O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON E AS FUNÇÕES POLINOMIAIS DO TERCEIRO GRAU

João Francisco Silva Filho
ICEN-Unilab
joaofilho@unilab.edu.br

Odete Elana Sousa Pereira
ICEN-Unilab
odetelana@hotmail.com

RESUMO

O método de Newton-Raphson é um importante método numérico iterativo, usado para obter aproximações decimais de raízes de funções reais deriváveis, sob condições apropriadas, podendo ser estendido às funções complexas holomorfas, bem como às funções reais de várias variáveis. Basicamente, este método consiste na linearização da função a partir da sua derivada, o que nos conduz à construção de uma sequência recorrente que deverá convergir para uma das raízes. Convém ressaltar que o método de Newton-Raphson não fornece informação precisa sobre o valor inicial a ser escolhido para construir a sequência, apenas nos garante a existência de uma vizinhança da raiz, na qual a convergência ocorre para valores iniciais a ela pertencentes. Nesta perspectiva, estudaremos a convergência do método de Newton-Raphson aplicado às funções polinomiais do terceiro grau (ou *funções polinomiais cúbicas*), obtendo condições sobre o valor inicial que garantam a convergência da sequência fornecida pelo referido método.

ABSTRACT

The Newton-Raphsons's method is an important iterative numerical method used to obtain decimal approximations of root of derivable real functions under appropriate conditions, which can be extended to holomorphic complex functions, as well as to real functions of multiple variables. More precisely, this method consists in the linearization of the function starting from its derivative, which leads us to obtain a recurrent sequence that converge to a root. It is convenient to emphasize that the Newton-Raphson's method does not provide accurate information on the initial value to be chosen in building of the sequence, it only ensure that there exists a neighborhood of the roof in which the convergence hold to all initial value picked in this neighborhood. In this sense, we will study the convergence of the Newton-Raphson's method applied to the third degree polinomial functions (or *cubics polinomial functions*), obtained conditions on the initial values that ensure the convergence of the recurrent sequence provided by the referred method.

Palavras-chave: Método de Newton-Raphson, funções polinomiais do terceiro grau, raízes.

1 INTRODUÇÃO

As soluções das equações do terceiro grau foram descobertas no século XVI, através da fórmula de Cardano-Tartaglia, publicada no livro *Ars Magna* em 1545, juntamente com a fórmula de Ludovico Ferrari (1522-1565) que determina as soluções da equação do quarto grau. Na verdade, a fórmula de Cardano-Tartaglia foi descoberta por Scipione Del Ferro (1465-1526) e redescoberta por Nicollo Fontana (1500-1557), cujo pseudônimo era Tartaglia. Além de publicar as fórmulas em seu livro, Girolamo Cardano (1501-1576) foi responsável por desenvolver o método que reduz a forma geral da equação do terceiro grau a um caso particular (chamado de *forma reduzida*), possibilitando que a fórmula inicial pudesse ser aplicada a todos os casos.

A forma geral assumida pela equação do terceiro grau é dada por

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0,$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. Dividindo a equação acima por a e fazendo a translação $x = y - b/3a$, obtemos a forma reduzida

$$y^3 + py + q = 0,$$

cujos coeficientes são expressos por

$$p = -\frac{b^2 - 3ac}{3a^2} \quad \text{e} \quad q = \frac{2b^3 + 27a^2d - 9abc}{27a^3}.$$

A fórmula de Cardano-Tartaglia fornece as soluções da equação geral, através da expressão

$$x = -\frac{b}{3a} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2}},$$

onde a constante, definida por

$$D := \left(\frac{p}{3}\right)^3 + \left(\frac{q}{2}\right)^2$$

é chamada de *discriminante*.

Observação 1.1: *O sinal do discriminante nos permite caracterizar as raízes de uma equação polinomial do terceiro grau, de modo que:*

a) Se $D < 0$, então a equação possui três raízes reais distintas.
b) Se $D > 0$, então a equação possui uma raiz real e duas raízes complexas conjugadas.
c) Se $D = 0$, então a equação possui apenas raízes reais, sendo uma de multiplicidade 2 ou 3.

Importante salientar que a fórmula de Cardano-Tartaglia não é muito prática e em alguns casos, recaímos na necessidade de utilizar a fórmula de De Moivre, bem como funções trigonométricas inversas para obter aproximações decimais das raízes. Nos deparamos com este problema, quando o discriminante da equação é negativo, ou seja, a equação possui três raízes reais e a fórmula de Cardano-Trataglia expressa cada raiz como a soma de duas raízes cúbicas de números complexos não-reais. Este caso é chamado de *irredutível*, pois ao tentarmos eliminar os radicais, chegamos em uma nova equação do terceiro grau com discriminante negativo.

