $x \in \mathcal{A}$, $x \in F$ ou $-x \in F$.*

Exemplo 2.5: *Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ e $x \in \mathcal{A}$, o conjunto $\bar{x} = \{y \in \mathcal{A} \mid x \leq y\}$ é denominado ultrafiltro principal[2] gerado por x.*

Proposição 2.7: *Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ e um subconjunto $F \subset \mathcal{A}$, F é um filtro sobre $\mathcal{A}$ se, e somente se, $1 \in F$ e para todos $x, y \in \mathcal{A}, x \cdot y \in F \iff x \in F$ e $y \in F$.*

Demonstração

Se F é um filtro e $x \cdot y \in F$, então $x \in F, y \in F$ pois $x \cdot y \leq x$ e $x \cdot y \leq y$. Por outro lado, se F satisfaz a condição apresentada e $x \in F, y \in \mathcal{A}$ e $x \leq y$, então, pelo Lema 2.1, $x \cdot y = x \in F$ implica $y \in F$, logo F é filtro. ■

Definição 2.4: *Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ e um filtro F sobre $\mathcal{A}$, dizemos que F é um filtro primo se é filtro próprio (isto é, $0 \notin F$) e, para $x, y \in \mathcal{A}, x + y \in F$ implica $x \in F$ ou $y \in F$. Dizemos que F é um filtro maximal se é filtro próprio e não existe um filtro próprio diferente de F que o inclui.*

Proposição 2.8: *Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ e um filtro F sobre $\mathcal{A}$, F é ultrafiltro se, e somente se, F é primo.*

Demonstração

($\implies$): Suponha $x \notin F, y \notin F$. Como F é ultrafiltro, temos $-x \in F, -y \in F$. Portanto $(-x) \cdot (-y) \in F$. Então, pelo Corolário 2.1 e Proposição 2.4, $-(x + y) = (-x) \cdot (-y) \in F$, logo $-(x + y) \in F \implies x + y \notin F$. Logo F é primo.
($\impliedby$): Suponha F primo. Então, dado $x \in \mathcal{A}$, $x + (-x) = 1 \in F$. Portanto $x \in F$ ou $-x \in F$. ■

[2] Para demonstrar-se a existência de ultrafiltros não principais, é necessário o axioma da escolha.

No próximo exemplo, demonstraremos que todo homomorfismo de uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$ para a álgebra de 2 elementos induz um ultrafiltro sobre $\mathcal{A}$, e todo ultrafiltro sobre $\mathcal{A}$ induz um homomorfismo de $\mathcal{A}$ para a álgebra de 2 elementos.

Exemplo 2.6: *Dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$, seja $\phi : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ homomorfismo e fixe $F = \phi^{-1}[\{1\}]$. Note que:*

- *$1_{\mathcal{A}} \in F$ pois $\phi(1_{\mathcal{A}}) = 1$;*
- *se $x, y \in F$, então $\phi(x) = \phi(y) = 1$. Portanto, $\phi(x \cdot y) = \phi(x) \cdot \phi(y) = 1 \cdot 1 = 1$ e deduzimos que $x \cdot y \in F$;*
- *se $x \in F$ e $y \in \mathcal{A}$ tal que $x \leq y$, então $1 = \phi(x) \leq \phi(y)$ e deduzimos que $\phi(y) = 1$, isto é, $y \in F$;*
- *dado $x \in \mathcal{A}$, suponha que $x \notin F$. Então $\phi(x) \neq 1$, mas como $\phi(x) \in \{0,1\}$, temos $\phi(x) = 0$. Portanto $\phi(-x) = -\phi(x) + 0 = -\phi(x) + \phi(x) = 1$. Deduzimos que $-x \in F$.*

Deste modo, todo homomorfismo $\phi : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ induz um ultrafiltro sobre $\mathcal{A}$, o ultrafiltro $F = \phi^{-1}[\{1\}]$.

Por outro lado, seja F um ultrafiltro sobre $\mathcal{A}$. Defina $\phi_F : \mathcal{A} \to \{0,1\}$ por

$$\phi_F(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F. \end{cases} \tag{4}$$

Demonstraremos que ϕ_F é um homomorfismo. De fato,

- *$\phi_F(0_{\mathcal{A}}) = 0$ (pois $0 \notin F$);*
- *$\phi_F(1_{\mathcal{A}}) = 1$ (pois $1 \in F$);*
- *pela Proposição 8, $\phi_F(x +_{\mathcal{A}} y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x +_{\mathcal{A}} y \in F \\ 0 & \text{se } x +_{\mathcal{A}} y \notin F \end{cases} \implies$*

  $\phi_F(x +_{\mathcal{A}} y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \text{ ou } y \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F \text{ e } y \notin F \end{cases}$, enquanto

