

EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Cláudia Helena Vieira Freitas

Universidade Federal de Uberlândia
hellena.claudia@yahoo.com.br

Dulce Mary de Almeida

Universidade Federal de Uberlândia
dulce.almeida@ufu.br

RESUMO

Este trabalho consiste num pequeno estudo do tema equivalência de áreas. Propõe problemas e soluções relacionados ao tópico; explora algumas proposições dos *Elementos* que utilizam esta técnica; investiga diversas demonstrações do Teorema de Pitágoras, como por exemplo: a de Euclides, Bhaskara, Pappus, George Polya entre outras; e apresenta os problemas da quadratura de uma parábola, das lúnulas de Hipócrates e do círculo.

ABSTRACT

This work is a simple study about equivalence of areas. It proposes problems and their solutions related to this topic; explores some propositions of the Euclid's *Elements* using this technique; investigates various demonstrations of the Pythagorean Theorem such as the one from Euclid, Bhaskara, Pappus, George Polya among others; and studies the problems of quadrature of parable, of the Hippocrates's lunulas and of the circle.

Palavras-chave: Equivalência de áreas; Teorema de Pitágoras; Quadratura da parábola; Lúnulas de Hipócrates; Quadratura do círculo.

1 INTRODUÇÃO

A equivalência de áreas foi uma ferramenta utilizada por Euclides na elaboração de muitos de seus teoremas; em especial motivou um dos três problemas clássicos da Grécia Antiga: o problema da quadratura do círculo, que muito contribuiu para o desenvolvimento da Matemática. Nosso trabalho consiste num pequeno e modesto estudo sobre esse tema.

No primeiro capítulo estabelecemos definições e conceitos preliminares. Apresentamos as definições e métodos de construções da média geométrica, da 3ª e 4ª proporcionais, bem como a definição geral de área para regiões limitadas do plano e também alguns fatos geométricos relacionados.

No segundo capítulo exploramos algumas proposições dos *Elementos* que utilizam a técnica de equivalência de áreas. Em particular, apresentamos a construção geométrica da solução da equação algébrica $ax = bc$.

No Capítulo 3 estudamos o Teorema de Pitágoras, considerado um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos. Apresentamos algumas demonstrações desse Teorema classificadas como demonstrações geométricas, em especial exibimos a generalização do Teorema de Pitágoras devida a George Polya.

No Capítulo 4 abordamos alguns problemas e soluções relacionados à equivalência de áreas, os quais são exercícios propostos em [1]

Finalmente, no Capítulo 5 encontra-se a contribuição mais significativa do nosso trabalho. Inicialmente estudamos o problema da quadratura de polígonos em geral e depois analisamos a solução dada por Arquimedes para o problema da quadratura de um arco de parábola. Em seguida estudamos o problema da quadratura das lúnulas de Hipócrates, problema este que certamente derivou do problema da quadratura do círculo. Apresentamos em detalhes a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilínea da História da Matemática e exibimos também as construções geométricas, segundo a metodologia régua-compasso, das lúnulas quadráveis e das soluções de quadratura propostas por Hipócrates. Encerramos o capítulo apresentando duas soluções do problema da quadratura do círculo apresentadas por matemáticos da Grécia antiga, claro que utilizando métodos não restritos, isto é, com o auxílio de outras curvas supostamente já traçadas, além das retas e circunferências, assim como utilizando o deslizamento da régua. Descrevemos a contribuição de Hípias de Elis através da curva trissectriz (ou quadratriz) cujo processo é descrito via cinemática, e também a solução dada por Arquimedes de Siracusa através da espiral que leva seu nome (Espirais de Arquimedes).

Vale destacar que o programa de Geometria dinâmica CABRI-Géomètre II desempenhou um papel fundamental na elaboração desse trabalho, quer seja na ilustração das figuras, quer seja na elaboração das construções geométricas ou no estudo das soluções dos problemas, permitindo a manipulação das variáveis envolvidas no processo, bem como a pré-investigação e confirmação dos resultados. Informamos também que no decorrer do trabalho fornecemos ao leitor diversos fatos históricos relevantes e relacionados aos temas abordados.

2 CONCEITOS PRELIMINARES

2.1 CONSTRUÇÕES GEOMÉTRICAS

A tradição de utilizar somente régua e compasso nas construções geométricas tem suas origens na Grécia antiga, no século V a.C., na época da descoberta da incomensurabilidade por pitagóricos. Na Grécia antiga, no tempo de Euclides de Alexandria, a palavra número sempre se referia aos inteiros positivos. Os matemáticos dessa época, na ausência de um conceito de número real e na busca de saídas alternativas para lidar com a incomensurabilidade, criaram uma álgebra totalmente geométrica, onde as grandezas eram construídas no lugar de serem calculadas ou medidas, a palavra resolver era sinônimo de construir com régua e compasso e as grandezas ao invés de serem associadas a números eram associadas a segmentos de reta.

2.1.1 MÉDIA GEOMÉTRICA

A solução do problema da quadratura de polígonos, que será abordado posteriormente, está intimamente relacionado com a construção da média geométrica entre dois segmentos.

Segundo Carl B. Boyer [2], Pitágoras de Samos, matemático grego, soube sobre as médias aritmética, geométrica e a subcontrária (mais tarde chamada harmônica) na Mesopotâmia. Aqui trataremos apenas da média geométrica.

Dados dois segmentos de comprimentos a e b , definimos a **média geométrica** entre eles como o segmento cujo comprimento é $x = \sqrt{ab}$. Para construir a média geométrica entre a e b , segundo a metodologia régua-compasso das construções geométricas, proceda como segue.

Seja \overrightarrow{AY} uma semirreta qualquer, transporte sobre ela o segmento \overline{AB} de medida a e o segmento \overline{BC} de medida b . Encontre o ponto médio de \overline{AC} e designe-o de O . Construa uma semi-circunferência com centro em O passando por A . Agora trace a perpendicular à \overrightarrow{AY} passando por B , e seja D o ponto de interseção entre a perpendicular e a semi-circunferência. O segmento \overline{BD} de medida x é a média geométrica entre os segmentos \overline{AB}

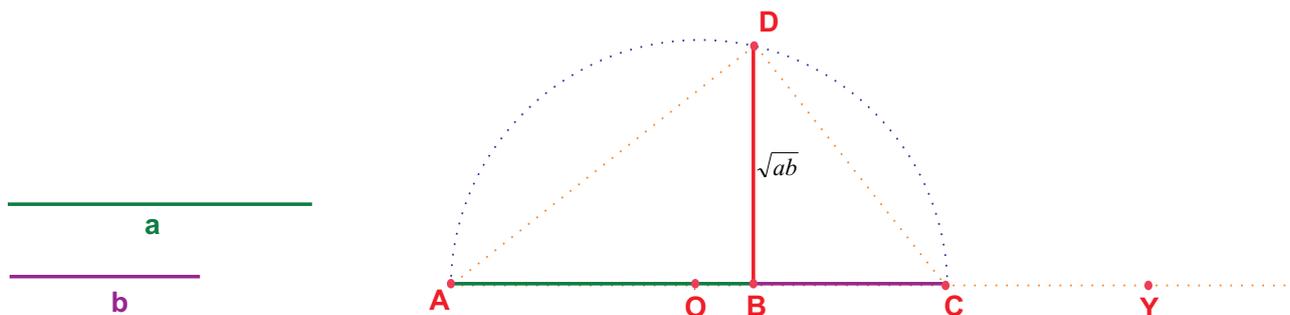


FIGURA 1: Média Geométrica

e \overline{BC} . A justificativa desta construção se resume no fato que, a altura relativa à hipotenusa de um triângulo retângulo é a média geométrica entre as projeções dos catetos sobre a hipotenusa.

2.1.2 A 3ª E A 4ª PROPORCIONAL

Definição 2.1: Dados três segmentos cujos comprimentos são a , b e c . O segmento cujo comprimento x satisfaz a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{x},$$

é denominado a quarta proporcional entre a , b e c (nessa ordem).

Construção: Dados os segmentos a , b e c vamos construir x , segundo o método régua-compasso das construções geométricas.

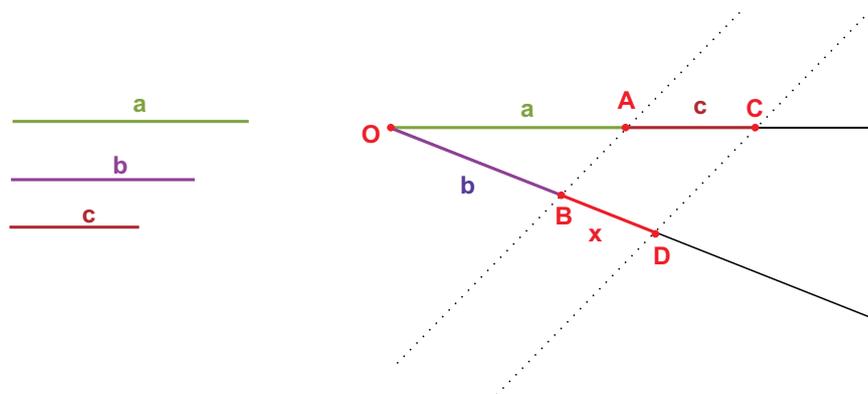


FIGURA 2: A 4ª Proporcional

Sobre um ângulo qualquer de vértice O , transporte sobre um de seus lados os pontos A e C , tais que $d(O, A) = a$ e $d(A, C) = c$ e posteriormente sobre o outro lado construa o ponto B tal que $d(O, B) = b$.

