QUADRADOS MÁGICOS (DE ORDEM ÍMPAR)

Roberto Dias Cahú
Instituto Federal de Pernambuco - IFPE
rdcahu@yahoo.com.br

Rodrigo Gondim
Universidade Federal Rural de Pernambuco - UFRPE
rodrigo.gondim.neves@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho recordamos um pouco da história dos quadrados mágicos, dos quadrados latinos ortogonais e a relação entre os mesmos, descobertas por Euler. Em seguida apresentamos um algoritmo de decomposição de um quadrado mágico de ordem ímpar em uma soma de quadrados latinos ortogonais.

ABSTRACT

In this work we recorded some of the history of the magic squares, orthogonal Latin squares and a relation between them, discovered by Euler. Next we present an algorithm of decomposition of a magical square of odd order in a sum of orthogonal squares.

Palavras-chave: Quadrados mágicos, quadrados latinos, quadrados ortogonais, decomposição.

1 QUADRADOS MÁGICOS - UM POUCO DE HISTÓRIA

Um **quadrado mágico** é uma tabela quadrada (matriz quadrada) de ordem n na qual colocam-se os números de 1 a n^2. A regra fundamental é que a soma de cada linha, de cada coluna e de cada diagonal seja constante, esta é chamada a constante mágica do quadrado. Os quadrados mágicos tem fascinado a humanidade há milênios e ainda hoje são bastante populares. Para saber mais sobre quadrados mágicos consultar [1], [2], [3] e [4].

O mais antigo quadrado mágico que se tem notícia aparece na mitologia chinesa aproximadamente em -2800. Esse quadrado se chamava *Luo Shu* ou *Lo Shu*. A lenda por tras do Luo Shu está associada às inundações do rio Luo e seu nome significa, literalmente, o livro/rolo do rio Luo. Conta-se que para conter as grandes inundações do rio, que destruiam vilas inteiras, deveriam ser feitas oferendas ao deus do rio. Entretanto, durante muitos anos, o deus do rio não parecia aceitar as oferendas e continuava castigando-os com as inundações. O sinal de desagrado divino era uma tartaruga gigante que emergia do rio e caminhava sobre as oferendas.

Ainda, segundo a lenda, a quantidade de oferendas exigida pelo deus do rio estava codificada no casco da tartaruga, em forma de um quadrado mágico. A quantidade era a constante mágica do quadrado $k = 15$.

O Luo Shu está ainda associado aos fundamentos da corrente filosófica chinesa Feng Shui e ao calendário solar chinês. É facil mostrar que o único quadrado mágico de ordem 3, a menos de rotações e reflexões, é o apresentado na Tabela 1.

Posteriormente, numa pequena região da Índia ergueu-se, entre os séculos X e XI, um grupo de monumentos denominado Khajuraho. Eles representam o mais importante com-

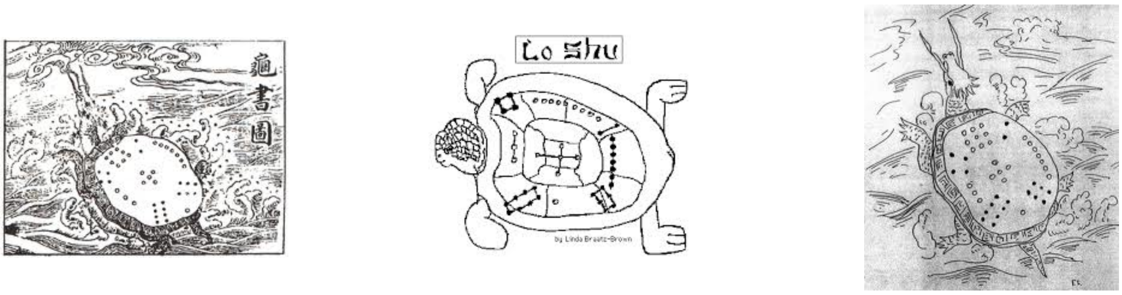


FIGURA 1: Representações do Luo Shu no casco da tartaruga

TABELA 1: Quadrado mágico de ordem 3

8	1	6
3	5	7
4	9	2

plexo de templos hinduístas e jainistas, duas tradições religiosas na Índia. Os templos possuem riqueza de detalhes arquitetônicos, esculturas e gravuras.