  $\phi_F(x) + \phi_F(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_F(x) = 1 \text{ ou } \phi_F(y) = 1 \\ 0 & \text{se } \phi_F(x) = 0 \text{ e } \phi_F(y) = 0 \end{cases} \implies$

  $\phi_F(x) + \phi_F(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \text{ ou } y \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F \text{ e } y \notin F \end{cases}$. Portanto $\phi_F(x +_{\mathcal{A}} y) = \phi_F(x) + \phi_F(y)$;

- *pela Proposição 2.7, $\phi_F(x \cdot_{\mathcal{A}} y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \cdot_{\mathcal{A}} y \in F \\ 0 & \text{se } x \cdot_{\mathcal{A}} y \notin F \end{cases} \implies$*

  $\phi_F(x \cdot_{\mathcal{A}} y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \text{ e } y \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F \text{ ou } y \notin F \end{cases}$, enquanto

  $\phi_F(x) \cdot \phi_F(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } \phi_F(x) = 1 \text{ e } \phi_F(y) = 1 \\ 0 & \text{se } \phi_F(x) = 0 \text{ ou } \phi_F(y) = 0 \end{cases} \implies$

  $\phi_F(x) \cdot \phi_F(y) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in F \text{ e } y \in F \\ 0 & \text{se } x \notin F \text{ ou } y \notin F \end{cases}$. Portanto $\phi_F(x \cdot_{\mathcal{A}} y) = \phi_F(x) \cdot \phi_F(y)$;

- *$\phi_F(-x) = \begin{cases} 1 & \text{se } -x \in F \\ 0 & \text{se } -x \notin F \end{cases} \implies \phi_F(-x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \notin F \\ 0 & \text{se } x \in F \end{cases}$. Também temos que $-\phi_F(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x \in F \\ 1 & \text{se } x \notin F \end{cases}$. Portanto $\phi_F(-x) = -\phi_F(x)$.*

2.2 EXTENSÃO A UM ULTRAFILTRO

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Boole.

Definição 2.5: *Um conjunto $J \subset \mathcal{A}$ tem a propriedade da intersecção finita (P.I.F.) se para toda subcoleção finita $\{x_1, \ldots, x_n\} \subset J$, vale $x_1 \cdot \ldots \cdot x_n \neq 0$.*

Definição 2.6: *Seja $E \subset \mathcal{A}$. Então o filtro gerado por E em $\mathcal{A}$ é o conjunto $G = \{x \in \mathcal{A} \mid e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq x; n \in \omega$ e $e_1, \ldots, e_n \in E\}$, onde ω é o conjunto de todos os ordinais finitos.*

Demonstraremos que G é, de fato, um filtro sobre $\mathcal{A}$

- $1 \in G$ pois para todo $e \in E$, vale $e \leq 1$;
- dados $x, y \in G$ e $e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m \in E$ tais que $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq x$ e $e_{n+1} \cdot \ldots \cdot e_m \leq y$, temos (pela Proposição 2.6) $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \cdot e_{n+1} \cdot \ldots \cdot e_m \leq x \cdot y$. Logo $x \cdot y \in G$;
- dados $x \in G, y \in \mathcal{A}$ e $e_1, \ldots, e_n \in E$ tais que $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq x$ e $x \leq y$, certamente $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq y$ (pois $\leq$ é ordem parcial). Logo $y \in G$.

Lema 2.3: *O filtro gerado por E é o menor filtro (em relação a inclusão) sobre $\mathcal{A}$ incluindo E. Tal filtro é próprio se, e somente se, E possui a P.I.F.*

Demonstração

Seja G o filtro gerado por E. Tome um filtro $G' \subsetneq G$. Então existe $x \in G \setminus G'$ tal que, para algum $n \in \omega$ e $e_1, \ldots, e_n \in E$, vale $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \leq x$. Se $x = e_1 \cdot \ldots \cdot e_n$, então (pela Proposição 2.7) $E \not\subset G'$ (pois existirá algum $e_i \in E \setminus G'$). Se $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \neq x$, então (como $x \notin G'$) $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \notin G'$. Analogamente ao caso anterior, pela Proposição 2.7, concluímos que $E \not\subset G'$.
($\Longrightarrow$): Suponha que E não possui a P.I.F. Então existe conjunto finito $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$ tal que $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n = 0$. Pela Proposição 2.7, 0 pertence ao filtro gerado por E. Portanto tal filtro não é próprio (pois é igual a $\mathcal{A}$).
($\Longleftarrow$): Se E possui a P.I.F., então para todo conjunto finito $\{e_1, \ldots, e_n\} \subset E$ vale $e_1 \cdot \ldots \cdot e_n \neq 0$. Logo, para todo $g \in G$, vale $0 < g$. Deste modo, $G \subsetneq \mathcal{A}$, isto é, G é um filtro próprio de $\mathcal{A}$. ■