Podemos contornar as dificuldades relatadas no parágrafo anterior, estudando as raízes de equações polinomiais do terceiro grau do ponto de vista variacional, utilizando funções polinomiais e métodos numéricos iterativos que baseiam-se em resultados de Análise Real. Nesta perspectiva, abordaremos o método de Newton-Raphson e a sua convergência, quando aplicado às funções polinomiais do terceiro grau. Os resultados que serão apresentados, estabelecem condições para a escolha dos valores iniciais da sequência fornecida pelo método de Newton-Raphson, de modo a minimizar a dificuldade do isolamento de raízes e garantir a convergência.

2 O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

O método de Newton-Raphson é um importante método numérico iterativo da Análise Numérica, desenvolvido, de forma independente, pelos ingleses Isaac Newton $(1643-1727)$ e Joseph Raphson (ca. $1648-$ ca. 1715). Mais precisamente, Raphson publicou o método em 1690 na obra *Analysis Aequationum Universalis*, enquanto Newton desenvolveu uma fórmula semelhante, publicada apenas em 1736 na obra *Method of Fluxions*, embora tenha sido escrita em 1671.

2.1 PRELIMINARES

Faremos aqui algumas definições preliminares relacionadas a funções reais definidas em um subconjunto não-vazio dos reais, que serão essenciais ao longo do trabalho. Estaremos pressupondo um conhecimento básico sobre Cálculo Diferencial, bem como algumas noções elementares de Análise Real.

Definição 2.1: *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e $r \in X$ um elemento que satisfaz $f(r) = 0$, então dizemos que r é uma raiz (ou zero) de f.*

Observação 2.1: *Sobre as raízes de uma função real f, devemos considerar que:*

a) O conjunto das raízes de f será denotado por $\mathbb{Z}(f)$.

b) Se f é derivável, então as raízes da sua derivada f' são chamadas de pontos críticos.

Definição 2.2: *Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real e $p \in X$ um elemento que satisfaz $f(p) = p$, então dizemos que p é um ponto fixo de f.*

Definição 2.3: *Uma função $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma contração, quando existe uma constante $0 \leq \alpha < 1$, satisfazendo*

$$|f(x) - f(y)| \leq \alpha|x - y|,$$

para todo $x, y \in X$.

Observação 2.2: *Toda contração $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua* (Ver [1] ou [2]).

Neste momento, apresentamos uma versão mais elementar do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que corresponde ao caso particular de contrações definidas sobre um subconjunto fechado dos reais.

Teorema 2.1 (Ponto fixo de Banach): Seja $f : X \subset \mathbb{R} \to X$ uma contração definida em um subconjunto fechado $X \subset \mathbb{R}$, então f possui um único ponto fixo.

Demonstração

Considerando um ponto $x_0 \in X$ arbitrário, definimos a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por

$$x_n = f^n(x_0),$$

onde f^n denota a n-ésima função iterada de f. Nestas condições, segue-se que

$$\begin{array}{rcl} |x_n - x_{n+1}| & = & |f(x_{n-1}) - f(x_n)| \\ & \leq & \alpha|x_{n-1} - x_n| = \alpha|f(x_{n-2}) - f(x_{n-1})| \\ & \leq & \alpha^2|x_{n-2} - x_{n-1}| = \alpha^2|f(x_{n-3}) - f(x_{n-2})| \\ & \vdots & \qquad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \\ & \leq & \alpha^{n-1}|x_1 - x_2| = \alpha^{n-1}|f(x_0) - f(x_1)| \\ & \leq & \alpha^n|x_0 - x_1|, \end{array}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Dados $m, n \in \mathbb{N}$, deduzimos da última desigualdade que

$$\begin{array}{rcl} |x_n - x_{n+m}| & \leq & |x_n - x_{n+1}| + |x_{n+1} - x_{n+2}| + \cdots + |x_{n+m-1} - x_{n+m}| \\ & \leq & (\alpha^n + \alpha^{n+1} + \cdots + \alpha^{n+m-1})|x_0 - x_1| \\ & = & \dfrac{\alpha^n(1-\alpha^m)}{1-\alpha}|x_0 - x_1| < \dfrac{\alpha^n}{1-\alpha}|x_0 - x_1|, \end{array}$$

mas $\alpha^n \to 0$ para $n \to \infty$, logo $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy. Desde que toda sequência de Cauchy de números reais é convergente e X é fechado, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para um ponto $p \in X$.