FIGURA 2: Templos hinduístas e jainistas em Khajuraho

Em um dos templos Jainistas está gravado um curioso quadrado mágico, que possui muitas outras propriedades especiais. Curiosamente esse mesmo quadrado mágico será encontrado posteriormente na Europa.

FIGURA 3: Quadrado super-mágico em um templo Jainista em Khajuraho

Segundo Carl Boyer, em seu livro História da Matemática [5], o primeiro registro de um quadrado mágico no ocidente ocorreu em 1514, numa gravura do pintor Alemão Albrecht Dürer, denominada *Melancholia*. Dürer estava interessado em Matemática (Aritmética e Geometria), Geografia e Arquitetura. Apesar de seu quadrado mágico coincidir com o quadrado do templo Jainista em Khajuraho, não se sabe se ele teve acesso ao Khajuraho. Esse quadrado é chamado supermágico por possuir muitas outras somas constantes, por exemplo a soma de cada subquadrado 2×2 presente na figura.

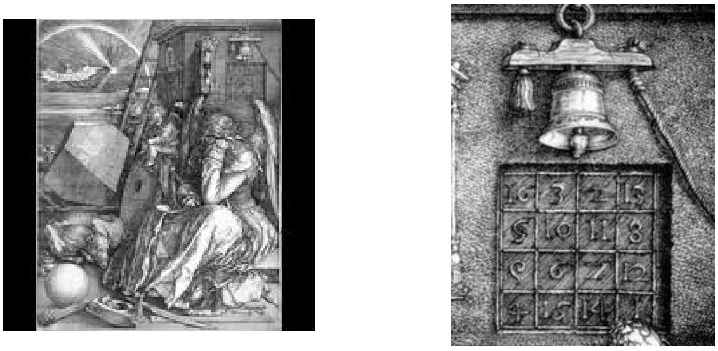
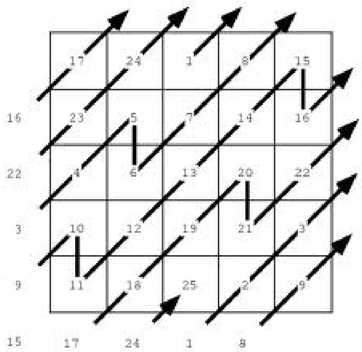


FIGURA 4: Quadro *Melancholia* de Dürer e detalhe do quadrado

2 ALGORITMOS PARA A CONSTRUÇÃO DE QUADRADOS MÁGICOS

É possível construir quadrados mágicos de toda ordem $n \geq 3$. Existem, entretanto, 3 classes distintas de algoritmos para a construção de quadrados mágicos. Diferenciando-se os casos em que n é ímpar, n é um par múltiplo de 4 ou n é um par que não é múltiplo de 4. Alguns desses algoritmos ou variações deles são conhecidos há séculos. Modernamente as principais contribuições nessa direção são devidas a Kraitchik [6] e Conway, em meados do século XX. Por simplicidade apresentamos apenas os casos em que n é ímpar e aquele em que n é um múltiplo de 4.

Algoritmo 3 (Quadrados de ordem ímpar): *Coloque* 1 *na primeira linha, na posição central e indutivamente coloque o próximo número na diagonal superior, se ela não estiver ocupada ou abaixo de sua posição. Consideramos identificações naturais no quadrado.*



Esse algoritmo foi publicado por De la Loubère em [4].