Lema 2.4: *Seja F um filtro sobre $\mathcal{A}$. Se F é maximal, F é ultrafiltro.*

Demonstração

Se F não é um ultrafiltro, tome x tal que $x \notin F$ e $-x \notin F$ (se $x \in F$ e $-x \in F$, então $x + (-x) = 0 \in F$, o que implica que F não é próprio). Se $F \cup \{x\}$ não possui a P.I.F., então, pelo Lema 2.3, F não é próprio. Suponha então que $F \cup \{x\}$ possui a P.I.F. (sendo então, pelo Lema 2.3, próprio). Mas F está propriamente contido no filtro gerado por $F \cup \{x\}$ (uma vez que tal filtro contém x), o que implica a não maximalidade de F. ■

Proposição 2.9: *Um subconjunto de uma álgebra de Boole está incluso em um ultrafiltro se, e somente se, possui a P.I.F.*

Demonstração

($\Longrightarrow$): Se $E \subset \mathcal{A}$ está incluso em um ultrafiltro F de A, então, como F é próprio, F (consequentemente E) possui a P.I.F (pelo Lema 2.3).
($\Longleftarrow$): Suponha que $E \subset \mathcal{A}$ possui a P.I.F. Logo, pelo Lema 2.3, o filtro G gerado por E é próprio. O conjunto P de todos filtros próprios incluindo G é não vazio e parcialmente ordenado pela inclusão, e toda cadeia não vazia C em P possui $\bigcup C$ como quota superior de P. Pelo Lema de Zorn, existe elemento maximal M de P. Logo M é um filtro maximal e inclui E. Pelo Lema 2.4, M é ultrafiltro. ■

Lema 2.5: *Sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ álgebras de Boole e $h\colon \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ homomorfismo. Se U é um ultrafiltro de $\mathcal{A}_2$, então $h^{-1}[U]$ é um ultrafiltro de $\mathcal{A}_1$.*

Demonstração

Fixe $F = h^{-1}[U]$. Sejam $x, y \in \mathcal{A}_1$.

- $1_{\mathcal{A}_1} \in F$ pois $h(1_{\mathcal{A}_1}) = 1_{\mathcal{A}_2} \in U$;
- se $x, y \in F$, então temos $h(x), h(y) \in U$, que é ultrafiltro, logo $h(x) \cdot h(y) \in U$. Mas como h é homomorfismo, $h(x \cdot y) = h(x) \cdot h(y)$. Portanto $h(x \cdot y) \in U$, o que implica $x \cdot y \in F$;
- suponha $x \in F$ e $x \leq y$. Pela Observação 2.2, $h(x) \leq h(y)$. Como U é ultrafiltro e $h(x) \in U$, temos $h(y) \in U$. Concluímos que $y \in F$;
- se $x \notin F$, então $h(x) \notin U$. Como U é ultrafiltro, $-h(x) \in U$, e como h é homomorfismo, $-h(x)h(-x)$. Concluímos que $h(-x) \in U$, o que implica $-x \in F$.

■

3 NOÇÕES E RESULTADOS PRELIMINARES EM ESPAÇOS BOOLEANOS

Nesta seção estudaremos uma classe especial de espaços topológicos denominados espaços Booleanos. No final desta seção demonstraremos que toda álgebra de Boole é isomorfa a álgebra de *clopens* de um espaço Booleano, e todo espaço Booleano é homeomorfo ao espaço de Stone de uma álgebra de Boole.

Dado um espaço topológico X, $\mathrm{Clop}(X)$ denota a álgebra de Boole dos *clopens* de X.

Observação 3.1: *Se X é conexo, então $\mathrm{Clop}(X) = \{\emptyset, X\}$.*

Definição 3.1: *Seja X um espaço topológico. Dizemos que X é Booleano se é de Hausdorff, compacto e zero-dimensional.*

Exemplo 3.1: *O triádico de Cantor munido da topologia herdada de $\mathbb{R}$.*

Definição 3.2: *Um espaço topológico X é dito totalmente desconexo (hereditariamente desconexo) se nenhum subespaço de X com pelo menos dois pontos é conexo.*

Teorema 3.1: *Um espaço compacto de Hausdorff é Booleano se, e somente se, é totalmente desconexo.*

Demonstração

($\Longrightarrow$): Seja X um espaço compacto e de Hausdorff. Se X é zero-dimensional e Y é um subespaço de X com dois pontos distintos y, y', então há um *clopen* A tal que $y \in A$ e $y' \notin A$. Então $Y \cap A$ é um subconjunto próprio, não vazio, *clopen* de Y, logo Y não é conexo. Portanto X é totalmente desconexo.
($\Longleftarrow$): Seja $x \in X$ e U uma vizinhança aberta de x. Encontraremos um *clopen* f de X tal que $x \in f \subset U$, assim demonstrando que $\mathrm{Clop}(X)$ é uma base. Defina

$$F = \{f \in \mathrm{Clop}(X) \mid x \in f\}, q = \bigcap F. \tag{5}$$

É suficiente demonstrar que $q \subset U$.
Como X é compacto, U é aberto e cada $f \in F$ é fechado, $\bigcap F' \subset U$ para algum subconjunto finito F' de F, portanto denominaremos $f = \bigcap F'$. Demonstraremos que $q = \{x\}$. Caso contrário, q possuirá ao menos dois pontos e não será conexo. Assim $q = q_1 \cup q_2$, onde q_1, q_2 são fechados não vazios disjuntos em q. Como q é fechado em X, cada q_i é fechado em X.