Trace uma reta passando por A e B , em seguida trace a reta paralela à \overleftrightarrow{AB} passando por C (uma construção de uma paralela a uma reta dada pode ser vista em [1]). Seja D o ponto de interseção dessa reta paralela com \overleftrightarrow{OB} .

Afirmamos que \overline{BD} é a quarta proporcional entre a , b e c . A demonstração desse fato é consequência imediata do Teorema que segue.

Teorema 2.1: (Teorema Fundamental da Proporcionalidade) Se uma reta paralela a um dos lados de um triângulo corta os outros dois lados, então ela os divide na mesma razão.

Uma demonstração desse Teorema pode ser vista em [1].

Um caso particular da 4ª proporcional é a 3ª proporcional definida conforme abaixo.

Definição 2.2: Dados dois segmentos cujos comprimentos são a e b . O segmento cujo comprimento x satisfaz a proporção

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{x}, \text{ ou } x = \frac{b^2}{a},$$

é denominado a terceira proporcional entre a e b (nessa ordem).

2.1.3 DIVISÃO DE UM SEGMENTO EM PARTES PROPORCIONAIS A NÚMEROS DADOS

Dado um segmento \overline{AB} vamos dividi-lo, em m partes congruentes. Inicialmente traçamos uma semirreta \overrightarrow{AX} tal que \overrightarrow{AX} e \overrightarrow{AB} sejam distintas.

Sobre \overrightarrow{AX} , utilizando o compasso, construa os pontos $P_0 = A, P_1, P_2, \dots, P_m$ tais que $\overline{P_0P_1} \cong \overline{P_1P_2} \cong \dots \cong \overline{P_{m-1}P_m}$. Pelos pontos P_1, P_2, \dots, P_{m-1} , trace retas paralelas à $\overline{P_mB}$, obtendo os pontos Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} em \overline{AB} .

Do Teorema Fundamental da Proporcionalidade segue que os pontos Q_1, Q_2, \dots, Q_{m-1} dividem \overline{AB} em m partes proporcionais.

Vejam na Figura (3) um exemplo da divisão de um segmento \overline{AB} em quatro partes proporcionais.

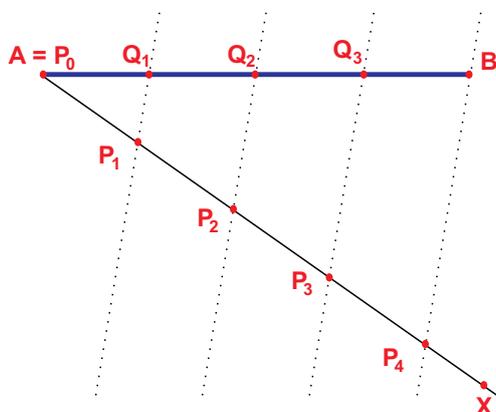


FIGURA 3: Divisão de \overline{AB} em 4 partes proporcionais

2.2 ÁREA

2.2.1 DEFINIÇÃO

Para determinar a área de uma figura (região limitada) plana F , usaremos o método da exaustão para realizarmos aproximações por falta e por excesso do número que irá expressar a área de F , o qual indicaremos por $S(F)$.

Os valores de $S(F)$ aproximados por falta são, por definição, as áreas dos polígonos P contidos em F , e os valores aproximados por excesso são as áreas dos polígonos P' que contêm F . Quaisquer que sejam os polígonos P (contido em F) e P' (contendo F), o número $S(F)$ satisfaz as desigualdades:

$$S(P) \leq S(F) \leq S(P')$$

Para facilitar nosso trabalho consideraremos apenas polígonos contidos na figura F , a qual pretendemos calcular a área, ou seja, consideraremos valores aproximados por falta para o número real $S(F)$.

Definição 2.3: A área de uma figura F é o número real cujas aproximações por falta são as áreas dos polígonos contidos em F .

Como consequência da definição acima tem-se que: para todo polígono P , contido em F , $S(P) \leq S(F)$. Além disso, dado qualquer número $b < S(F)$, existe um polígono P , contido em F , tal que:

$$b < S(P) \leq S(F).$$

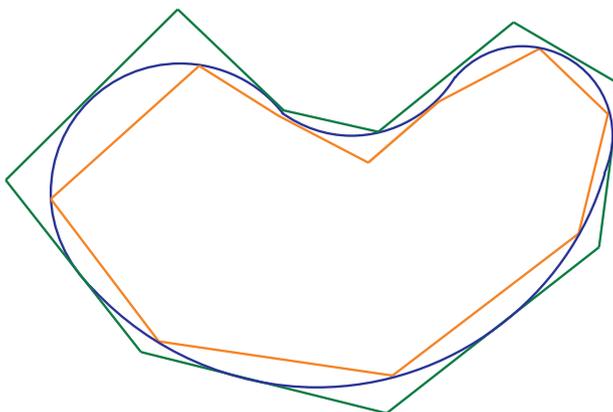


FIGURA 4: Figura plana F contida num polígono P' e contendo um polígono P . A área de P é uma aproximação por falta e a área de P' uma aproximação por excesso, para a área de F

Analogamente poderíamos ter definido a área de F como o número real cujas aproximações por excesso são as áreas dos polígonos que contêm F .

Em [3] lemos:

“Na realidade, Euclides nem sequer se deu ao trabalho de definir área. Nos *Elementos*, duas figuras são chamadas “iguais” quando têm a mesma magnitude, isto é, o mesmo comprimento se são segmentos, a mesma área se são figuras planas, o mesmo volume se são sólidos, ou a mesma abertura se são ângulos.”

2.2.2 FATO GEOMÉTRICO

Proposição 2.1: *Dado um triângulo ABC , qualquer outro triângulo tendo lado \overline{BC} e o terceiro vértice pertencente à reta r , paralela a \overline{BC} passando por A , terá área igual à área de ABC .*

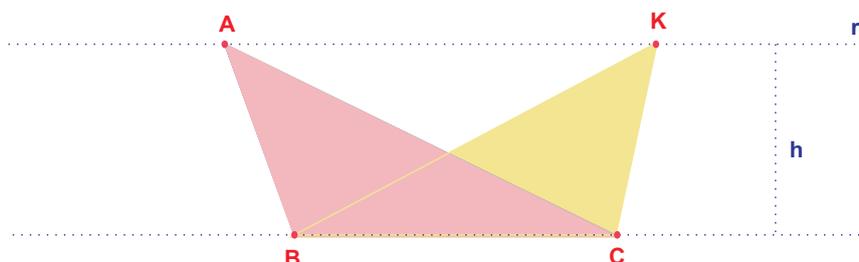


FIGURA 5: Triângulos com mesma base e mesma altura relativa a ela

Demonstração

Consequência imediata da expressão da área de um triângulo como a metade do produto de qualquer um de seus lados pela altura correspondente. ■

3 EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS E “Os Elementos”

A equivalência de áreas foi uma ferramenta utilizada por Euclides para elaboração de muitos de seus teoremas; vários deles presentes em seu trabalho intitulado “Os Elementos”. Este é um notável trabalho composto por 465 proposições distribuídas em 13 livros, Howard Eves [4] faz uma descrição desta belíssima obra:

“Embora Euclides fosse autor de pelo menos dez trabalhos (textos razoavelmente completos de cinco deles chegaram até nós), sua fama repousa principalmente sobre seus “*Elementos*”. Parece que esse trabalho notável imediata e completamente superou todos os “*Elementos*” precedentes; de fato, nenhum vestígio restou de esforços anteriores. Tão logo o trabalho apareceu, ganhou o mais alto respeito e, dos sucessores de Euclides até os tempos modernos, a mera citação do número de um livro e o de uma proposição de sua obra-prima é suficiente para identificar um teorema ou construção particular. Nenhum trabalho, exceto a Bíblia, foi tão largamente usado ou estudado e, provavelmente, nenhum exerceu influência maior no pensamento científico. Mais de mil edições impressas dos “*Elementos*” já apareceram desde a primeira delas em 1482; por mais de dois milênios esse trabalho dominou o ensino de geometria.”

Nesse capítulo discutiremos alguns desses teoremas.

Proposição 3.1: (*Elementos I-43*) Dado um paralelogramo $ABCD$, seja K um ponto qualquer na diagonal \overline{AC} e denote por $AEKH$ e $KGCF$ os paralelogramos construídos sobre a diagonal \overline{AC} . Nestas condições, os paralelogramos $EBGK$ e $HKFD$ (denominados complementos, em relação ao paralelogramo $ABCD$, dos paralelogramos $AEKH$ e $KGCF$), são equivalentes.

Demonstração

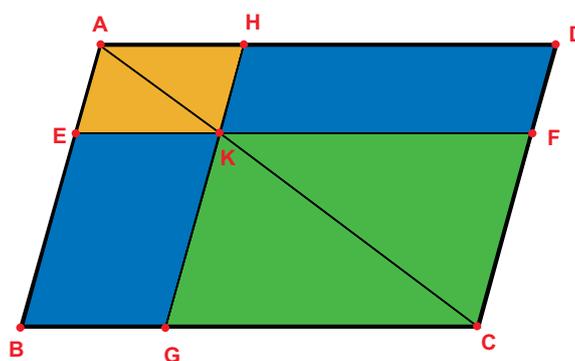


FIGURA 6: Proposição 43 - Livro I

Note que \overline{AC} é diagonal, então segue que os triângulos ABC e ADC são congruentes e portanto possuem mesma área. E como \overline{AK} é diagonal do paralelogramo $AEKH$ tem-se que os triângulos AKE e AKH , também pela mesma razão, possuem mesma área. E usando o mesmo argumento tem-se que o triângulo KGC é equivalente ao KCF .