Lembrando que toda contração é uma função contínua, temos que

$$f(p) = f(\lim x_n) = \lim f(x_n) = \lim x_{n+1} = p,$$

ou seja, p é um ponto fixo de f. Supondo ainda que $p, q \in X$ são pontos fixos de f, obtemos

$$|p - q| = |f(p) - f(q)| \leq \alpha|p - q|,$$

portanto $|p - q| = 0$, implicando que $p = q$ e concluindo a unicidade. ■

Observação 2.3: *Uma versão mais geral do Teorema do Ponto Fixo de Banach, que trata de contrações definidas sobre espaços métricos completos, pode ser encontrada em* [2].

Como consequência do Teorema do ponto fixo de Banach, podemos deduzir o método de Newton-Raphson para funções reais de classe C^2, conforme descrito no corolário a seguir.

Corolário 2.1: Sejam $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de classe C^2 definida em um subconjunto aberto e $r \in X$ uma raiz real de f. Suponha que r não é ponto crítico de f, então existe um intervalo $J = (r - \delta, r + \delta) \subset X$, tal que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k \in J, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

converge para $r \in X$.

Demonstração

Desde que f é contínua e $f'(r)$ não-nulo, então existe um intervalo aberto $I \subset X$ centrado em $r \in X$, onde f' não se anula. Nestas condições, definimos uma função $F : I \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

cuja derivada é dada por

$$F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

para todo $x \in I$.

Observe que $F'(r) = 0$ e F' é contínua, daí fixamos uma constante real $\alpha \in (0, 1)$ para obter $\delta > 0$, de modo que $J = [r - \delta, r + \delta] \subset I$ e além disso

$$|F'(x)| = |F'(x) - F'(r)| \leq \alpha < 1,$$

para todo $x \in J$. Recorrendo ao Teorema do valor médio, podemos afirmar que se $x \in J$, então

$$|F(x) - F(r)| \leq \alpha|x - r| \leq \delta,$$

implicando que $F(x) \in J$ e que $F|_J : J \to J$ é uma contração.

Usando o Teorema do ponto fixo de Banach, temos para todo $k \in J$ que

$$x_{n+1} = \begin{cases} k \in J, \text{ se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

converge para um ponto $p \in J$, que é o único ponto fixo de $F|_J$. Por outro lado, observe que

$$F(r) = r - \frac{f(r)}{f'(r)} = r,$$

então $r \in J$ é um ponto fixo de $F|_J$. Devido à unicidade do ponto fixo, obtemos a igualdade $r = p$, donde concluímos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para $r \in J$.

■

Observação 2.4: *Sobre o método de Newton-Raphson, fazemos as seguintes considerações:*

a) Sempre que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é convergente, esta sequência converge para uma raiz de f.

b) A interpretação geométrica do método de Newton-Raphson pode ser conferida em [1], [3] *e* [4]

3 CONVERGÊNCIA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Nesta última seção, apresentamos os lemas-chave e os resultados principais do nosso trabalho, os quais estabelecem condições que garantem a convergência do método de Newton-Raphson, quando aplicado às funções polinomiais reais do terceiro grau. Devemos lembrar que estas funções polinomiais sempre admitem raízes, conforme podemos conferir nas referências [5], [6] ou no Exemplo 6.25 de [7], portanto estaremos admitindo este fato ao longo da demonstração dos resultados.

3.1 LEMAS-CHAVE

Fazendo analogia aos polinômios, definimos função polinomial e introduzimos outros elementos relacionados a esta estrutura algébrica.

Definição 3.1: *Dizemos que uma função* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *é polinomial, quando existem* $a_0, a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$*, tais que*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0,$$

para todo $x \in \mathbb{R}$*.*

Observação 3.1: *Se o coeficiente* a_n *for não-nulo, então* f *será dita polinomial de grau* n*.*

Podemos estimar as raízes de uma função polinomial, explicitando um intervalo centrado na origem que contém todas as suas raízes.

Lema 3.1 (Cauchy)**:** *Seja* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função polinomial de grau* n*, dada por*

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0,$$

então suas raízes reais pertencem ao intervalo $[-\rho, \rho] \subset \mathbb{R}$*, onde* $\rho = 1 + |a_n|^{-1} \max\{|a_i|\}_{i=1}^{n-1}$*.*

Demonstração

Dado $x \in \mathbb{R} \setminus [-\rho, \rho]$ arbitrário, temos que

$$|x| > 1 + \frac{1}{|a_n|} \max\{|a_i|\}_{i=1}^{n-1},$$

consequentemente,

$$0 < (|x| - 1)(|x|^{n-1} + \cdots + |x| + 1) = |x|^n - 1 < |x|^n. \tag{1}$$

Por outro lado, decorre da desigualdade triangular que

$$\begin{aligned} |f(x)| &= |a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0| \\ &\geq |a_n||x|^n - (|a_{n-1}|x|^{n-1} + \cdots + |a_1||x| + |a_0|) \\ &\geq |a_n||x|^n - \max\{|a_i|\}_{i=1}^{n-1}(|x|^{n-1} + \cdots + |x| + 1), \end{aligned}$$