Pela compacidade (consequentemente normalidade) de X, tome abertos disjuntos U_1, U_2 satisfazendo $q_i \subset U_i$. Logo $q \subset U_1 \cup U_2$, e $f \subset U_1 \cup U_2$ para algum $f \in F$. Ambos $U_1 \cap f$ e $U_2 \cap f$ são *clopens* em f, portanto também o são em X. Como $x \in f$, suponha $x \in U_1 \cap f$. Logo $U_1 \cap f \in F$ e $q \in U_1 \cap f$. Isso implica $q_2 \subset q_1 \subset U_1$, o que contradiz $q_2 \subset U_2$, $q_1 \cap q_2 = \emptyset$ e $q_i \neq \emptyset$. ■

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Boole e considere $\mathrm{Ult}(\mathcal{A}) = \{F \subset \mathcal{A} \mid F \text{ é ultrafiltro}\}$. Para cada $x \in \mathcal{A}$, seja $[x] = \{F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) \mid x \in F\}$ e defina $B = \{[x] \mid x \in \mathcal{A}\}$. Note que B é uma álgebra de Boole.

Proposição 3.1: *Para todos $x, y \in \mathcal{A}$ vale*

1. $[x] \cap [y] = [x \cdot y]$;
2. $[x] \cup [y] = [x + y]$;
3. $\complement[x] = [-x]$;
4. $[0] = \emptyset$;
5. $[1] = \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$.

Demonstração

1.
   - $F \in [x] \cap [y] \implies x, y \in F \implies x \cdot y \in F$, pois F é filtro. Logo $F \in [x \cdot y]$ e deduzimos que $[x] \cap [y] \subset [x \cdot y]$;
   - $F \in [x \cdot y] \implies x \cdot y \in F$. Como F é filtro $x \in F$ e $y \in F$. Portanto $F \in [x] \cap [y]$.
2.
   - $F \in [x] \cup [y] \implies x \in F$ ou $y \in F$. Suponha $x \in F$. Então, como F é filtro, o Lema 2.2 implica que $x + y \in F$ e deduzimos que $F \in [x + y]$;
   - $F \in [x+y] \implies x+y \in F$. Se $x \in F$ então $F \in [x] \cup [y]$. Se $x \notin F$, como F é ultrafiltro, $-x \in F$. Então $(-x) \cdot (x + y) = (-x) \cdot x + (-x) \cdot y = 0 + (-x) \cdot y = (-x) \cdot y \in F$. Como $(-x) \cdot y \leq y$ e F é ultrafiltro, $y \in F$ e deduzimos que $F \in [y] \subset [x] \cup [y]$.
3. $\complement[x] = \{F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) \mid x \notin F\} = \{F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) \mid -x \in F\} = [-x]$ (cada $F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ contém cada $x \in \mathcal{A}$ ou $-x$, mas não ambos);
4. $[0] = \{F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) \mid 0 \in F\} = \emptyset$ pois nenhum ultrafiltro contém 0;
5. $[1] = \{F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) \mid 1 \in F\} = \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ pois todo ultrafiltro contém 1.

■

Proposição 3.2: *A função*

$$\begin{aligned} [\,] \colon \mathcal{A} &\to B \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

é uma bijeção.

Demonstração

Injetividade: sejam $x, y \in \mathcal{A}$ e suponha $[x] = [y]$. Existem algumas possibilidades:

- $x \cdot y = x$ ou $x \cdot y = y$: suponha sem perda de generalidade que $x \cdot y = x$ (isto é, $x \leq y$). Por hipótese, o ultrafiltro principal gerado por y está contido em $[x]$, logo $y \leq x$. Como $\leq$ é ordem parcial, $x = y$;

- $x \cdot y = 0$: como x pertence a todo ultrafiltro que contém y e vice-versa, 0 pertence a todo ultrafiltro de $[x]$, contradição;
- $x \cdot y \notin \{0, x, y\}$: pela Proposição 3.1, $[x] \cap [y] = [x \cdot y]$. Porém, como $[x] = [y]$, temos $[x] = [x \cdot y]$. Trivialmente $x \cdot y \leq x$. Como o ultrafiltro principal gerado por x está contido em $[x] \subset [x \cdot y]$, então $x \leq x \cdot y$. Logo $x = x \cdot y$. Analogamente, $y = x \cdot y$. Portanto, $x = y$.

