REVISITANDO A RELAÇÃO ENTRE INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO COMO OPERAÇÕES INVERSAS

Rui Eduardo Brasileiro Paiva
Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia do Ceará
ruieduardobp@yahoo.com.br

RESUMO

Este artigo é destinado para estudantes dos cursos de exatas, tanto aos que ainda estão aprendendo o formalismo da liguagem matemática como também àqueles mais avançados e familiarizados com conceitos vistos nas disciplinas de Cálculo e Álgebra Linear. Explorando uma abordagem algébrica e distinta daquela convencional nos livros de Cálculo, nós constatamos, via Teorema Fundamental do Cálculo, que a operação de derivação é uma inversa à esquerda da operação de integração, mas não é uma inversa à direta, visto que funções que diferem por uma constante possuem a mesma derivada. Em seguida, apontamos o papel desempenhado pelo Teorema dos Isomorfismos entre Espaços Vetoriais, um variante do Teorema do Núcleo e da Imagem, que é também responsável pela conexão estabelecida entre as operações de integração e diferenciação.

ABSTRACT

This article is intended for students of the exact courses, both those who are still learning the formalism of mathematical language as well as those more advanced and familiar with concepts seen in the disciplines of Calculus and Linear Algebra. Exploring an algebraic and distinct approach to the conventional one in the Calculus books, we find, via the Fundamental Theorem of Calculus, that the derivation operation is an inverse to left of the integration operation, but it is not an inverse to the right, since functions that differ by a constant have the same derivative. Next, we point out the role played by the Isomorphism Theorem between Vector Spaces, a variant of Kernel and Range Theorem, which is also responsible for established connection between integration and differentiation operations.

Palavras-chave: Teorema Fundamental do Cálculo. Teorema dos Isomorfismos. Integração. Derivação.

1 INTRODUÇÃO

O cálculo diferencial está centrado no conceito de derivadas. A motivação original para o estudo das derivadas foi o problema da definição de retas tangentes ao gráfico de funções e calcular a inclinação de tais retas. Por sua vez, o cálculo integral é motivado pelo problema de definir e calcular a área da região delimitada pelos gráficos de funções. Se uma função f é diferenciável em um intervalo I, isto é, a sua derivada f' existe em cada ponto de I, então, uma questão natural que surge é: Dada f' em cada ponto de I, podemos determinar a função f? Este tipo de problema surge em muitas situações práticas. Por exemplo, se conhecemos a velocidade instantânea de um objeto em qualquer instante, então é possível determinar a posição do objeto em qualquer instante? Existem várias dessas situações em que os processos de derivação e integração estão relacionados.

Relacionar integração e diferenciação permite calcular integrais por meio de uma primitiva da função integranda em vez de pela determinação dos limites das somas de Riemann, que em geral, é uma tarefa árdua. Esta relação é conhecida como Teorema Fundamental do Cálculo e é um dos mais importantes de toda a matemática.

As conclusões do teorema fundamental do cálculo fornecem várias informações úteis, por exemplo, qualquer função contínua f possui uma primitiva F de tal modo que integrando-se a função f primeiro, em seguida diferenciando-se o resultado, retorna-se à função f. Ou então, derivando-se a função F primeiro e depois integrando-se o resultado, obtém-se a função F de volta (ajustada por uma constante de integração).

Pode-se efetuar uma comparação de que a operação de integração está para a adição, visto que apresenta em sua gênese o conceito da soma de parcelas infinitamente pequenas, assim como a derivação está para a subtração, por tratar de problemas que envolvem taxas de variação, sendo a relação mútua e recíproca entre essas operações.

De certo modo, os processos de integração e derivação são o "inverso" um do outro. No entanto, o fato de uma função possuir várias primitivas requer um olhar mais atento. Com base nisso, recordamos a teoria envolvida nesses processos e constatamos via teorema fundamental do cálculo, que a operação de derivação é uma inversa à esquerda da operação de integração, mas não é uma inversa à direita, visto que funções que diferem por uma constante possuem a mesma derivada. Depois destacamos o papel desempenhado pelo teorema dos isomorfismos entre espaços vetoriais para determinar as condições que tornam integração e derivação operações inversas uma da outra. Assim, na próxima seção estabelecemos a notação que será seguida e recordamos brevemente alguns pré-requesitos necessários para o desenvolvimento. Dando continuidade, na seção *Relação entre integração e derivação* revisitamos, sob um enfoque mais algébrico do que os convencionais presentes nos livros de cálculo (por exemplo [1] e [2]), a relação entre os processos de integração e derivação. Por fim, a última seção apresenta as considerações finais à respeito deste artigo de divulgação.