Então, usando que o triângulo ABC pode ser decomposto nos dois triângulos AKE e KGC mais o paralelogramo $EBGK$; e que o triângulo ADC pode ser decomposto nos dois triângulos AKH e KCF mais o paralelogramo $KFDH$, segue que os paralelogramos $EBGK$ e $KFDH$ são equivalentes. ■

Um caso particular da Proposição 3.1 é a construção da solução da equação algébrica $ax = bc$. Resolver esta equação, na época dos antigos gregos, significava encontrar a altura x de um retângulo de base a que tivesse a mesma área de um retângulo de dimensões b e c . Eram dados os segmentos a, b e c , os quais representavam as grandezas a, b e c da equação dada e a “construção” da solução era realizada como segue. Inicialmente constrói-se um retângulo $ABCD$, sendo $d(A, D) = c$ e $d(A, B) = b$ e seja E um ponto pertencente à \overline{AD} de tal maneira que $d(D, E) = a$. Prolongue \overline{EC} até encontrar \overline{AB} , e designe esse ponto de F . Agora completa-se o retângulo $AEGF$ e a solução procurada é o segmento \overline{CH} , conforme Figura (7).

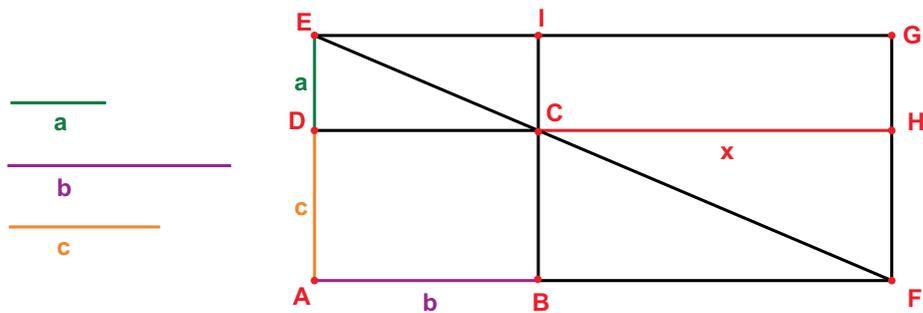


FIGURA 7: Solução da Equação Algébrica $ax = bc$

Outras duas aplicações da Proposição 3.1 são apresentadas nas duas proposições que seguem. A primeira delas é o equivalente geométrico grego da identidade $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ (ver Figura 8).

Proposição 3.2: (Elementos II-4) *Seja \overline{AB} um segmento de reta, e C um ponto qualquer pertencente a esse segmento. Então a área do quadrado de lado \overline{AB} é igual a soma das áreas dos quadrados de lados \overline{AC} e \overline{CB} mais duas vezes a área do retângulo de lados \overline{AC} e \overline{CB} .*

Demonstração

Construa o quadrado $ABED$, trace a diagonal \overline{BD} e construa \overline{CF} paralelo à \overline{AD} tal que $F \in \overline{DE}$. Seja G o ponto de interseção de \overline{CF} com \overline{BD} . Trace também o segmento \overline{HI} paralelo à \overline{AB} , passando por G sendo $H \in \overline{AD}$ e $I \in \overline{BE}$.

Seja \overline{CF} paralelo à \overline{AD} e ambas cortadas pela transversal \overline{BD} segue que $m(\widehat{CGB}) = m(\widehat{ADB})$. Mas, $m(\widehat{ADB}) = m(\widehat{ABD})$ pois, ADB é um triângulo isósceles de base \overline{BD} logo, $m(\widehat{CGB}) = m(\widehat{CBG})$ e por consequência $d(B, C) = d(C, G)$. Daí, e do fato que $d(B, C) = d(G, I)$ e $d(C, G) = d(B, I)$, segue que $d(G, I) = d(I, B)$. Logo, $CGIB$ é um losango, visto que por construção \overline{CG} é paralelo ao \overline{BI} e \overline{CB} é paralelo ao \overline{GI} . Vamos provar que os ângulos desse losango são todos retos. Temos \overline{CG} é paralelo ao \overline{BI} e \overline{BC} transversal, donde segue $m(\widehat{IBC}) + m(\widehat{BCG}) = 180^\circ$. Mas, \widehat{IBC} é reto, e então segue que \widehat{BCG} também é reto. Consequentemente os ângulos opostos \widehat{CGI} e \widehat{GIB} são também retos. Portanto $CGIB$ é um quadrado sobre \overline{CB} .

Analogamente, prova-se que $HGFD$ é um quadrado, descrito sobre \overline{HG} que é congruente ao \overline{AC} .

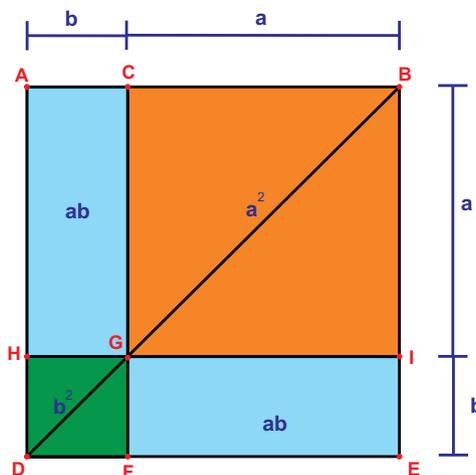


FIGURA 8: Proposição 4 - Livro II

Agora, o retângulo $IGFE$ é congruente ao retângulo $CGHA$ (visto que, $CGIB$ é quadrado implica que $\overline{CG} \cong \overline{IG}$ e $HGFD$ é quadrado implica que $\overline{GH} \cong \overline{GF}$), logo a soma das áreas dos retângulos $ACGH$ e $GIEF$ é igual a duas vezes o retângulo de lados \overline{AC} e \overline{CB} (pois $d(C, G) = d(C, B)$).

Logo, a soma das áreas dos quadrados $HGFD$, $CGIB$ com a área dos retângulos $CGHA$ e $IGFE$ é igual a área do quadrado $ABED$, que é o quadrado sobre o segmento \overline{AB} . Portanto, o quadrado sobre \overline{AB} é igual aos quadrados sobre \overline{AC} e \overline{CB} , juntamente com duas vezes o retângulo de lados \overline{AC} e \overline{CB} . ■

O equivalente geométrico grego da identidade algébrica hoje representada por $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$ foi enunciada por Euclides no Livro II de *Os Elementos*, proposição 5, da seguinte maneira.

Proposição 3.3: (Elementos II-5) *Sejam \overline{AB} um segmento de reta, C o ponto médio de \overline{AB} e D um ponto em \overline{AB} diferente de C . Então, a área do retângulo de lados \overline{AD} e \overline{DB} mais a área do quadrado de lado \overline{CD} é igual a área do quadrado de lado \overline{CB} .*

Demonstração

Construa o quadrado $CEFB$ sobre o lado \overline{CB} e trace o segmento \overline{BE} . Trace \overline{DG} paralelo a \overline{BF} e passando por D tal que $G \in \overline{EF}$. Seja H o ponto de intersecção de \overline{DG} com \overline{BE} . Analogamente, trace a reta paralela a \overline{AB} passando por H e sejam L e M respectivamente os pontos de intersecções dessa reta com o segmento \overline{CE} e com \overline{BF} . Seja \overline{AK} o segmento paralelo a \overline{CL} passando por A , sendo $K \in \overline{ML}$.

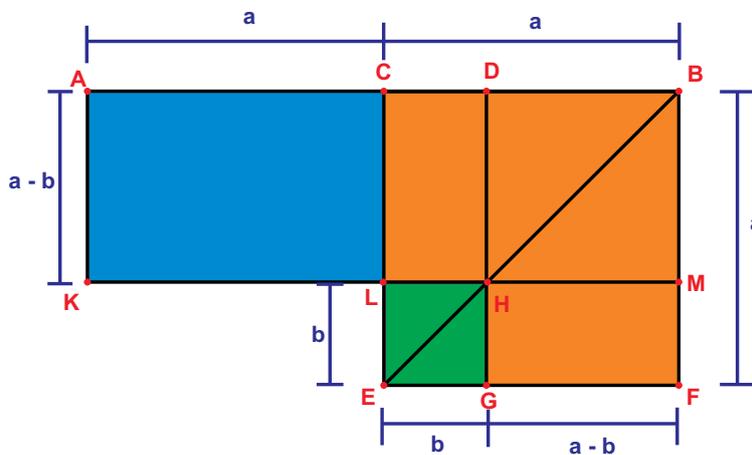


FIGURA 9: Proposição 5 - Livro II

Temos da Proposição 3.1 que os paralelogramos $CDHL$ e $HMBH$ são iguais, logo se adicionarmos $DBMH$ em cada um desses retângulos teremos que o retângulo $CBML$ é igual ao retângulo $DBFG$.