Algoritmo 4 (Quadrados de ordem múltiplo de 4): *Escreva os inteiros em ordem crescente linha após linha. Subdivida o quadrado em quadradinhos* 2×2*. Em cada quadradinho substitua cada um dos elementos* a_{ij} *que ocorrem em alguma diagonal por* $n^2 + 1 - a_{ij}$*.*

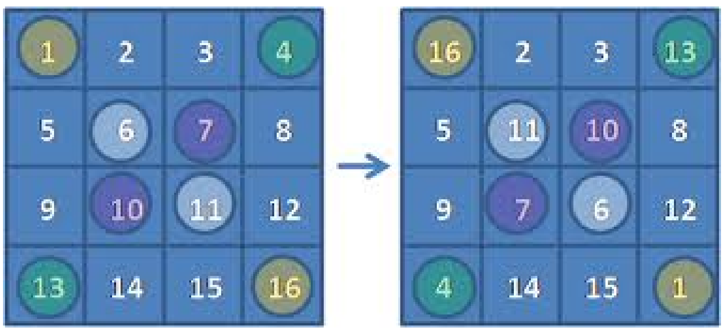


FIGURA 5: Construção de quadrados de ordem múltiplo de 4

5 QUADRADOS LATINOS E QUADRADOS MÁGICOS

Euler escreveu dois importantes trabalhos sobre quadrados mágicos, um mais geral, *De quadratis magicis* [7], e outro mais particular e curioso *Recherches sur un nouvelle espece de quarres magiques* [8]. Nesse segundo artigo ele considera uma estrutura combinatória denominada quadrado latino. Aparentemente seu sonho seria construir quadrados mágicos a partir de quadrados latinos.

Um **quadrado latino** é uma matriz quadrada de ordem n na qual colocamos n símbolos (por exemplo letras latinas) em cada linha, de modo que não haja repetição de símbolos em linhas nem em colunas, ou equivalentemente, cada símbolo ocorre uma única vez em cada linha e em cada coluna. Essas estruturas ocorrem, por exemplo no SUDOKU. Um par de quadrados latinos de mesma ordem define um par greco-latino (ou um **par de quadrados latinos ortogonais**), se os pares ordenados de símbolos em posições correspondentes das duas matrizes forem todos distintos. Euler representava uma matriz com letras latinas e outra com letras gregas, daí a nomenclatura clássica, Greco-Latino. Atualmente os quadrados latinos ortogonais possuem diversas aplicações em agronomia, biometria, engenharia entre outras (ver [9, 10]).

Uma das motivações originais ao estudo dos quadrados greco-latinos foi o problema dos 36 oficiais.

Problema 6: *Organizar 36 oficiais, de 6 diferentes regimentos e 6 patentes distintas, numa tabela, de modo que, em cada linha ou coluna estejam representados todos os regimentos e todas as patentes.*

Caso encontrasse um par de quadrados latinos ortogonais de ordem 6, o problema estaria resolvido. Como não conseguiu, Euler conjecturou que não existiam quadrados latinos ortogonais de ordem $n = 4k + 2$.

Conjectura 6.1 (Euler): *Não existem quadrados latinos ortogonais de ordem par que não seja múltiplo de 4.*

Em 1900, o matemático amador Tarry mostrou que realmente não existem quadrados greco-latinos de ordem 6, o que estava de acordo com a conjectura de Euler. Mas, em 1959, os matemáticos Bose, Shrikhande e Parker provaram que a conjectura estava errada, mostrando que é possível encontrar quadrados latinos ortogonais para qualquer ordem $n = 4k + 2$ com $k > 1$. O fato de uma conjectura feita por Euler ter sido rejeitada 177 anos após seu surgimento gerou, por exemplo, matéria de primeira página numa edição de domingo do jornal The New York Times (1959), e também a capa da revista Scientific American (1959).