Sobrejetividade: Como $B = \{[x] \mid x \in \mathcal{A}\}$, para todo elemento de B existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $[x]$ é igual a tal elemento. Logo $[]$ é sobrejetora. ■

Proposição 3.3: *O conjunto $B = \{[x] \mid x \in \mathcal{A}\}$ constitui uma base para uma topologia sobre $\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$.*

Demonstração

- $\bigcup_{x \in \mathcal{A}} [x] = \bigcup_{x \in \mathcal{A}} \{F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) \mid x \in F\} = \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$;
- Sejam $[x], [y] \in B$ e $F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$. Se $F \in [x] \cap [y]$, então $x \in F$ e $y \in F$. Como F é filtro, $x \cdot y \in F$. Logo $F \in [x \cdot y] \subset [x] \cap [y]$, pela Proposição 3.1.

■

Deste ponto em diante, dada uma álgebra de Boole $\mathcal{A}$, sempre consideramos $\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ munido da topologia gerada por $B = \{[x] \mid x \in \mathcal{A}\}$. O espaço $\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ é então denominado espaço de Stone associado a álgebra de Boole $\mathcal{A}$.

Teorema 3.2: *O espaço $\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ é Booleano.*

Demonstração

$\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ **é de Hausdorff**: sejam $F, G \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ com $F \neq G$. Como F, G são ultrafiltros $F \not\subset G$ e $G \not\subset F$. Fixe $x \in F \setminus G$ e note que $-x \in G$ (pois G é ultrafiltro). Assim $F \in [x], G \in [-x]$ e (pela Proposição 3.1) $[x] \cup [-x] = [x \cdot (-x)] = [0] = \emptyset$.
$\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ **é zero-dimensional**: pela Proposição 3.1, sabemos que $[-x] = \complement[x]$ para todo $x \in \mathcal{A}$. Logo todo aberto básico em B também é fechado.
$\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ **é compacto**: demonstraremos que todo recobrimento constituído apenas por abertos básicos admite subrecobrimento finito. Para uma contradição, suponha $J \subset \mathcal{A}$ tal que $\mathcal{C} = \{[x] \mid x \in J\}$ seja um recobrimento que não admite subrecobrimento finito. Então, para quaisquer $x_1, ..., x_n \in J$ temos $[x_1] \cup \cdots \cup [x_n] \neq \mathrm{Ult}(\mathcal{A}) = [1]$. Assim, $x_1 + \cdots + x_n \neq 1$ (pelas Proposições 3.1 e 3.2) e portanto

$$(-x_1) \cdot ... \cdot (-x_n) \neq 0. \tag{6}$$

Por (6), o conjunto $-J = \{-x \mid x \in J\}$ tem a propriedade da intersecção finita e portanto está contido em um ultrafiltro $F \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A})$. Como $\mathcal{C}$ recobre $\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$, existe $x \in J$ tal que $F \in [x]$, logo $x \in F$.
Concluímos que existe $x \in \mathcal{A}$ tal que $x \in F$ e $-x \in F$, o que é uma contradição. ■

Observação 3.2: *Note que $B = \{[x] \mid x \in \mathcal{A}\} = \mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}(\mathcal{A}))$. Logo, pelas Proposições 3.1, 3.2, 3.3 e pelo Teorema 3.2, temos $\mathcal{A} \approx \mathrm{Clop}(\mathrm{Ult}(\mathcal{A}))$.*

Teorema 3.3: *Seja X um espaço Booleano. Então, o mapa*

$$\begin{aligned} t\colon X &\to \mathrm{Ult}(\mathrm{Clop}(X)) \\ x &\mapsto \{a \in \mathrm{Clop}(X) \mid x \in a\} \end{aligned}$$

é um homeomorfismo de X a $\mathrm{Ult}(\mathrm{Clop}(X))$.

Demonstração

Como $X, \mathrm{Ult}(\mathrm{Clop}(X))$ são compactos de Hausdorff, basta demonstrarmos que t é contínua e bijetora. Seja $A = \mathrm{Clop}(X)$. A continuidade de t segue do fato que as imagens inversas dos abertos básicos $[a], a \in A$ são abertos: para $a \in A$ e $x \in X$, vale $x \in t^{-1}[[a]] \iff t(x) \in [a] \iff a \in t(x) \iff x \in a$, logo $t^{-1}[[a]] = a$ é *clopen*.
Sejam $x, y \in X$ distintos. Como X é Booleano, tome $a \in \mathrm{Clop}(X)$ tal que $x \in a$ e $y \notin a$. Logo $a \in t(x) \setminus t(y)$, isto é, $t(x) \neq t(y)$. Deduzimos que t é injetora.
Seja p um ultrafiltro de $A = \mathrm{Clop}(X)$. Agora X é compacto e p é uma família de fechados de X com a P.I.F. Tome $x \in X$ tal que $x \in a$ para cada $a \in p$. Logo $p \subset t(x)$, e, como todo ultrafiltro p é maximal, $p = t(x)$. Deduzimos que t é sobrejetora. ■

4 NOÇÕES PRELIMINARES EM TEORIA DE CATEGORIAS

Nesta seção estudaremos noções em Teoria de Categorias que nos permitirão formular o resultado principal. Nos basearemos em [4].