Note que $CBML$ é igual a $ACKL$ pois $\overline{AC} \cong \overline{CB}$, então $ACKL$ também é igual a $DBFG$. Logo adicionando $CDHL$ em cada um teremos que $ADHK$ é igual ao polígono $CBFGHL$. Porém, observe que $ADHK$ é o retângulo de lados \overline{AD} e \overline{DH} , mas $\overline{DB} \cong \overline{DH}$ e então pode-se escrever que o polígono $CBFGHL$ é igual ao retângulo de lados \overline{AD} por \overline{DB} .

Adicionando o quadrado $LHGE$, que é igual ao quadrado de lado \overline{CD} , a cada um teremos que a soma do polígono $CBFGHL$ e $LHGE$ é igual a soma do retângulo de lados \overline{AD} e \overline{DB} e o quadrado de lado \overline{CD} .

Mas o polígono $CBFGHL$ junto com o quadrado $LHGE$ é igual ao quadrado $CEFB$. Então o retângulo de lados \overline{AD} e \overline{DB} junto com o quadrado de lado \overline{CD} é igual ao quadrado de lado \overline{CB} .

■

Este resultado de Euclides, em termos da linguagem algébrica moderna, é a identidade $(a + b)(a - b) + b^2 = a^2$, de maneira que todas as vezes que os gregos desejavam manipular tal identidade eles precediam geometricamente de acordo com o diagrama dado na Figura (9).

4 TEOREMA DE PITÁGORAS

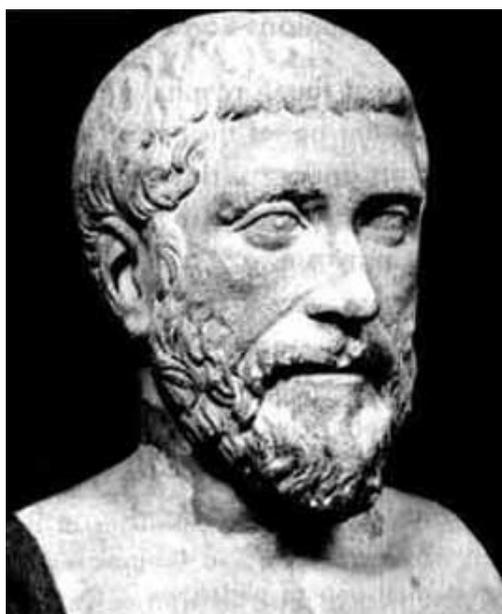


FIGURA 10: Pitágoras

Pitágoras nasceu por volta de 572 a.C. na ilha de Egéia de Samos: de acordo com [4] é possível que Pitágoras tenha sido discípulo de Tales, pois era 50 anos mais novo do que este e morava perto de Mileto, onde vivia Tales. Pitágoras fundou a famosa escola pitagórica em Crotona (colônia grega situada no sul da Itália), que além de ser um centro de estudo de filosofia, matemática e ciências naturais, era também uma irmandade estreitamente unida por ritos secretos e cerimônias. Em [4] encontra-se um comentário sobre os ensinamentos realizados naquela escola:

“Como os ensinamentos eram inteiramente orais e como era costume da irmandade atribuir todas as descobertas ao reverenciado fundador, é difícil agora saber exatamente que descobertas matemáticas se devem ao próprio Pitágoras e quais se devem a outros membros da confraria.”

Então não se sabe se foi Pitágoras quem descobriu o Teorema - o quadrado sobre a hipotenusa de um triângulo retângulo é igual à soma dos quadrados sobre os catetos - que leva seu nome, pois naquela época era normal atribuir uma descoberta ao seu mestre. Segundo [5] não conhecemos também qual foi a demonstração original desse Teorema, mas historiadores acreditam que deva ter sido alguma usando áreas.

O Teorema de Pitágoras é considerado um dos mais belos e importantes teoremas da Matemática de todos os tempos e ocupa uma posição especial na história do nosso conhecimento matemático. Foram encontradas e decifradas várias tabletas datadas do período

abilônio antigo (aproximadamente 1900 a 1600 a. C.), algumas das quais fornecem provas concretas que o teorema de Pitágoras era conhecido pelos babilônios, mais de um milênio antes da sua primeira demonstração. Uma delas, conhecida como *Plimpton 322* (Figura 11, extraída de [6]), se encontra na Universidade de Colúmbia e, de acordo com [4], era parte de uma tableta maior. Infelizmente perdeu-se um pedaço de todo seu lado esquerdo devido a uma rachadura, e a parte que resta contém quinze filas horizontais e quatro colunas de números que foram decifrados como sendo ternos pitagóricos, ou seja, lados de um triângulo retângulo.

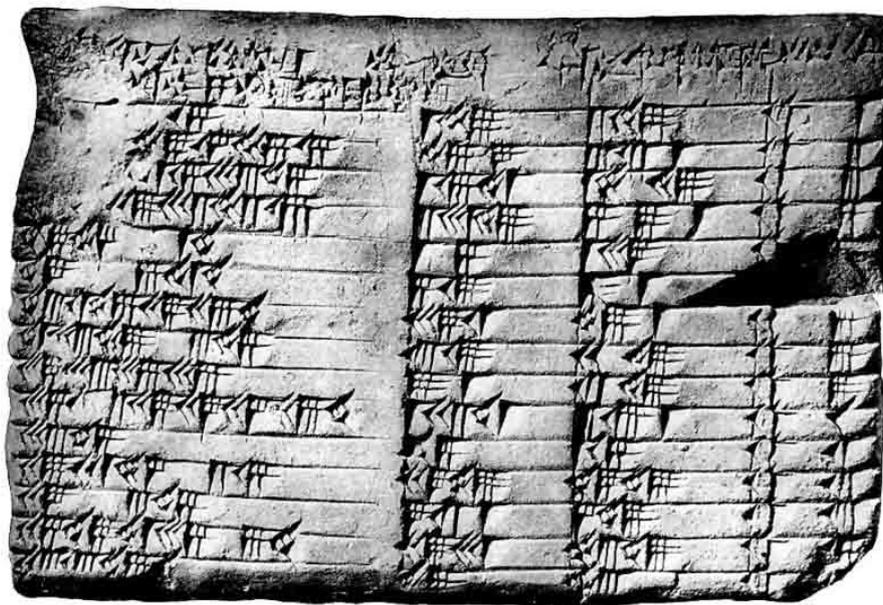


FIGURA 11: *Plimpton 322*

De acordo com [2], a tableta não está em condições tão perfeitas que todos os números possam ainda ser lidos, mas o esquema de construção da tabela é claro, o que tornou possível determinar os itens que faltam devido as fraturas. A coluna da extrema direita contém os números de um a quinze, e sua finalidade é a de identificar a ordem dos itens nas outras três colunas dispostas conforme Figura (12), extraída de [2].

Para entender o que a tabela provavelmente significava para os babilônios, considere um triângulo ABC retângulo em C , de hipotenusa c e catetos a e b . De acordo com Carl B. Boyer em [2] temos:

“Se os números na segunda e terceira colunas (da esquerda para a direita) forem considerados como os lados a e c respectivamente, a primeira coluna a esquerda contém em cada caso o quadrado da razão de c para b . Assim, a coluna da esquerda é uma curta tabela de valores de $\sec^2 A$, mas não devemos assumir que os babilônios conheciam nosso conceito de secante. Nem egípcios, nem babilônios introduziram uma medida de ângulos no sentido moderno. No entanto, as linhas de números em *Plimpton 322* não estão dispostas ao acaso, como um olhar superficial poderia fazer pensar... Os que construíram a tabela evidentemente começaram com dois inteiros sexagesimais regulares, que chamaremos p e q , com $p > q$, então formaram a tripla de números $p^2 - q^2$ e $2pq$ e $p^2 + q^2$. Os três inteiros assim obtidos formam um triângulo pitagórico, em que o quadrado do maior é igual à soma dos quadrados dos outros dois. Portanto esses números podem ser usados como dimensões do triângulo retângulo ABC , com $a = p^2 - q^2$ e $b = 2pq$ e $c = p^2 + q^2$... Por exemplo, os números na primeira linha são obtidos partindo de $p = 12$ e $q = 5$, com valores correspondentes $a = 119$ e $b = 120$ e $c = 169$. Os valores de a e c são exatamente os que se encontram na segunda

1,59,0,15	1,59	2,49	1
1,56,56,58,14,50,6,15	56,7	1,20,25	2
1,55,7,41,15,33,45	1,16,41	1,50,49	3
1,53,10,29,32,52,16	3,31,49	5,9,1	4
1,48,54,1,40	1,5	1,37	5
1,47,6,41,40	5,19	8,1	6
1,43,11,56,28,26,40	38,11	59,1	7
1,41,33,59,3,45	13,19	20,49	8
1,38,33,36,36	8,1	12,49	9
1,35,10,2,28,27,24,26,40	1,22,41	2,16,1	10
1,33,45	45,0	1,15,0	11
1,29,21,54,2,15	27,59	48,49	12
1,27,0,3,45	2,41	4,49	13
1,25,48,51,35,6,40	29,31	53,49	14
1,23,13,46,40	56	1,46	15

FIGURA 12: Tabela Plimpton 322 decifrada

e na terceira posição a partir da esquerda na primeira linha da tabela; a razão $\frac{c^2}{b^2} = \frac{28561}{14400}$ é o número 1; 59, 0, 15 que aparece na primeira posição dessa linha. A mesma relação é encontrada nas outras quatorze linhas; os babilônios fizeram os cálculos tão precisamente que a razão $\frac{c^2}{b^2}$ na décima linha é expressa como uma fração com oito casas sexagesimais, equivalentes a cerca de quatorze casas em nossa notação.”