2 PRÉ-REQUISITOS

Sabemos que uma função real limitada f é integrável à Riemann em um intervalo $[a, b]$, se para toda escolha de $x_i^* \in \left[a + \frac{(i-1)(b-a)}{n}, a + \frac{i(b-a)}{n}\right]$, a soma

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}$$

converge para o mesmo valor. Neste caso, tal valor é denotado por

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{n\to+\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i^*)\frac{b-a}{n}.$$

Dada uma função integrável $f : [a, b] \to \mathbb{R}$, definimos $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ por

$$F(t) = \int_a^t f(x)dx.$$

Isto posto, sendo $R[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f \text{ é integrável}\}$, podemos definir uma aplicação $\Psi : R[a, b] \to \text{Lip}[a, b]$ dada por

$$\Psi(f)(t) = \int_a^t f(x)dx,$$

onde $\text{Lip}[a, b] = \{f : [a, b] \to \mathbb{R};\ f \text{ é Lipschitz}$[1]$\}$.

[1]Uma função $f : A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é dita ser Lipschitz se existe $\alpha > 0$ tal que $|f(x) - f(y)| \le \alpha|x - y|$, $\forall x, y \in A$.

Afirmamos que Ψ está bem definida e é linear. Com efeito, devemos mostrar que se f é integrável, então $\Psi(f)$ é Lipschitz. De fato, se $t_1, t_2 \in [a,b]$, com $t_2 \geq t_1$, então

$$|\Psi(f)(t_2) - \Psi(f)(t_1)| = \left|\int_a^{t_2} f(x)dx - \int_a^{t_1} f(x)dx\right| = \left|\int_{t_1}^{t_2} f(x)dx\right| \leq \int_{t_1}^{t_2} |f(x)|dx.$$

Mas f é limitada, i.e, existe $k > 0$ tal que $|f(x)| \leq k$, $\forall x \in [a,b]$. Logo,

$$\int_{t_1}^{t_2} |f(x)|dx \leq k \int_{t_1}^{t_2} dx = k|t_2 - t_1|.$$

Portanto, $\Psi(f) \in \text{Lip}[a,b]$. Quanto a linearidade, basta ver que

$$\begin{aligned}
\Psi(\alpha f + \beta g)(t) &= \int_a^t [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx \\
&= \int_a^t \alpha f(x)dx + \int_a^t \beta g(x)dx \\
&= \alpha \int_a^t f(x)dx + \beta \int_a^t g(x)dx \\
&= \alpha\Psi(f)(t) + \beta\Psi(g)(t),
\end{aligned}$$

para quaisquer $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ e $f, g \in R[a,b]$.

Agora, ressaltamos um teorema chave na conclusão desse trabalho.

Teorema 2.1 (Isomorfismos): *Sejam V e W espaços vetoriais e $T : V \to W$ uma transformação linear sobrejetiva. Então $\overline{T} : V/\text{ker}(T) \to W$ dada por $\overline{T}(\bar{x}) = T(x)$ é um isomorfismo entre espaços vetoriais.*

Demonstração

Seja $V/\text{ker}(T)$ com as operações induzidas pela projeção

$$\begin{array}{rccl}
\pi : & V & \longrightarrow & V/\text{ker}(T) \\
& x & \longmapsto & \pi(x) = \overline{x}.
\end{array}$$

Com isso, afirmamos que

i) $\overline{T}$ está bem definida, pois se $\overline{x} = \overline{y}$, então $x - y \in \text{ker}(T)$, e assim, $T(x) = T(y)$, o que nos dá $\overline{T}(\overline{x}) = \overline{T}(\overline{y})$.

ii) $\overline{T}$ é injetiva, pois se $\overline{T}(\overline{x}) = \overline{T}(\overline{y})$, então $x - y \in \text{ker}(T)$ e, portanto, $\overline{x} = \overline{y}$.

iii) $\overline{T}$ é sobrejetiva, pois dado $y \in W$ existe $x \in V$ tal que $T(x) = y$ já que T é sobrejetiva. Daí, $\overline{T}(\overline{x}) = y$.

Isto conclui a demonstração.

No teorema 2.1 acima supomos $T : V \to W$ uma transformação linear sobrejetiva. Entretanto, podemos estendê-la para uma transformação linear qualquer e obter um dos resultados mais importantes da Álgebra Linear, o teorema do núcleo e da imagem, cujo enunciado é recordado a seguir e cuja demonstração segue as mesmas linhas desta acima e pode ser encontrada em [3].