4.1 CATEGORIAS, FUNCTORES E CONTRAVARIÂNCIA

Definição 4.1: *Uma categoria $\mathcal{C}$ consiste em*

- *Uma coleção $\mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ de objetos;*
- *Uma coleção $\mathrm{Ar}(\mathcal{C})$ de morfismos;*
- *Mapas $\mathrm{dom}, \mathrm{cod} : \mathrm{Ar}(\mathcal{C}) \to \mathrm{Ob}(\mathcal{C})$ que associam cada morfismo f seu domínio $\mathrm{dom}(f)$ e contradomínio $\mathrm{cod}(f)$. Um morfismo com domínio A e contradomínio B é escrito $f : A \to B$. Para cada par de objetos A, B definimos o conjunto*

$$\mathcal{C}(A, B) := \{f \in \mathrm{Ar}(\mathcal{C}) \mid f : A \to B\}. \tag{7}$$

  Dizemos que $\mathcal{C}(A, B)$ é um hom-set. Note que hom-sets distintos são disjuntos.

- *Dados objetos A, B, C, a composição*

$$c_{A,B,C} : \mathcal{C}(A, B) \times \mathcal{C}(B, C) \to \mathcal{C}(A, C). \tag{8}$$

  $c_{A,B,C}(f, g)$ é denotado $g \circ f$.

- *Para cada objeto A, um morfismo identidade $\mathrm{id}_A : A \to A$.*
- *Dados objetos A, B, C, D e morfismos $f : A \to B, g : B \to C, h : C \to D$, as igualdades $h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$ e $f \circ \mathrm{id}_A = f = \mathrm{id}_B \circ f$.*

Estruturas matemáticas com funções que preservam estrutura formam categorias:

- **Set** (conjuntos e funções);
- **Top** (espaços topológicos e funções contínuas);
- **Bool** (álgebras de Boole e homomorfismos).

Definição 4.2: *Um functor $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é constituído por*

- *Um mapa de objetos, associando um objeto $F(A)$ de $\mathcal{D}$ a cada objeto A de $\mathcal{C}$.*

- *Um mapa de morfismos, associando um morfismo $F(f) : F(A) \to F(B)$ a cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, de tal modo que a composição e as identidades são preservadas:*

$$F(g \circ f) = F(g) \circ F(f), \quad F(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{F(A)}\,. \tag{9}$$

Exemplo 4.1: $U : \mathbf{Top} \to \mathbf{Set}$ *que associa cada espaço topológico (X, τ) ao conjunto X e cada função contínua entre espaços topológicos á função correspondente entre conjuntos.*

Exemplo 4.2: $\mathrm{Id} : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ *que associa cada objeto a si mesmo e cada morfismo a si mesmo.*

Por definição, o mapa de morfismos de um functor F é *covariante*: a "direção"de cada morfismo é preservada. Se $f : A \to B$ então $F(f) : F(A) \to F(B)$. Um functor contravariante faz o oposto: a "direção"de cada morfismo é invertida.

Definição 4.3: *Um functor contravariante $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ é constituído por*

- *Um mapa de objetos, associando um objeto $G(A)$ de $\mathcal{D}$ a cada objeto G de $\mathcal{C}$.*

- *Um mapa de morfismos, associando um morfismo $G(f) : G(B) \to G(A)$ a cada morfismo $f : A \to B$ de $\mathcal{C}$, de tal modo que a composição e as identidades são preservadas:*

$$G(g \circ f) = G(f) \circ G(g), \quad G(\mathrm{id}_A) = \mathrm{id}_{G(A)}\,. \tag{10}$$

4.2 TRANSFORMAÇÕES NATURAIS E EQUIVALÊNCIA DE CATEGORIAS

Da mesma forma na qual categorias possuem morfismos (functores) entre si, functores também possuem "morfismos"entre si. Tais correspondências são *transformações naturais*.

Definição 4.4: *Sejam $F, G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ functores. Uma transformação natural $t : F \to G$ é uma família de morfismos em $\mathcal{D}$*

$$\{t_A : F(A) \to G(A)\}_{A \in \mathrm{Ob}(\mathcal{C})} \tag{11}$$

tal que, para todos $f : A \to B$, o seguinte diagrama comuta.

$$\begin{tikzcd}
F(A) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "t_A"'] & F(B) \arrow[d, "t_B"] \\
G(A) \arrow[r, "G(f)"'] & G(B)
\end{tikzcd}$$

FIGURA 1: Uma transformação natural entre functores.