Major Mathematical Conjecture Propounded 177 Years Ago Is Disproved

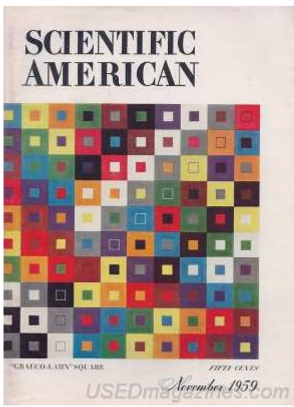


FIGURA 6: Capa New York Times e Scientific American sobre a conjectura errada de Euler

Nosso trabalho foi fortemente inspirado no seguinte Teorema de Euler, publicado em [8].

Teorema 6.1 (Euler): *A partir de um par de quadrados latinos ortogonais de ordem n podemos construir um quadrado $n \times n$, contendo os números de 1 até n^2, cuja soma dos elementos de cada linha e cada coluna é constante.*

Demonstração

Mais precisamente, vamos provar o seguinte resultado: *"Sejam, L_1 um quadrado latino de ordem n formado pelos elementos: $0.n$; $1.n$; $2.n$; ...; $(n-1).n$; e L_2 um quadrado latino ortogonal a L_1, cujos elementos são: 1,2,3,...,n. A matriz $Q = L_1 + L_2$ possui todos os elementos de 1 até n^2 e a soma de suas linhas e de suas colunas é constante."*
Sabemos que num quadrado latino, a soma dos elementos de uma linha ou coluna é sempre a mesma. Sejam, S_1 a soma dos elementos de uma linha ou coluna de L_1, e S_2 a soma dos elementos de uma linha ou coluna de L_2. Então, a soma M dos elementos de uma linha ou coluna da matriz Q é $M = S_1 + S_2$. Além disso, é facil ver que $S_1 = \frac{n^3-n^2}{2}$ e que $S_2 = \frac{(1+n)n}{2} = \frac{n+n^2}{2}$. Só nos falta mostrar que ocorrem todos os números de 1 até n^2. Pela definição de Q, devemos ter $1 \leq q_{ij} \leq n^2$. Portanto, nos resta mostrar que os q_{ij} são todos distintos, que segue da hipótese de que os quadrados latinos L_1 e L_2 são ortogonais e da unicidade de representação de um número em base n.

■

Ao analisarmos o método de De la Loubère para a construção de um quadrado mágico de ordem n ímpar, percebemos que os resultados obtidos para quadrados mágicos poderiam ser obtidos utilizando-se pares de quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2. Os elementos dos quadrados L_1 e L_2 são os mesmos elementos usados por Euler em [8]. A novidade (com relação a Euler) é que obtemos quadrados mágicos. Ou seja, **todo quadrado mágico de ordem ímpar proveniente do algoritmo de De la Loubère pode ser decomposto como uma soma de quadrados latinos ortogonais.**

Para efetuarmos esta construção, utilizaremos, como na demonstração do Teorema 6.1, dois quadrados latinos ortogonais L_1 e L_2 de ordem ímpar n. O quadrado L_1 terá os elementos $0.n$, $1.n$, $2.n$, ..., $(n-1).n$. Já os elementos de L_2 serão 1, 2, 3, ..., n. O método consiste de três passos:

1. A construção de cada quadrado latino deve ser iniciada pela coluna central, colocando os elementos em ordem crescente.
2. Em L_1, ao avançarmos uma coluna para direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de uma posição para cima.
   Em L_2, ao avançarmos uma coluna para direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas posições para cima.
3. Adicionando os elementos correspondentes de L_1 e L_2 obtemos o quadrado mágico desejado.

Para um melhor entendimento, seguiremos os três passos no caso $n = 3$.