então combinando com a desigualdade (1), tem-se

$$\begin{aligned} (|x| - 1)|f(x)| &> [|a_n|(|x| - 1) - \max\{|a_i|\}_{i=1}^{n-1}]|x|^n, \\ &= |a_n| \left[|x| - \left(1 + \frac{1}{|a_n|} \max\{|a_i|\}_{i=1}^{n-1} \right) \right] |x|^n > 0, \end{aligned}$$

implicando que $f(x)$ é não-nulo e como x foi tomado arbitrariamente, concluímos que as raízes de f pertencem ao intervalo $[-\rho, \rho] \subset \mathbb{R}$.

■

Dando continuidade, introduzimos a definição de multiplicidade de raízes de funções polinomiais, que fundamenta-se no algoritmo da divisão de polinômios, conforme esclarecido em [8].

Definição 3.2: *Sejam* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função polinomial e* $r \in \mathbb{R}$ *uma raiz de* f*, então dizemos que* r *tem multiplicidade* $m \in \mathbb{N}$*, quando* f *pode ser escrita na forma*

$$f(x) = (x - r)^m g(x),$$

onde g *é uma função polinomial de grau* $n - m$*, tal que* $g(r)$ *é não-nulo. Dizemos ainda que* $r \in \mathbb{R}$ *é uma raiz simples, quando possui multiplicidade* $m = 1$*.*

Os lemas que serão apresentados na sequência, tratam do caso particular de funções polinomiais do terceiro grau e serão usados na demonstração dos resultados principais.

Lema 3.2: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do terceiro grau cuja soma das multiplicidades das raízes é igual a 3. Se um elemento $x \in \mathbb{R}$ satisfaz $f(x)f'(x) \leq 0$, então*

$$r_1 \leq x \leq r_3, \tag{2}$$

onde r_1 e r_3 denotam a menor e a maior raiz de f, respectivamente.

Demonstração

Usando o algoritmo da divisão de polinômios, podemos escrever

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), \tag{3}$$

onde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ são raízes de f, tais que $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Derivando a igualdade (3), obtemos

$$f'(x) = a[(x - r_1)(x - r_2) + (x - r_1)(x - r_3) + (x - r_2)(x - r_3)],$$

como expressão da derivada de f.

Definindo a função polinomial $h = \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por $h := af$, vamos supor por absurdo que $x \in \mathbb{R}$ não satisfaz a desigualdade (2). Nestas condições, passamos a analisar os seguintes casos:

1º Caso: $x > r_3$

Desde que $r_1 \leq r_2 \leq r_3$, segue-se que

$$h(x) = af(x) = a^2(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3) > 0,$$

pois estamos com um produto de parcelas positivas. Da expressão de h obtida acima, tem-se

$$h'(x) = af'(x) = a^2[(x - r_1)(x - r_2) + (x - r_1)(x - r_3) + (x - r_2)(x - r_3)],$$

implicando que $h'(x) > 0$, já que temos uma soma de parcelas positivas. Por fim, observe que

$$a^2 f(x)f'(x) = h(x)h'(x) > 0,$$

portanto $f(x)f'(x) > 0$, chegando a um absurdo.

2º Caso: $x < r_1$

De modo análogo ao caso anterior, obtemos $h(x), h'(x) > 0$ e por conseguinte

$$a^2 f(x)f'(x) = h(x)h'(x) > 0,$$

logo $f(x)f'(x) > 0$ e mais uma vez, chegamos a uma contradição. ■

Lema 3.3: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do terceiro grau, dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, que possui apenas uma raiz $r \in \mathbb{R}$. Se $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função definida por $h := af$, valem as afirmações:*

a) Se $r \leq -b/3a$, então h' é positiva sobre o intervalo $(-\infty, r)$.
b) Se $r \geq -b/3a$, então h' é positiva sobre o intervalo $(r, +\infty)$.

Demonstração

Faremos a demonstração em duas partes, conforme descrevemos a seguir:

1ª Parte: Provar que r não pode estar localizada entre dois pontos críticos.

Suponha por absurdo que f admite pontos críticos $s_1, s_2 \in \mathbb{R}$ com $s_1 < r < s_2$, então $f'(r)$ é não-nulo, pois f' possui no máximo duas raízes. Por outro lado, podemos escrever

$$f(x) = (x - r)g(x)$$

consequentemente,

$$f'(x) = (x - r)g'(x) + g(x),$$

daí obtemos $g(r) = f'(r) \neq 0$, portanto r é uma raiz simples e g é positiva ou negativa.