Ou seja, $G(f) \circ t_A = t_B \circ F(f)$.
Se cada t_A é um isomorfismo, dizemos que t é um isomorfismo natural: $F \cong G$.

Definição 4.5: *Dizemos que categorias $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ são equivalentes, $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$, se existem functores covariantes $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}, G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ e transformações naturais*

$$G \circ F \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{C}}, \quad F \circ G \cong \mathrm{Id}_{\mathcal{D}}\,. \tag{12}$$

Se F, G são functores contravariantes, dizemos que $\mathcal{C}, \mathcal{D}$ são dualmente equivalentes.

5 O RESULTADO PRINCIPAL

Se **Bool** é a categoria de álgebras de Boole com homomorfismos e **Stone** é a categoria de espaços Booleanos com funções contínuas, defina $\mathrm{Ult} : \mathbf{Bool} \to \mathbf{Stone}$, $\mathrm{Clop} : \mathbf{Stone} \to \mathbf{Bool}$ tais que

- Dada álgebra de Boole $\mathcal{A}$, $\mathrm{Ult}(\mathcal{A})$ é o espaço de Stone associado a $\mathcal{A}$;
- Dado homomorfismo de álgebras de Boole $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, $\mathrm{Ult}(h) : \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_2) \to \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_1)$ satisfaz $\mathrm{Ult}(h)(U) = h^{-1}[U]$ (pelo Lema 2.5, este conjunto é de fato um ultrafiltro de $\mathcal{A}_1$);
- Dado espaço Booleano X, $\mathrm{Clop}(X)$ é a álgebra de Boole dos *clopens* de X;
- Dada função contínua entre espaços Booleanos $c : X_1 \to X_2$, $\mathrm{Clop}(c) : \mathrm{Clop}(X_2) \to \mathrm{Clop}(X_1)$ satisfaz $\mathrm{Clop}(c)(V) = c^{-1}[V]$.

Então tais mapas são functores contravariantes entre as respectivas categorias.

Tome álgebras de Boole $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ e homomorfismo $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$. Queremos demonstrar que $\mathrm{Ult}(f) : \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_2) \to \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_1)$ é contínua. Seja $U \subset \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_1)$ aberto básico. Então existe $x \in \mathcal{A}_1$ tal que $U = [x]$. Portanto, $\mathrm{Ult}(f)^{-1}[U] = \mathrm{Ult}(f)^{-1}[[x]] = \{a \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_2) \mid \mathrm{Ult}(f)(a) \in [x]\} = \{a \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_2) \mid f^{-1}[a] \in [x]\} = \{a \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_2) \mid x \in f^{-1}[a]\} = [f(x)]$. Logo $\mathrm{Ult}(f)^{-1}[U]$ é aberto (básico) de $\mathrm{Ult}(\mathcal{A}_2)$, ou seja, $\mathrm{Ult}(f)$ é contínua.

Por outro lado, tome espaços Booleanos X_1, X_2 e função contínua $c : X_1 \to X_2$. Demonstraremos que $\mathrm{Clop}(c) : \mathrm{Clop}(X_2) \to \mathrm{Clop}(X_1)$ é homomorfismo:

- $\mathrm{Clop}(c)(\emptyset) = c^{-1}[\emptyset] = \emptyset$;
- $\mathrm{Clop}(c)(X_2) = c^{-1}[X_2] = X_1$;
- Dados $A, B \in \mathrm{Clop}(X_2)$, $\mathrm{Clop}(c)(A \cap B) = c^{-1}[A \cap B] = c^{-1}[A] \cap c^{-1}[B] = \mathrm{Clop}(c)(A) \cap \mathrm{Clop}(c)(B)$;
- $\mathrm{Clop}(c)(A \cup B) = c^{-1}[A \cup B] = c^{-1}[A] \cup c^{-1}[B] = \mathrm{Clop}(c)(A) \cup \mathrm{Clop}(c)(B)$;
- $\mathrm{Clop}(c)(\complement A) = c^{-1}[X_2 \setminus A] = \mathrm{Clop}(c)(X_2) \setminus \mathrm{Clop}(c)(A) = \complement\, \mathrm{Clop}(c)(A)$.

Logo $\mathrm{Clop}(c)$ é, de fato, homomorfismo de álgebras de Boole.

Além disso, como os morfismos identidade de **Bool** e **Stone** são as funções identidade, é elementar que para toda álgebra de Boole $\mathcal{A}$ (resp. todo espaço Booleano X) temos que $\mathrm{Ult}(\mathrm{id}_{\mathcal{A}}) = \mathrm{id}_{\mathrm{Ult}(\mathcal{A})}$ (resp. $\mathrm{Clop}(\mathrm{id}_X) = \mathrm{id}_{\mathrm{Clop}(X)}$). Logo $\mathrm{Clop}, \mathrm{Ult}$ preservam as identidades.