1.

$$L_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 0 & \\ \hline & 3 & \\ \hline & 6 & \\ \hline\end{array} \qquad L_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline & 1 & \\ \hline & 2 & \\ \hline & 3 & \\ \hline\end{array}$$

2. A fim de executarmos o segundo passo, consideraremos que à direita da coluna n está a coluna 1 e acima da linha 1 está a linha n.

$$L_1 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 6 & 0 & 3 \\ \hline 0 & 3 & 6 \\ \hline 3 & 6 & 0 \\ \hline\end{array} \quad L_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2 & 1 & 3 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \hline 1 & 3 & 2 \\ \hline\end{array}$$

3. Só resta fazer a soma.

$$L_1 + L_2 = \begin{array}{|c|c|c|}\hline 8 & 1 & 6 \\ \hline 3 & 5 & 7 \\ \hline 4 & 9 & 2 \\ \hline \end{array}$$

Proposição 6.1: *L_1 e L_2 assim obtidos são quadrados latinos.*

Demonstração

Na construção do quadrado L_1, de ordem n, são utilizados n símbolos distintos. Ao avançarmos uma coluna para direita, os elementos sofrem um deslocamento de uma posição para cima. Isto garante que cada símbolo estará presente em todas as colunas e em todas as linhas, sem que haja símbolos repetidos numa mesma linha ou coluna. Isto garante que L_1 é um quadrado latino.
Na construção do quadrado L_2, de ordem n, são utilizados n símbolos distintos. Ao avançarmos uma coluna para direita, os elementos sofrem um deslocamento de duas posições para cima. Isto garante que cada símbolo estará presente em todas as colunas. Falta mostrar que cada símbolo estará presente em todas as linhas. Isso ocorre justamente pelo fato de n ser ímpar e o pulo dado ser 2. ■

Apesar de termos mostrado que L_1 e L_2 são quadrados latinos, ainda precisamos mostrar que os mesmos são ortogonais.

Proposição 6.2: *L_1 e L_2 são quadrados latinos ortogonais.*

Demonstração

Lembramos que dois quadrados latinos são denominados ortogonais se os pares ordenados formados por elementos em posições correspondentes são todos distintos. Sejam a_{ij} = x e b_{ij}= y elementos correspondentes de L_1 e L_2, respectivamente. Temos então o par ordenado (x, y). Como, neste caso, x e y estão numa mesma linha, a distância entre suas linhas é $d = 0$. Na coluna à direita, de acordo com o método, x estará uma posição acima, enquanto y estará duas posições acima, então a distância entre suas linhas será $d = 1$. Na próxima coluna à direita, a distância entre as linhas de x e y será $d = 2$. E assim sucessivamente. Independentemente da coluna em que iniciamos a verificação, ao chegarmos na última coluna antes de retornarmos a coluna inicial, teremos d = $n - 1$. Isto nos garante que o par (x, y) não aparecerá em nenhuma outra posição diferente da original. ■

Já provamos que os quadrados L_1 e L_2, utilizados no método, são quadrados latinos ortogonais. Resta-nos provar que $L_1 + L_2$ é um quadrado mágico de ordem n.

Teorema 6.2: *$Q = L_1 + L_2$ é um quadrado mágico de ordem n.*

Demonstração

Pelo Teorema 6.1 só nos resta mostrar que as diagonais do quadrado $Q = L_1 + L_2$ também tem soma igual a constante mágica M.
No quadrado latino L_1, os elementos de cada linha ou coluna são: $0.n$; $1.n$; $2.n$;... $(n - 1).n$.
A soma dos elementos de cada linha ou coluna de L_1 é

$$S_1 = \frac{n^3 - n^2}{2}$$

Segundo o algoritmo, escrevemos a coluna central de L_1 em ordem crescente de $0.n$ até $(n-1).n$, assim, o termo central é:

$$TC = \frac{0.n + (n-1).n}{2} = \frac{(n-1).n}{2}$$

Então a soma dos elementos da diagonal secundária é

$$n.\left[\frac{(n-1).n}{2}\right] = \frac{n^3 - n^2}{2} = S_1$$

Na diagonal principal de L_1, seus elementos são: $0.n$; $1.n$; $2.n$;...; $(n-1).n$. Portanto, em L_1, cada linha, coluna ou diagonal tem soma igual a S_1.