Desde que $h(x) = af(x)$, segue-se que

$$h(x) = a(x - r)g(x),$$

mas como g é positiva ou negativa, então $ag(x)$ é sempre positivo e assim

$$h(s_2) = a(s_2 - r)g(s_2) > 0. \tag{4}$$

Novamente usando o algoritmo da divisão, escrevemos

$$h'(x) = 3a^2(x - s_1)(x - s_2),$$

portanto h' é negativa em (s_1, s_2). Em particular, h é decrescente em (r, s_2), implicando que

$$h(s_2) < h(r) = 0$$

contradizendo a desigualdade (4).

2ª Parte: Prova dos itens a) e b).

a) Observe que se f' não possui raízes, então a afirmação constante neste item será trivalmente satisfeita. Caso contrário, podemos escrever h' na forma

$$h'(x) = 3a^2(x - s_1)(x - s_2), \tag{5}$$

onde s_1 e s_2 são raízes de f' com $s_1 \leq s_2$. Aplicando a primeira relação de Girard (soma de raízes) às raízes de f', obtemos

$$r \leq -\frac{b}{3a} = \frac{1}{2}(s_1 + s_2) \leq s_2$$

implicando pela 1ª Parte da prova que $r \leq s_1 \leq s_2$. Finalmente, usamos a igualdade (5) para concluir que h' é positiva no intervalo $(-\infty, r)$.

b) Basta proceder de modo similar à prova do primeiro item, ou alternativamente, aplicar a conclusão obtida no primeiro item, à função $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\tilde{f}(x) = f(-x)$. ■

3.2 RESULTADOS PRINCIPAIS

Nosso primeiro teorema fornece condições que garantem a convergência monótona do método de Newton-Raphson para funções polinomiais do terceiro grau, cuja soma das multiplicidades das raízes é igual a 3.

Teorema 3.1: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do terceiro grau cuja soma das multiplicidades das raízes é igual a 3. Suponha que r_1 e r_3 denotam a menor e a maior raiz de f, respectivamente, então a sequência*

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

está bem definida para todo $k \in \mathbb{R} \setminus [r_1, r_3]$. Além disso, valem as seguintes afirmações:

a) Se $k < r_1$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e converge para r_1.
b) Se $k > r_3$, então $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e converge para r_3.

Para aplicar o Teorema 3.1, precisamos conhecer alguma estimativa (inferior ou superior) das raízes da função. Por este motivo, deduzimos a partir deste teorema, um corolário que dispensa o conhecimento de qualquer estimativa.

Corolário 3.1: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do terceiro grau, dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, cuja soma das multiplicidades das raízes é igual a 3. Suponha que $k \in \mathbb{R}$ é uma constante satisfazendo*

$$|3ak + b| > 2\sqrt{b^2 - 3ac},$$

então a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

está bem definida e converge monotonamente para uma raíz de f.

Para identificar se a soma das multiplicidades das raízes de uma função polinomal do terceiro grau é igual a 3, basta verificar se o discriminante definido na Observação 1.1 é não-positivo. Apresentamos aqui um exemplo que ilustra este procedimento e aplica os dois resultados anteriormente enunciados.

Exemplo 1: Calcular aproximações das raízes da função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do terceiro grau, definida por $f(x) = 8x^3 - 6x + 1$.

Solução: Por um cálculo direto, obtemos o discriminante $D = -3/256 < 0$, então a Observação 1.1 garante que a soma das multiplicidades das raízes é igual a 3. Usando o método de Newton-Raphson, devemos construir uma sequência que convirja para uma raiz real, definida por

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

ou ainda,

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ \dfrac{16x_n^3 - 1}{24x_n^2 - 6}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases},$$

onde $k \in \mathbb{R}$ é uma constante a saber.

Segundo o Corolário 3.1, basta tomar uma constante $k \in \mathbb{R}$ que satisfaz

$$|3ak + b| > 2\sqrt{b^2 - 3ac},$$

mas como $a = 8$, $b = 0$, $c = -6$ e $d = 1$, segue-se que a desigualdade acima equivale a termos

$$|k| > 1,$$

portanto podemos escolher $k = 1,5$, obtendo as aproximações

$x_1 = 1,104166\ldots;$ $x_2 = 0,882998\ldots;$ $x_3 = 0,787839\ldots;$ $x_4 = 0,767044\ldots;$
$x_5 = 0,766046\ldots;$ $x_6 = 0,766044\ldots$ e $x_7 = 0,766044\ldots,$

ou seja, uma das raízes reais de f é aproximadamente $r_3 \simeq 0,76604$.