Agora, tome álgebras de Boole $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3$ e homomorfismos $f : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$, $g : \mathcal{A}_2 \to \mathcal{A}_3$. Então, para todo $U \in \mathrm{Ult}(\mathcal{A}_1)$ temos $\mathrm{Ult}(g \circ f)(U) = (g \circ f)^{-1}[U] = f^{-1}[g^{-1}[U]] = (\mathrm{Ult}(f) \circ \mathrm{Ult}(g))(U)$. Analogamente, dados espaços Booleanos X_1, X_2, X_3 e funções contínuas $c_1 : X_1 \to X_2$, $c_2 : X_2 \to X_3$, temos que para todo $A \in \mathrm{Clop}(X_1)$, $\mathrm{Clop}(c_2 \circ c_1)(A) = (c_2 \circ c_1)^{-1}[A] = c_1^{-1}[c_2^{-1}[A]] = (\mathrm{Clop}(c_1) \circ \mathrm{Clop}(c_2))(A)$. Logo $\mathrm{Clop}, \mathrm{Ult}$ preservam as composições.

Teorema 5.1: *As categorias* **Bool** *e* **Stone** *são dualmente equivalentes.*

Demonstração

Não apenas $\mathrm{Clop}, \mathrm{Ult}$ são functores, mas também $\mathrm{Clop} \circ \mathrm{Ult} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Bool}}, \mathrm{Ult} \circ \mathrm{Clop} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Stone}}$. De fato, sejam $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ álgebras de Boole, $h : \mathcal{A}_1 \to \mathcal{A}_2$ homomorfismo e

$$\begin{aligned} h_i \colon \mathcal{A}_i &\to (\mathrm{Clop} \circ \mathrm{Ult})(\mathcal{A}_i) \\ x &\mapsto [x] \end{aligned}$$

os isomorfismos da Observação 3.2. Seja $b \in \mathcal{A}_1$. Então $(h_2 \circ h)(b) = h_2(h(b)) = [h(b)] = (\mathrm{Clop} \circ \mathrm{Ult})(h)([b]) = ((\mathrm{Clop} \circ \mathrm{Ult})(h) \circ h_1)(b)$. Portanto $h_2 \circ h = (\mathrm{Clop} \circ \mathrm{Ult})(h) \circ h_1$, isto é, $\mathrm{Clop} \circ \mathrm{Ult} \cong \mathrm{id}_{\mathbf{Bool}}$.
Agora, sejam X_1, X_2 espaços Booleanos, $c : X_1 \to X_2$ função contínua e

$$\begin{aligned} c_i \colon X_i &\to (\mathrm{Ult} \circ \mathrm{Clop})(X_i) \\ x &\mapsto \{a \in \mathrm{Clop}(X_i) \mid x \in a\} \end{aligned}$$

os homeomorfismos do Teorema 3.3. Seja $s \in X_1$. Então $(c_2 \circ c)(s) = c_2(c(s)) = \{a \in \mathrm{Clop}(X_2) \mid c(s) \in a\}$. Por outro lado, $((\mathrm{Ult} \circ \mathrm{Clop})(c) \circ c_1)(s) = (\mathrm{Ult} \circ \mathrm{Clop})(c)(\{a \in \mathrm{Clop}(X_1) \mid s \in a\}) = \{a \in \mathrm{Clop}(X_2) \mid c(s) \in a\}$. Portanto, $c_2 \circ c = (\mathrm{Ult} \circ \mathrm{Clop})(c) \circ c_1$, o que conclui a demonstração.

■

6 Agradecimentos

Este artigo foi escrito com base em um pôster (sobre o mesmo tópico) elaborado para a disciplina de Topologia Geral, ofertada no segundo semestre de 2016, na Universidade Federal de São Paulo. Ao professor Dr. Leandro Candido Batista, que ministrou tal disciplina e contribuiu na elaboração deste artigo, o autor dirige seus agradecimentos.

Referências

[1] M. H. Stone, "The theory of representations of boolean algebras," *Transactions of the American Mathematical Society*, vol. 40, pp. 37–111, 1936.

[2] G. Boole, *The Mathematical Analysis of Logic, Being an Essay Towards a Calculus of Deductive Reasoning*. Macmillan, Barclay, & Macmillan, 1847.

[3] J. D. Monk, R. bonnet, and S. Koppelberg, *Handbook of Boolean algebras*. North-Holland, 1989.

[4] S. Abramsky and N. Tzevelekos, "Introduction to categories and categorical logic." Notas baseadas em um curso ministrado em Oxford.