De acordo com [5] em outro tablete que está preservado no Museu Britânico, também se observa a familiaridade dos babilônios com o Teorema de Pitágoras, nele está escrito:

4 é o comprimento
 5 é a diagonal
 Qual é a altura?
 4 vezes 4 dá 16
 5 vezes 5 dá 25
 Tirando 16 de 25 o resto é 9
 Quanto vezes quanto devo tomar para ter 9?
 3 vezes 3 dá 9
 3 é a altura

Um outro tablete se encontra no Museu da Universidade de Yale, é o único que contém figuras, sendo um quadrado e suas diagonais. De acordo com [5], neste fragmento de tablete (Figura (13), extraído de [5]) o lado do quadrado é tomado como igual a 30 e o comprimento da diagonal aparece como 42, 25, 35. Como os babilônios escreviam os números em base 60, o comprimento da diagonal é, na nossa notação decimal, $42 + \frac{25}{60} + \frac{35}{3600} = 42,4263889$. Isto dividido por 30, dá 1,414213..., uma aproximação excepcional para $\sqrt{2}$ com seis casas decimais corretas. Ou seja, a diagonal de um quadrado de lado 30 é encontrado multiplicando 30 pela aproximação de $\sqrt{2}$ (1,414213...).

Atualmente são conhecidas inúmeras demonstrações do Teorema de Pitágoras. Na segunda edição do livro de Elisha Scott Loomis intitulado “*The Pythagorean Proposition*”, o autor coletou e classificou diversas demonstrações desse teorema. De acordo com [7], Elisha

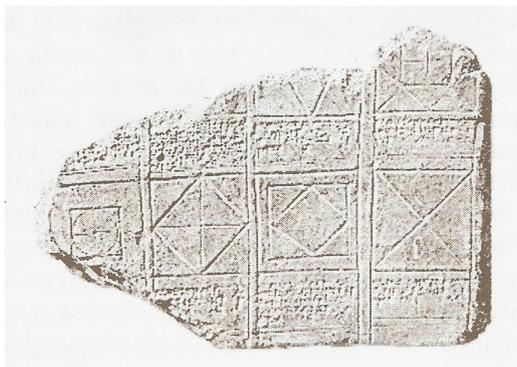


FIGURA 13: Tablete que se encontra na Universidade de Yale

era professor de Matemática em Cleveland, Ohio nos Estados Unidos e era apaixonado pelo Teorema de Pitágoras, durante 20 anos (de 1907 a 1927) colecionou demonstrações desse teorema organizando-as num livro, o qual na sua segunda edição, publicada em 1940, apresenta 370 demonstrações do referido Teorema. As demonstrações são classificadas como “geométricas” (baseadas em comparações de áreas) e “algébricas” (baseadas nas relações métricas nos triângulos retângulos). Abordaremos na sequência algumas demonstrações que se relacionam com áreas.

4.1 DEMONSTRAÇÃO DE EUCLIDES

Euclides enuncia e prova o teorema de Pitágoras e seu recíproco respectivamente nas proposições 47 e 48 do livro I de *Os Elementos*. De acordo com [2] Euclides realizou uma bela prova utilizando uma figura que é às vezes descrita como um moinho de vento, cauda de pavão ou cadeira da noiva (Figura 14, extraída de [2]), supostamente porque lembra a cadeira que as noivas eram as vezes transportadas nas costas de um escravo para a cerimônia matrimonial.

Proposição 4.1: (*Elementos I-47*) Em um triângulo retângulo, o quadrado construído sobre o lado oposto ao ângulo reto é igual a soma dos quadrados construídos sobre os lados que fazem o mesmo ângulo reto.

Demonstração

Seja ABC um triângulo retângulo em A . Constrói-se sobre o lado \overline{BC} o quadrado $BCED$ e sobre os lados \overline{AB} e \overline{AC} , os quadrados $ABFG$ e $ACKH$ respectivamente. Trace \overline{AL} paralelo a \overline{BD} tal que L pertença a \overline{DE} . Seja \overline{AJ} uma altura do triângulo ABC e trace também \overline{AE} , \overline{AD} , \overline{CF} e \overline{BK} ; conforme Figura (15). Note que são colineares A, J e L ; e também G, A e C . Observe que os triângulos ABD e FBC são congruentes pelo caso de congruência L.A.L., pois $\overline{FB} \cong \overline{AB}$, $\overline{BC} \cong \overline{BD}$, $m(\widehat{FBC}) = 90^\circ + m(\widehat{ABC}) = m(\widehat{ABD})$.

Tem-se que o paralelogramo $BDLJ$ possui o dobro da área do triângulo ABD , uma vez que os triângulos ABD e JBD são congruentes, pois possuem a mesma base \overline{BD} e estão entre as mesmas paralelas \overleftrightarrow{BD} e \overleftrightarrow{AL} . Também o quadrado $ABFG$ possui o dobro da área do triângulo FBC , pois ambos possuem a mesma base \overline{FB} e estão entre as paralelas \overleftrightarrow{FB} e \overleftrightarrow{GC} . Como os triângulos ABD e FBC são congruentes, segue que o paralelogramo $BDLJ$ possui a mesma área do quadrado $ABFG$.

Analogamente, tem-se que o paralelogramo $LJCE$ possui a mesma área do quadrado $ACKH$. Logo, a soma das áreas dos quadrados $ABFG$ e $ACKH$ é igual a soma das áreas dos paralelogramos $BDLJ$ e $LJCE$ que é exatamente a área do quadrado $BCED$. ■



FIGURA 14: Cadeira da Noiva, num cenário da Primeira Guerra Mundial

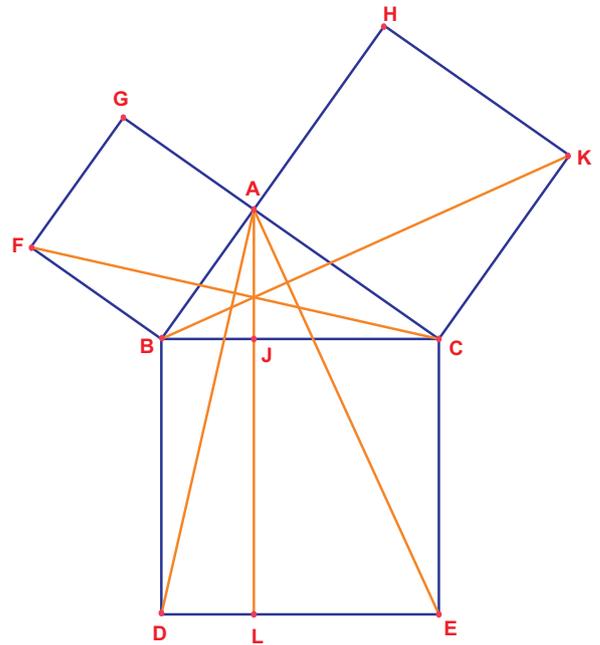


FIGURA 15: Proposição 47, Livro I de Os Elementos

4.2 DEMONSTRAÇÃO DO PRESIDENTE

Uma bela demonstração do Teorema de Pitágoras foi feita pelo vigésimo presidente dos Estados Unidos, James Abram Garfield (1831 - 1881).

De acordo com [4], ele desenvolveu um grande interesse e uma razoável competência em matemática elementar. Em 1876, cinco anos antes de assumir a presidência, quando era membro do Poder Legislativo, descobriu uma bonita demonstração do Teorema de Pitágoras. A idéia da demonstração, que posteriormente foi publicada no *New England Journal of Education Mathematics*, ocorreu-lhe durante uma discussão sobre matemática com outros membros do Congresso, ele se baseou na Figura (16).

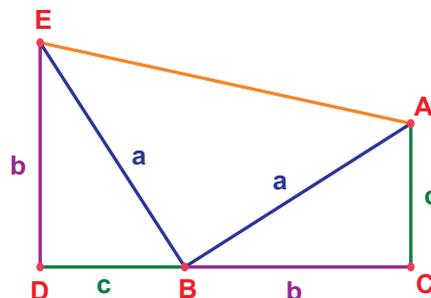


FIGURA 16: Demonstração do Presidente

Inicialmente note que os triângulos EDB e BCA são congruentes, pelo caso de congruência L.A.L.. Logo, $m(\widehat{DEB}) = m(\widehat{CBA})$ e $m(\widehat{DBE}) = m(\widehat{CAB})$. Observando então que $m(\widehat{CAB}) + m(\widehat{ABC}) = 90^\circ$ e que $m(\widehat{DBE}) + m(\widehat{EBA}) + m(\widehat{ABC}) = 180^\circ$ segue que o ângulo $E\widehat{B}A$ é reto.