Com relação ao quadrado L_2, o passo (2) do algorítmo diz que: ao avançarmos uma coluna para direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas posições para cima.
Note que, dos passos (1) e (2), os elementos da diagonal secundária são dados pelos elementos: $1, 2, \ldots, n$ (nessa ordem começando da primeira coluna).
Em relação aos elementos da diagonal principal, vamos dividir a análise em três casos:

1. Se $n = 3k + 1$.
   Neste caso é possível perceber que os elementos da diagonal principal de L_2 são 1, 2, 3,..., n. Para que isso fique claro, vamos representar os elementos de L_2 da seguinte forma: $T_i = i$, isto é, $T_1 = 1$; $T_2 = 2$;...; $T_n = n$. Como $n = 3k + 1$ é ímpar, então $3k$ é par. Isso implica que

   $$TC = \frac{n+1}{2} = \frac{(3k+1)+1}{2} = 3.\frac{k}{2} + 1 \in \mathbb{N}$$

   Portanto, o termo central é da forma $TC = 3k + 1$, $k \in \mathbb{N}^*$
   Como em L_2, ao avançarmos uma coluna para direita, os elementos devem sofrer um deslocamento de duas posições para cima. Ao avançarmos para a coluna da direita, na diagonal principal, o índice do termo aumenta de três em três unidades. As únicas exceções são: obtendo T_{n-2}, o termo seguinte será T_1. Obtendo T_{n-1}, o termo seguinte será T_2. E obtendo T_n, o termo seguinte será T_3.
   Podemos garantir que não haverá repetição dos elementos da diagonal principal pois, nesse caso, T_n, T_{n-1} e T_{n-2} possuem as seguintes formas: T_{3k+1}, T_{3k} e T_{3k+2}, respectivamente. Portanto, ao atingir o maior elemento da forma T_{3k+1}, virão, em ordem crescente, todos os elementos da forma T_{3k}. Ao atingir o maior elemento da forma T_{3k}, virão, em ordem crescente, todos os elementos da forma T_{3k+2}.

   E finalmente, ao atingir o maior elemento da forma T_{3k+2}, virão, em ordem crescente, os elementos restantes da forma T_{3k+1}.
   Portanto, os elementos da diagonal principal neste caso são: 1, 2, 3,..., n. Isso faz com que a soma dos elementos da diagonal principal neste caso também seja igual a S_2. Assim, toda linha, coluna ou diagonal de L_2 tem soma:

   $$S_2 = \frac{(1+n).n}{2} = \frac{n+n^2}{2}$$

2. Se $n = 3k + 2$.
   Neste caso, utilizando um raciocínio análogo ao anterior, é possível perceber que os elementos da diagonal principal de L_2 também são 1, 2, 3,..., n.

3. Se $n = 3k$.
   Como $3 \leq n = 3k$ e n é ímpar, então $k = 2b + 1$, $b \in \mathbb{N}$. O elemento da diagonal principal que está localizado na coluna central, de acordo com o método utilizado, é o termo central, isto é,

$$TC = \frac{n+1}{2} = \frac{(3k)+1}{2} = \frac{3(2b+1)+1}{2} = \frac{6b+4}{2} = 3b+2$$