De modo análogo, escolhemos $k = -1,5$ e obtemos

$$r_1 \simeq -0,93969,$$

daí basta lembrar que a primeira relação de Girard (soma de raízes) nos fornece a igualdade

$$r_1 + r_2 + r_3 = -\frac{b}{a} = 0,$$

então as aproximações obtidas para r_1 e r_3 nos permitem obter a estimativa

$$r_2 \simeq 0,17365,$$

concluindo a solução.

Observação 3.2: *Os valores iniciais $k = \pm 1/2$ são exemplos de que nem sempre é possível gerar a sequência fornecida pelo método de Newton-Raphson.*

Nosso último teorema considera o caso em que a função polinomial do terceiro grau possui apenas uma raiz.

Teorema 3.2: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do terceiro grau que possui apenas uma raiz $r \in \mathbb{R}$, então a sequência*

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

está bem definida e converge monotonamente para $r \in \mathbb{R}$, em pelo menos um dos casos:

a) Para todo valor inicial $k < r$.
b) Para todo valor inicial $k > r$.

Dependemos do conhecimento de alguma estimativa (inferior ou superior) da raiz da função para podermos aplicar o Teorema 3.2. Procurando contornar este inconveniente, combinamos o Lema 3.1 com os Teorema 3.1 e 3.2 para obter mais um corolário.

Corolário 3.2: *Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial do terceiro grau, dada por $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, onde $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Suponha que $\rho := 1 + |a|^{-1} max\{|b|, |c|, |d|\}$, então a sequência*

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, & \text{se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, & \text{se } n \geq 1 \end{cases}$$

está bem definida e converge para uma raiz de f, em pelo menos um dos casos:

a) Para todo valor inicial $k < -\rho$.
b) Para todo valor inicial $k > \rho$.

Para saber quando é possível aplicar o Teorema 3.2 a uma função polinomal do terceiro grau, basta verificar se o discriminante definido na Observação 1.1 é positivo, pois isto garante que a função possui apenas uma raiz. Na sequência, vamos apresentar mais um exemplo, no qual descrevemos este procedimento e aplicamos o Teorema 3.2.

Exemplo 2: Calcular aproximações das raízes da função polinomial $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ do terceiro grau, definida por $f(x) = x^3 - 2x + 2$.

Solução: Calculando o discriminante, temos que $D = 19/27 > 0$ e portanto, segue da Observação 1.1 que f possui apenas uma raiz $r \in \mathbb{R}$. Usando o Teorema do valor intermediário e a desigualdade

$$f(-2)f(-1) = -6 < 0,$$

obtemos que $r \in (-2, -1)$. Como os pontos críticos $s_{1,2} = \pm\sqrt{6}/3$ de f são maiores que sua raiz, então o Teorema 3.2 nos garante que a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} k, \text{ se } n = 0 \\ x_n - \dfrac{f(x_n)}{f'(x_n)}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases}$$

converge sempre que $k \leq -2$.

Nestas circunstância, podemos tomar $k = -2$ e obter a sequência

$$x_{n+1} = \begin{cases} -2, \text{ se } n = 0 \\ \dfrac{2x_n^2 - 2}{3x_n^2 - 2}, \text{ se } n \geq 1 \end{cases},$$

que nos fornece as aproximações

$x_1 = -2$; $x_2 = -1,8$; $x_3 = -1,769948\ldots$;
$x_4 = -1,769292\ldots$ e $x_5 = -1,769292\ldots$,

donde concluímos que a raiz de f é aproximadamente

$$r \simeq -1,769292.$$

Observação 3.3: *Se escolhermos $k = 0$ ou $k = 1$ como valor inicial, então a sequência fornecida pelo método de Newton-Raphson será alternada e portanto não-convergente.*

Observação 3.4: *O algoritmo da divisão de polinômios juntamente com a Observação 1.1, nos garantem que a soma das multiplicidades das raízes de uma função polinomial real do terceiro grau será 1 ou 3, ou seja, os teoremas apresentados nesta seção contemplam todos os casos possíveis.*

4 Demonstração dos Teoremas

4.1 Demonstração do Teorema 3.1

Sabendo que a soma das multiplicidades das raízes é igual a 3, usamos o algoritmo da divisão de polinômios para escrever f na forma

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3), \tag{6}$$

onde $r_1, r_2, r_3 \in \mathbb{R}$ são raízes de f com $r_1 \leq r_2 \leq r_3$. Derivando a igualdade acima, obtemos

$$f'(x) = a[(x - r_1)(x - r_2) + (x - r_1)(x - r_3) + (x - r_2)(x - r_3)] \tag{7}$$

como expressão da derivada de f.

Observe que o Lema 3.2 nos permite definir a função $F : \mathbb{R} \setminus [r_1, r_3] \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

então decorre das expressões (6) e (7) que

$$x - F(x) = \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)}{(x-r_1)(x-r_2)+(x-r_1)(x-r_3)+(x-r_2)(x-r_3)}, \tag{8}$$

para todo $x \in \mathbb{R} \setminus [r_1, r_3]$.