Assim sendo, por um lado temos que a área do trapézio com bases b e c e altura $b + c$

é igual a semi-soma das bases vezes a altura. Por outro lado, temos que a mesma área é também igual à soma das áreas dos três triângulos retângulos representados na Figura (16). Então:

$$\frac{(b+c)(b+c)}{2} = \frac{bc}{2} + \frac{bc}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow \frac{b^2 + bc + cb + c^2}{2} = \frac{2bc + a^2}{2} \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

4.3 DEMONSTRAÇÃO DE BHASKARA

Bhaskara foi um matemático que nasceu na Índia em 1114 e viveu até cerca de 1185. Segundo [4], Bhaskara desenhou apenas a figura abaixo e não ofereceu nenhuma explicação, mas somente a palavra “Veja!”.

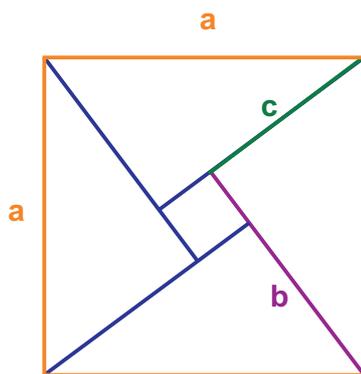


FIGURA 17: Inicialmente

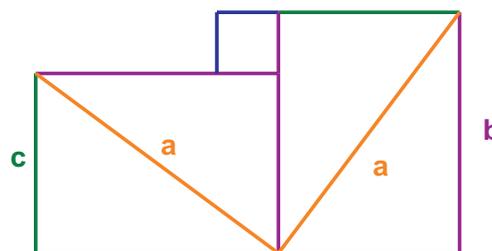


FIGURA 18: Reconfiguração da Figura 17

O quadrado sobre a hipotenusa é decomposto em quatro triângulos, cada um deles congruente ao triângulo retângulo dado inicialmente, mais um quadrado de lado igual ao módulo da diferença entre os catetos do triângulo dado. Dispondo essas partes como na figura obtêm-se uma reconfiguração da Figura (17) composta por quadrados justapostos, e portanto ambas as figuras são equivalentes.

Assim sendo, a é a hipotenusa e b e c são os catetos, temos:

$$\text{Área Figura (17)} = a^2 = \text{Área Figura (18)} = b^2 + c^2.$$

4.4 DEMONSTRAÇÃO DE LEONARDO DA VINCI

O italiano Leonardo da Vinci (1452 - 1519), o grande criador de Mona Lisa, além de ter sido um excelente pintor e escultor, aprofundou-se em diversas áreas do conhecimento. De acordo com [2]:

“...Da Vinci é citado como o típico homem da Renascença, com conhecimentos sobre tudo; e em campos, que não a matemática, há muita justificativa para essa idéia. Leonardo era um gênio, de pensamento ousado e original, um homem de ação tanto quanto de contemplação, ao mesmo tempo artista e engenheiro; mas parece não ter tido grande contato com a principal tendência matemática da época – o desenvolvimento da álgebra. Poucos assuntos dependem tanto de uma tradição livresca contínua e de uma concentração por longo período de tempo quanto a matemática, e Leonardo não era dado a manter uma pesquisa concentrada em bibliotecas ou mesmo dado a levar suas próprias idéias imaginativas até suas conclusões.”

Leonardo da Vinci concebeu uma demonstração do Teorema de Pitágoras, que se baseia na Figura abaixo.

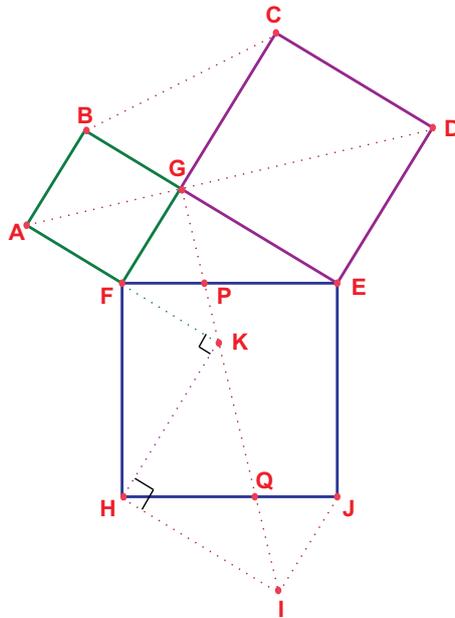


FIGURA 19: Demonstração de Leonardo da Vinci

São dados um triângulo EFG retângulo em G e sobre seus lados constroem-se os quadrados $ABGF$, $CDEG$ e $EFHJ$. A partir dessa figura são feitas as seguintes construções auxiliares: traçam-se \overline{BC} , \overline{AD} e o triângulo HJI congruente ao triângulo EFG .

Observe que os quadriláteros $ABCD$, $AFED$, $GFHI$ e $IJEG$ são todos congruentes. De fato, primeiramente observe que os triângulos ABG e AFG , BGC e FGE , GCD e GED são congruentes todos pelo caso L.A.L., segue então que os quadriláteros $ABCD$ e $AFED$ são congruentes. Depois, construa os pontos P e Q respectivas interseções de \overrightarrow{GI} com \overline{FE} e \overline{HJ} . Em seguida note que os triângulos PEG e QHI assim construídos são congruentes pelo caso L.A.A. (pois por construção o triângulo HJI é congruente ao triângulo EFG daí $m(\widehat{PEG}) = m(\widehat{QHI})$ e $\overline{HI} \cong \overline{EG}$; além disso \widehat{GPE} e \widehat{IQH} são ângulos correspondentes relativos às paralelas \overline{FE} e \overline{HJ} e à transversal \overline{GI}) logo, os quadriláteros $GFHI$ e $IJEG$ são congruentes. Para concluir, note que o quadrilátero $GFHI$ pode ser decomposto em triângulos GFK , FKH e KHI respectivamente congruentes aos triângulos AFG , FGE e GED , conforme Figura (19) segue daí que os quadriláteros $AFED$ e $GFHI$ são congruentes.

Portanto podemos escrever:

$$\text{Área}(ABCD) + \text{Área}(AFED) = \text{Área}(GFHI) + \text{Área}(IJEG)$$

o que equivale a

$$\begin{aligned} &\text{Área}(EFG) + \text{Área}(CBG) + \text{Área}(ABGF) + \text{Área}(CDEG) \\ &= \text{Área}(EFG) + \text{Área}(EFHJ) + \text{Área}(HJI) \end{aligned}$$

notando então que os triângulos EFG , CBG e HJI são congruentes, segue:

$$\text{Área}(ABGF) + \text{Área}(CDEG) = \text{Área}(EFHJ).$$

Logo, o Teorema de Pitágoras está provado.

4.5 DEMONSTRAÇÃO DE PERIGAL

Henry Perigal (1801-1898), um livreiro em Londres, publicou em 1873 uma demonstração do Teorema de Pitágoras.

Vejam a demonstração realizada por ele (idéia retirada de [8]): inicialmente trace um triângulo ABC retângulo em A e construa os quadrados $ABDE$, $BCFG$, $ACHI$ respectivamente sobre os lados \overline{AB} , \overline{BC} e \overline{AC} , e suponha que $d(A, B) > d(A, C)$. Construa as

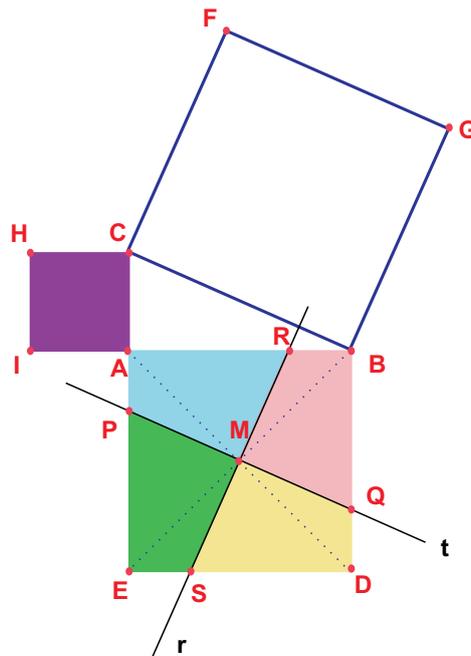


FIGURA 20: Demonstração de Perigal

diagonais do quadrado $ABDE$, ou seja \overline{AD} e \overline{BE} , denote por M o ponto de interseção dessas diagonais. Trace duas retas t e r , uma paralela e outra perpendicular à hipotenusa \overline{BC} , respectivamente, ambas passando por M , dividindo assim o quadrado $ABDE$ em quatro quadriláteros. Sejam P e Q os pontos de interseções da reta t , com \overline{AE} e \overline{BD} respectivamente. E sejam R e S os pontos de interseções da reta r com \overline{AB} e \overline{ED} respectivamente.

Para configurar o quadrado $BCFG$, conforme Figura (21), realizaremos as seguintes translações:

- Transladar o quadrilátero $APMR$ sendo o vetor de translação o segmento orientado \overrightarrow{MB} .
- Transladar o quadrilátero $PESM$ sendo o vetor de translação o segmento orientado \overrightarrow{MG} .
- Transladar o quadrilátero $MSDQ$ sendo o vetor de translação o segmento orientado \overrightarrow{MF} .
- Transladar o quadrilátero $RMQB$ sendo o vetor de translação o segmento orientado \overrightarrow{MC} .
- Transladar o quadrado $ACHI$ sendo o vetor de translação o segmento orientado $\overrightarrow{CD'}$, onde o ponto D' é o transladado do ponto D segundo o vetor de translação \overrightarrow{MF} .