   Já sabemos que ao avançarmos para a coluna da direita, na diagonal principal, o índice do termo aumenta de três em três unidades; e que obtendo T_{n-1}, o termo seguinte será T_2.
   Como o termo central é da forma T_{3k+2} e n é da forma $3k$, ao atingir o maior elemento da forma T_{3k+2} que corresponderá a T_{n-1} , virá outro elemento da forma T_{3k+2} que será T_2. Portanto, todos os elementos da diagonal principal, neste caso, são da forma T_{3k+2}. Neste caso, só aparecem $\frac{n}{3}$ números distintos na diagonal principal, e cada um deles aparece 3 vezes. Dessa forma, a soma dos elementos da diagonal principal S_D é:

$$S_D = 3.\sum_{i=0}^{\frac{n}{3}-1}(2+3i) = \frac{n^2+n}{2} = S_2$$

   Então, a soma dos elementos de uma linha, coluna ou diagonal de L_2 é:

$$\frac{n^2+n}{2}$$

   Portanto, a soma dos elementos correspondentes de L_1 e L_2 gera um quadrado com constante mágica

$$M = S_1 + S_2 = \frac{n^3-n^2}{2} + \frac{n+n^2}{2} = \frac{n^3+n}{2} = \frac{\left(1+n^2\right).n}{2}$$

■

7 CONCLUSÃO

Euler mostrou em [8] que a partir de um par de quadrados latinos ortogonais era possível construir quadrados com soma constante nas linhas e nas colunas. A impressão que temos na leitura do artigo de Euler é a de que ele gostaria de construir quadrados mágicos a partir de pares de quadrados latinos. Só lhe faltava mostrar que a soma das diagonais é constante, o que infelizmente, não é verdade em geral. Além disso, a decomposição nem sempre é possível, por exemplo, no caso $n = 6$ existem quadrados mágicos, veja a Tabela 2. Por outro lado, não existe um par de quadrados latinos ortogonais dessa ordem. Para $n = 4k$ o algoritmo mais conhecido não é compatível com a decomposição de Euler. O algoritmo de construção no caso $n = 4k + 2$ é bem mais complicado.

Nesse texto em damos uma pequena contribuição no caso em que n é ímpar mostrando ser possível decompor os quadrados mágicos construídos a partir do algoritmo de De la Loubère como soma de dois quadros latinos ortogonais. Em outras palavras adaptamos o algoritmo de De la Loubère a fim de construir um oar de quadrados latinos ortogonais como os de Euler e cuja soma fosse de fato um quadrado mágico.

Esperamos com isso que Euler fique feliz em seu túmulo e outras pessoas se desafiem a tentar resgatar antigos pequenos problemas deixados pelos grandes mestres mesmo em nível mais elementar.

TABELA 2: Um quadrado mágico de ordem 6

24	16	33	23	10	5
11	15	28	8	13	36
20	14	2	31	25	19
1	18	6	29	27	30
21	22	7	17	32	12
34	26	35	3	4	9

REFERÊNCIAS

[1] L. N. Andrade, "Mais sobre quadrados mágicos," *Revista do professor de matemática*, vol. 41, 1999.

[2] A. O. Gonçalves, "Quadrados mágicos 3×3: um novo olhar," *Revista do professor de matemática*, vol. 39, 1999.

[3] "Quadrados mágicos," *Revista do professor de matemática*, vol. 39, 1999.

[4] S. de La Loubère, *A New Historical Relation of the Kingdom of Siam*, vol. 1. FL, 1983.

[5] C. Boyer, *História da Matemática (Tradução E. F. Gomide)*. Edgard Blucher, 1974.

[6] M. Kraitchik, *Mathematical recreations*. W.W. Norton and Company, 1942.

[7] L. Euler, "On magic squares (translation of the original de quadratis magicis)," *Commentationes arithmeticae*, vol. 2, 1849.

[8] L. Euler, "Investigations on a new type of magic square (translation of the original recherches sur une nouvelle espèce de quarrés magiques)," *Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen*, vol. 9, pp. 85–239, 1782.

[9] M. Alegri, "Quadrados latinos e aplicações," Tese de Mestrado, UNICAMP - Matemática aplicada, 2006.

[10] I. F. H. Sánchez, "Quadrados latinos e aplicações em engenharia de software," Tese de Mestrado, UFPE - Estatística aplicada, 2011.