Depois de feitas as primeiras considerações, passamos a tratar separadamente, cada um dos itens enunciados:

(a) Dado um número real $x \in (-\infty, r_1)$ arbitrário, tem-se que

$$F(x) - r_1 = (x - r_1) - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

daí substituimos (8) na igualdade acima, obtendo

$$F(x) - r_1 = \frac{[(x-r_2)+(x-r_3)](x-r_1)^2}{(x-r_1)(x-r_2)+(x-r_1)(x-r_3)+(x-r_2)(x-r_3)} < 0, \tag{9}$$

onde usamos que r_1 é a menor raiz de f.

Por outro lado, decorre ainda da identidade (8) que

$$x - F(x) = \frac{(x-r_1)(x-r_2)(x-r_3)}{(x-r_1)(x-r_2)+(x-r_1)(x-r_3)+(x-r_2)(x-r_3)} < 0, \tag{10}$$

mas como x foi tomado arbitrariamente, obtemos por (9) e (10) que

$$x < F(x) < r_1,$$

para todo $x \in (-\infty, r_1)$.

Agora escolhemos $x_1 = k < r_1$ arbitrário e usamos o Lema 3.2 para garantir que $F(x_1)$ está bem definido. Da desigualdade anterior, segue-se que

$$k = x_1 < F(x_1) = x_2 < r_1,$$

daí por hipótese de indução, vamos supor que x_n está bem definido e satisfaz

$$k \leq x_n < r_1,$$

para algum $n \geq 1$. Repetimos o mesmo argumento anterior para assegurar a boa definição de $F(x_n)$, bem como a desigualdade

$$k \leq x_n < F(x_n) = x_{n+1} < r_1,$$

então por indução, temos que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bem definida e a última desigualdade é válida, para todo $n \in \mathbb{N}$. Desta forma, podemos concluir que a sequência é monótona crescente e limitada, portanto convergente, implicando pela Observação 2.4 que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para r_1.

(b) Basta proceder de modo análogo ao primeiro caso, ou simplesmente, aplicar as conclusões obtidas no primeiro caso à função $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\tilde{f}(x) = f(-x)$.

$\blacksquare$

4.2 DEMONSTRAÇÃO DO COROLÁRIO 3.1

Desenvolvendo a expansão de Taylor de f em torno de uma raiz $r \in \mathbb{R}$, podemos escrever

$$f(x) = f(r) + f'(r)(x-r) + \frac{1}{2}f''(r)(x-r)^2 + \frac{1}{6}f'''(r)(x-r)^3,$$

ou ainda,

$$f(x) = \frac{1}{6}(x-r)[6f'(r) + 3f''(r)(x-r) + f'''(r)(x-r)^2],$$

mas como a soma das multiplicidades das raízes de f é igual a 3, então a equação quadrática

$$f'''(r)y^2 + 3f''(r)y + 6f'(r) = 0,$$

possui raízes reais e portanto seu discriminante será não-negativo.

Sabendo que o discriminante é não-negativo, tem-se que

$$\begin{aligned} \Delta &= 9f''(r)^2 - 24f'(r)f'''(r) \\ &= -36[3a^2r^2 + 2abr - (b^2 - 4ac)] \geq 0, \end{aligned}$$

implicando que

$$-\frac{b}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}} \leq r \leq -\frac{b}{3a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}},$$

portanto a desigualdade acima fornece uma estimativa para as raízes de f.

Desde que o valor inicial k satisfaz

$$|3ak + b| > 2\sqrt{b^2 - 3ac},$$

segue-se que

$$k < -\frac{b}{3a} - \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}} \quad \text{ou} \quad k > -\frac{b}{3a} + \frac{2}{3}\sqrt{\frac{b^2-3ac}{a^2}},$$

daí o resultado decorre diretamente do Teorema 3.1.

■

4.3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 3.2

Sendo $r \in \mathbb{R}$ a única raiz de f, então segue da Observação 3.4 que a multiplicidade deve ser 1 ou 3, mas no caso de multiplicidade 3, tem-se o Teorema 3.2 como consequência do Teorema 3.1. Desta forma, podemos supor que r é uma raiz simples (multiplicidade 1), daí dividimos a prova em dois casos:

1º Caso: $r \leq -b/3a$.

Decorre do Lema 3.3 que podemos definir a função $F : (-\infty, r) \to \mathbb{R}$ por

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

pois f' não se anula em $(-\infty, r)$. Escrevendo f na forma $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$, obtemos ainda

$$F(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}. \tag{11}$$

onde $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é a função dada por $h(x) = af(x)$.