Agora vamos provar que os quatro quadriláteros e o quadrado encaixam perfeitamente sobre o quadrado $BCFG$. Por construção, observe que \overline{PQ} e \overline{RS} são perpendiculares, então temos $m(\widehat{RMP}) = m(\widehat{PMS}) = m(\widehat{SMQ}) = m(\widehat{QMR}) = 90^\circ$. Inicialmente vamos mostrar que M é o ponto médio dos segmentos \overline{PQ} e \overline{RS} e também que $\overline{PQ} \cong \overline{RS}$. Seja, $X \in \overline{AE}$ e $Y \in \overline{AB}$ pontos tais que os segmentos \overline{XM} e \overline{YM} sejam perpendiculares aos lados \overline{AE} e \overline{AB} , respectivamente, conforme Figura (22).

Note que os triângulos MXP e MYR são congruentes pelo caso de congruência A.L.A. pois, $m(\widehat{MXP}) = m(\widehat{MYR}) = 90^\circ$, $d(X, M) = d(Y, M) = \frac{1}{2}d(A, E)$ (visto que M é, por construção, o ponto de intersecção das diagonais do quadrado $ABDE$) e $m(\widehat{YMR}) = m(\widehat{XMP})$ pois ambos são ângulos complementares do ângulo \widehat{PMY} . Desta congruência

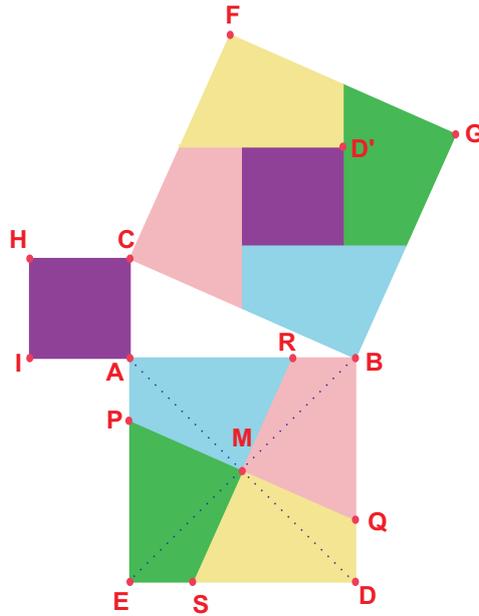


FIGURA 21: Demonstração de Perigal

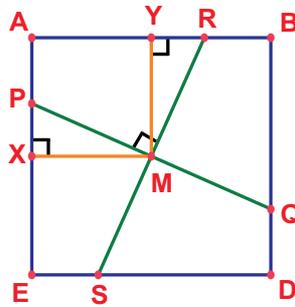


FIGURA 22: Demonstração de Perigal

conclui-se que $\overline{MP} \cong \overline{MR}$. Analogamente, temos $\overline{MP} \cong \overline{MQ} \cong \overline{MR} \cong \overline{MS}$. Portanto M é o ponto médio dos segmentos congruentes \overline{PQ} e \overline{RS} .

Note que o quadrilátero $CBQP$ da Figura (21) é um paralelogramo pois seus lados opostos são paralelos, segue então $d(C, B) = d(P, Q)$. Concluimos então que os segmentos \overline{MP} , \overline{MQ} , \overline{MR} e \overline{MS} são todos iguais a metade do lado do quadrado $BCFG$. A partir deste fato e sabendo que $m(\widehat{RMP}) = m(\widehat{PMS}) = m(\widehat{SMQ}) = m(\widehat{QMR}) = 90^\circ$, temos que os quatro quadriláteros encaixam-se sobre o quadrado $BCFG$ conforme Figura (21), mas não preenchem completamente o quadrado maior restando um quadrado no centro da figura. Vamos mostrar que esse quadrado é congruente ao quadrado $ACHI$ conforme mostrado na Figura (21). Temos, $d(C, P) - d(A, P) = d(A, C)$ e lembrando que $d(C, P) = d(B, Q)$ segue $d(B, Q) - d(A, P) = d(A, C)$. De modo análogo podemos provar que todos os lados do quadrilátero central do quadrado $BCFG$, são iguais aos lados do quadrado $ACHI$, com isso prova-se que o quadrado $ACHI$ se encaixa sobre o quadrado central.

4.6 DEMONSTRAÇÃO DE PAPUS

Papus de Alexandria viveu por volta do ano 300, e é considerado o último dos grandes geômetras da antiga civilização grega. Sua obra chamada “*Coleção Matemática*”, era uma combinação de guia da geometria da época, ele era composto de oito livros dos quais o primeiro e parte do segundo extraviaram-se, no material que restou são encontrados relatos e novas provas de temas suplementares para várias proposições de Arquimedes, Euclides, Apolônio e Ptolomeu, entre outros, sobre superfícies de revolução, planos, sólidos.

No livro IV desta coleção Papus realizou uma extensão do Teorema de Pitágoras. De

acordo com [7] não se trata apenas de uma nova demonstração mas de uma generalização bastante interessante do Teorema de Pitágoras. Sejam ABC um triângulo qualquer e $ABFG$ e $ACJI$ dois paralelogramos quaisquer externos ao triângulo dado, construídos respectivamente sobre \overline{AB} e \overline{AC} . Seja H o ponto de interseção de \overleftrightarrow{FG} e \overleftrightarrow{JI} e trace \overline{BE} e \overline{CD} congruentes e paralelos a \overline{HA} . O Teorema de Pappus afirma que a área do paralelogramo $BCDE$ é a soma das áreas dos paralelogramos $ABFG$ e $ACJI$.

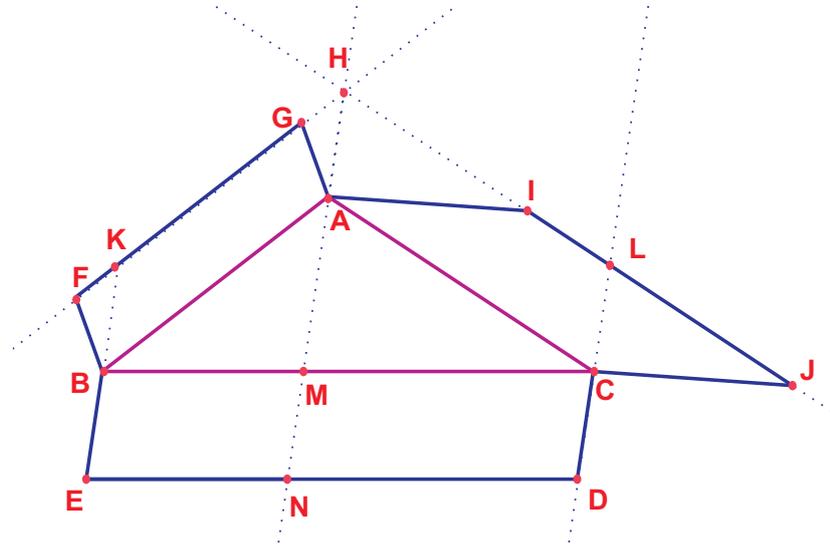


FIGURA 23: Demonstração de Pappus

Observe que o paralelogramo $ABFG$ é equivalente ao paralelogramo $ABKH$ pois, possuem mesma base e mesma altura, o qual por sua vez é equivalente ao paralelogramo $BMNE$, pois possuem mesma base $\overline{HA} \cong \overline{BE}$ e estão entre as paralelas \overleftrightarrow{KE} e \overleftrightarrow{HN} (possuindo assim mesma altura). Analogamente, tem-se que $ACJI$ possui mesma área que $ACLH$ que é equivalente ao paralelogramo $MCDN$. Logo, a área do paralelogramo $BCDE$ é a soma das áreas de $ABFG$ com $ACJI$.

Note que o Teorema de Pitágoras é caso particular do Teorema de Pappus, bastando tomar o triângulo ABC como retângulo e em vez dos paralelogramos considerar quadrados.

4.7 OUTRAS DEMONSTRAÇÕES

- De acordo com [7], a demonstração abaixo é a mais bela prova do Teorema de Pitágoras, e existem indícios de que essa prova pode ter sido a que os pitagóricos realizaram. Sejam respectivamente b , c os catetos e a a hipotenusa de um triângulo retângulo, e considere os dois quadrados da Figura (24). Note que ambos os quadrados possuem lados iguais à $b + c$.

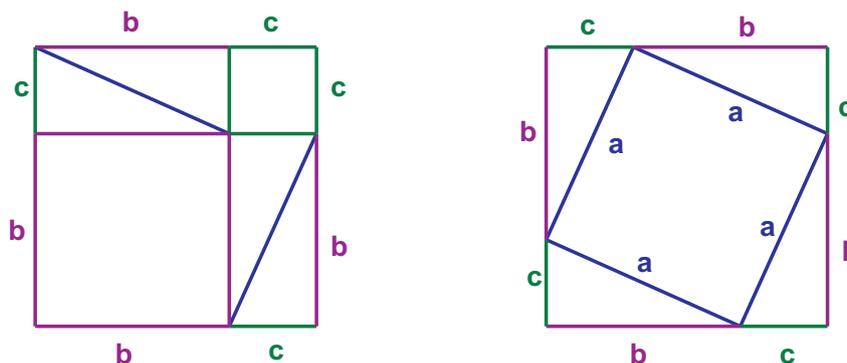


FIGURA 24: Os dois quadrados possuem lado $b + c$

O primeiro quadrado está decomposto em seis partes, sendo dois quadrados respectivamente de lados b e c e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. O segundo quadrado está decomposto em cinco partes sendo um quadrado de lado a (quadrado sobre a hipotenusa) e quatro triângulos retângulos congruentes ao triângulo dado. Subtraindo-se os quatro triângulos congruentes em ambos os quadrados, conclui-se que o quadrado sobre a hipotenusa a é igual à soma dos quadrados sobre os catetos, ou seja, $a^2 = b^2 + c^2$.