Teorema 2.2 (do Núcleo e da Imagem): *Seja $T \in \mathcal{L}(V, W)$. Então os espaços vetoriais*

$$\frac{V}{\textit{ker}(T)} \quad \textit{e} \quad \textit{Im}(T)$$

são canonicamente isomorfos. Em particular, se V e W tiverem dimensão finita, então

$$\dim V = \dim(\textit{ker}(T)) + \dim(\textit{Im}(T)).$$

3 RELAÇÃO ENTRE INTEGRAÇÃO E DERIVAÇÃO

Desde que $C^0[a,b]$ representa o espaço das funções reais contínuas definidas no intervalo $[a,b]$ e, analogamente, $C^1[a,b]$ denota o espaço das funções diferenciáveis cujas derivadas são contínuas em $[a,b]$, uma vez que $C^0[a,b] \subset R[a,b]$, segue-se do teorema fundamental do cálculo, que $\mathrm{I} := \Psi|_{C^0[a,b]} : C^0[a,b] \to C^1[a,b]$, pois

$$\frac{d}{dt}\left(\Psi(f)(t)\right) = f(t), \text{ para toda } f \in C^0[a,b].$$

Portanto, é claro que se $f \in C^0[a,b]$ então $\Psi(f) \in C^1[a,b]$. Com isso em mente, vemos que a aplicação $d/dt : C^1[a,b] \to C^0[a,b]$ é uma inversa à esquerda de I. Porém, se $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ e $f \in C^1[a,b]$, temos que

$$f' = \frac{d}{dt}(f+k) = \frac{d(f)}{dt}.$$

Contudo, novamente pelo teorema fundamental do cálculo,

$$\mathrm{I}(f')(t) = f(t) - f(a).$$

Daí, $\mathrm{I}(f') \neq f + k$, se $k \neq -f(a)$ e assim, I não é inversa à esquerda de d/dt. Na verdade, isto ocorre devido ao fato de d/dt não ser injetiva, a saber d/dt é linear e

$$\ker\left(\frac{d}{dt}\right) = \{f \in C^1[a,b];\ f \text{ é constante}\}.$$

Todavia, pelo teorema dos isomorfismos, a aplicação

$$\overline{\tfrac{d}{dt}} : C^1[a,b]/\ker\left(\tfrac{d}{dt}\right) \quad \longrightarrow \quad C^0[a,b]$$

dada por $\overline{\frac{d}{dt}}(\,\overline{f}\,) = \frac{d}{dt}(f)$ é um isomorfismo, já que d/dt é sobrejetiva, pois tem inversa à direita.

Em outras palavras, definimos no espaço $C^1[a,b]$ uma relação de equivalência declarando que duas funções são equivalentes quando possuem a mesma derivada. Isto nos leva ao diagrama

$$\begin{tikzcd} C^1[a,b] \arrow[r, "\frac{d}{dt}"] \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowright"] & C^0[a,b] \\ \frac{C^1[a,b]}{\ker\left(\frac{d}{dt}\right)} \arrow[ur, "\overline{\frac{d}{dt}}"'] & \end{tikzcd}$$

do qual nos permite estabelecer as restrições que tornam os processos de integração e derivação o inverso um do outro.

Encontra-se no argumento acima a essência da utilidade do espaço quociente. Ele mostra que, mesmo que d/dt não tenha inversa, podemos construir, de maneira natural, um isomorfismo à partir de d/dt, no caso, a aplicação $\overline{\frac{d}{dt}}$.

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho revisitamos a relação que envolve os dois conceitos matemáticos fundamentais ao cálculo, derivação e integração. Por isso, o protagonista dessa relação denominou-se teorema fundamental do cálculo. Vimos a importância deste teorema, que foi provado independentemente por Newton e Leibniz no século XVII, bem como a esplendida participação do isomorfismo entre os espaços $C^1[a,b]/\ker\left(\frac{d}{dt}\right)$ e $C^0[a,b]$, resultando assim na unificação desses conceitos.

REFERÊNCIAS

[1] T. M. Apostol, *Calculus. Vol. I. , One-variable calculus, with an introduction to linear algebra.* J. Wiley & Sons, 1967.

[2] M. Weir, J. Hass, F. Giordano, and G. Thomas, *Thomas Calculus: Early Transcendentals.* Pearson International Edition, Pearson Addison-Wesley, 2008.

[3] H. P. Bueno, *Álgebra Linear Um Segundo Curso.* Coleção Textos Universitários, 2006.