Desde que $r \leq -b/3a$, temos pelo Lema 3.3 que a derivada da função h é positiva sobre $(-\infty, r)$, logo h é crescente neste intervalo. De outra maneira, podemos afirmar que

$$h(x) < h(r) = 0$$

para todo $x \in (-\infty, r)$. Da igualdade (11) e das considerações acima, obtemos ainda

$$x - F(x) = \frac{h(x)}{h'(x)} < 0,$$

ou simplesmente,

$$x < F(x), \tag{12}$$

para todo $x \in (-\infty, r)$.

Lembrando que r é uma raiz simples e usando o algoritmo da divisão de polinômios, escrevemos

$$f(x) = (x - r)g(x), \tag{13}$$

onde g é positiva ou negativa. Derivando a igualdade acima, tem-se a expressão

$$f'(x) = (x - r)g'(x) + g(x),$$

portanto $f'(r) = g(r) \neq 0$, já que r é uma raiz simples.

Considerando a função $H : (-\infty, r) \to \mathbb{R}$, dada por

$$H(x) = F(x) - r, \tag{14}$$

obtemos

$$H'(x) = F'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{f'(x)^2},$$

ou ainda,

$$H'(x) = \frac{6a(x - r)(x + b/3a)g(x)}{f'(x)^2}, \tag{15}$$

onde usamos a igualdade (13), bem como a expressão $f''(x) = 6ax + 2b$.

Observe que $ag(x)$ é sempre positivo e $r \leq -b/3a$, então segue-se da expressão (15) que

$$H'(x) > 0.$$

para todo $x \in (-\infty, r)$. Em particular, tem-se que H é crescente e consequentemente

$$H(x) < \lim_{x \to r} H(x) = \lim_{x \to r} \left[(x - r) - \frac{f(x)}{f'(x)} \right] = 0,$$

daí combinamos com (12) e (14), chegamos na desigualdade

$$x < F(x) < r,$$

para todo $x \in (-\infty, r)$.

Agora tomando $x_1 = k < r_1$ arbitrário e usando o Lema 3.3, podemos afirmar que $F(x_1)$ está bem definido. Da desigualdade anterior, temos que

$$k = x_1 < F(x_1) = x_2 < r,$$

então por hipótese de indução, supomos que x_n está bem definido e satisfaz

$$k \leq x_n < r,$$

para algum $n \geq 1$. Procedendo com o mesmo argumento acima, garantimos a boa definição de $F(x_n)$, bem como a desigualdade

$$k \leq x_n < F(x_n) = x_{n+1} < r,$$

daí por indução, segue-se que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ está bem definida e a última desigualdade é válida, para todo $n \in \mathbb{N}$. Por fim, observe que esta sequência é crescente e limitada, portanto convergente, implicando que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge para a raiz r, conclusão que corresponde ao item a).

2º Caso: $r > -b/3a$.

Basta proceder de modo análogo ao primeiro caso, ou alternativamente, aplicar as conclusões obtidas no primeiro caso à função $\tilde{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $\tilde{f}(x) = f(-x)$, para chegar à conclusão que a sequência $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é decrescente e converge para a raiz r, sempre que o valor inicial satisfaz $k > r$, conclusão que corresponde ao item b).

■

4.4 DEMONSTRAÇÃO DO COROLÁRIO 3.2

Decorre diretamente do Lema 3.1 que

$$|r| \leq 1 + |a|^{-1} max\{|b|, |c|, |d|\},$$

daí basta usar os Teoremas 3.1 e 3.2 para concluir o resultado.

■

REFERÊNCIAS

[1] E. L. Lima, *Análise Real - Volume 1*. Rio de Janeiro: IMPA - 11 ed., 2012.

[2] C. R. Oliveira, *Introdução à Análise Funcional*. Rio de Janeiro: IMPA - 2 ed., 2008.

[3] M. S. e. T. C. C. Amaral, "Um estudo do método de newton raphson," *Matemática e Estatística em Foco*, vol. 3, pp. 65–72, 2015.

[4] V. L. L. e M. A. G. Ruggiero, *Cálculo Numérico: Aspectos Numéricos e Computacionais*. São Paulo: Makron Books - 2 ed., 1996.

[5] E. L. Lima, "Equação do terceiro grau," *Matemática Universitária*, vol. 5, pp. 10–23, 1987.

[6] E. E. M. Rechtschaffen, "Sobre aproximações polinomiais de raízes reais de cúbicas," *Matemática Universitária*, vol. 46, 2009.

[7] G. Ávila, *Análise Matemática*. São Paulo: Edgard Blücher - 3 ed., 2006.

[8] A. Gonçalves, *Introdução à Álgebra*. Rio de Janeiro: IMPA - 5 ed., 2013.