2) Inicialmente tem-se dois quadrados de lados b e c , dispostos lado a lado como na Figura (25). Note que a área total da Figura (25) é $b^2 + c^2$.

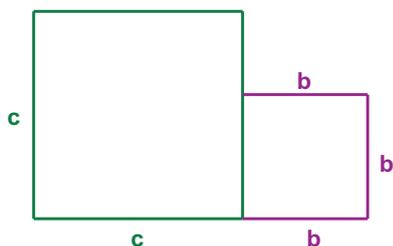


FIGURA 25: Inicialmente

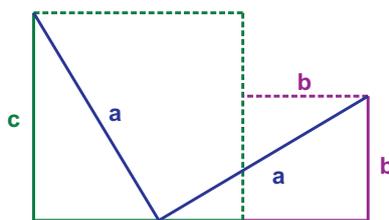


FIGURA 26: Construção de dois triângulos

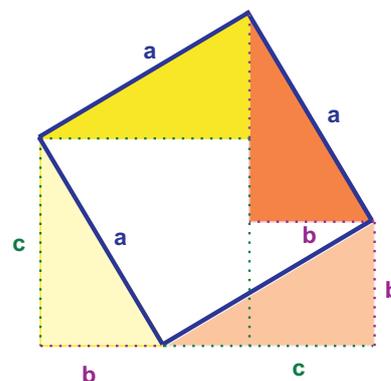


FIGURA 27: Reconfiguração da Figura 25

Depois constrói-se dois triângulos retângulos com catetos b , c e hipotenusa a , conforme Figura (26), decompondo a Figura inicial (25) em três partes: os dois triângulos e a parte restante. Em seguida fazemos rotações de 90° desses triângulos em torno de seus vértices superiores, sendo que o triângulo da esquerda gira no sentido anti-horário e o triângulo da direita no sentido horário, formando assim um quadrado de lado a , reconfiguração das três partes da Figura (26). Portanto a área do quadrado de lado a é igual a área da Figura (25), ou seja $a^2 = b^2 + c^2$.

E. S. Loomis em seu livro “The Pythagorean Proposição” (pp. 49-50) menciona que a demonstração acima foi realizada por Maurice Laisnez, um estudante de uma Junior-Senior High School of South Bend, e enviada à ele, em 16 de maio de 1939, pela sua professora Wilson Ihornton.

3) A demonstração é baseada na figura abaixo:

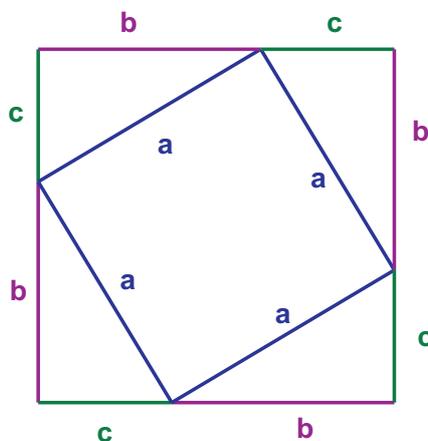


FIGURA 28: Demonstração

Sejam b e c os catetos e a a hipotenusa, observe que podemos expressar a área do quadrado maior como $(b + c)^2$. Mas por outro lado, a mesma área é também igual a

soma das áreas dos quatro triângulos com a área do quadrado menor (quadrado de lado a). Então:

$$(b + c)^2 = 4 \left(\frac{bc}{2} \right) + a^2 \Rightarrow b^2 + 2bc + c^2 = 2bc + a^2 \Rightarrow a^2 = b^2 + c^2.$$

4.8 TEOREMA DE PITÁGORAS GENERALIZADO

O enunciado e demonstração da versão generalizada do Teorema de Pitágoras que apresentaremos aqui é devida ao matemático húngaro George Polya e encontra-se no livro “Induction and Analogy in Mathematics” de sua autoria. É importante mencionar também que essa generalização se encontra nos “*Elementos*” de Euclides, no Livro VI como Proposição 31.

Precisamos antes definir o conceito de semelhança e estudar algumas propriedades relacionadas.

4.8.1 SEMELHANÇA

Definição 4.1: *Sejam F e F' figuras quaisquer e r um número real positivo. Diz-se que F e F' são semelhantes, com razão de semelhança r , quando existe uma correspondência biunívoca $\sigma : F \rightarrow F'$, entre os pontos de F e os pontos de F' , com a seguinte propriedade:*

Se X e Y são pontos quaisquer de F e $X' = \sigma(X)$, $Y' = \sigma(Y)$ são seus correspondentes em F' , então $\overline{X'Y'} = r\overline{XY}$.

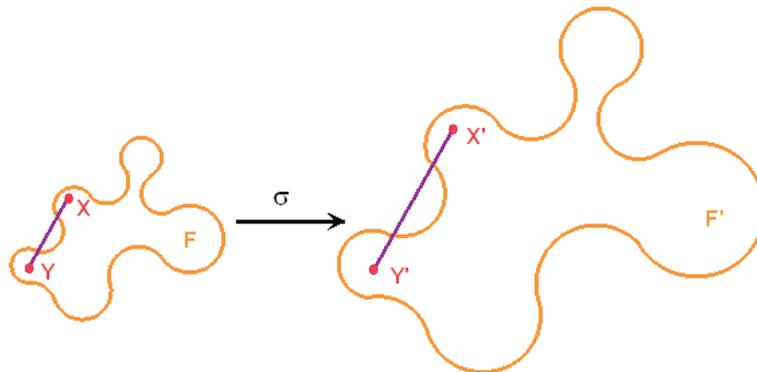


FIGURA 29: Exemplo

Denomina-se semelhança de razão r entre F e F' a correspondência biunívoca $\sigma : F \rightarrow F'$, juntamente com a propriedade mencionada acima. Se $X' = \sigma(X)$, diz-se que os pontos X e X' são homólogos.

Em particular uma semelhança de razão 1 é chamada de isometria. Isto é, uma isometria é uma correspondência biunívoca $\sigma : F \rightarrow F'$ tal que, para quaisquer pontos X, Y em F , a distância de $X' = \sigma(X)$ a $Y' = \sigma(Y)$ é igual à distância de X a Y . Quando existe uma isometria entre duas figuras, dizemos que são congruentes.

Observe que:

- Toda figura é semelhante a si própria, com razão de semelhança igual a 1.
- Se F e F' são semelhantes, com razão de semelhança igual a r , então F' é semelhante a F com razão de semelhança igual a $\frac{1}{r}$, pois a função inversa $S^{-1} : F' \rightarrow F$ é uma semelhança de razão $\frac{1}{r}$.

- c) Se F é semelhante a F' com $\sigma : F \rightarrow F'$ semelhança de razão r , e F' é semelhante a F'' sendo $\sigma' : F' \rightarrow F''$ semelhança de razão r' , então a função composta $\sigma' \circ \sigma : F \rightarrow F''$ é uma semelhança de razão $r.r'$.

Vejam alguns exemplos de semelhança:

- 1) Sejam \overline{AB} e \overline{CD} segmentos tal que $\overline{CD} = r\overline{AB}$, então pode-se definir uma correspondência biunívoca $\sigma : \overline{AB} \rightarrow \overline{CD}$, tal que a cada ponto X do segmento \overline{AB} corresponde um ponto X' de \overline{CD} sendo $\overline{CX'} = r\overline{AX}$.

Agora vamos provar que S é uma semelhança de razão r , tomemos X e Y pertencentes ao segmento \overline{AB} , tal que X esteja entre A e Y . Segue então que X' está entre C e Y' , e temos: Então:

$$\overline{X'Y'} = \overline{CY'} - \overline{CX'} = r\overline{AY} - r\overline{AX} = r(\overline{AY} - \overline{AX}) = r\overline{XY}$$

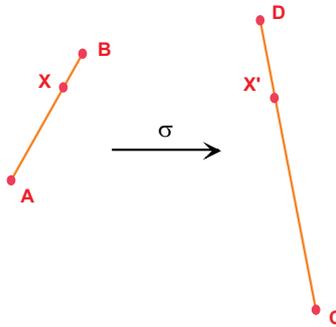


FIGURA 30: Uma semelhança entre \overline{AB} e \overline{CD}

- 2) Sejam T e T' duas semirretas quaisquer, vamos mostrar que T e T' são semelhantes. Sejam O e O' as origens de T e T' respectivamente. Dado qualquer número positivo r , vamos definir uma semelhança $\sigma : T \rightarrow T'$, de razão r , que a cada ponto X em T associa o ponto $X' = \sigma(X)$ em T' de forma que $\overline{O'X'} = r\overline{OX}$. A demonstração de que σ é de fato uma semelhança de razão r é análoga à do exemplo anterior.

Agora veremos algumas propriedades de semelhança:

Proposição 4.2: A semelhança $\sigma : F \rightarrow F'$ transforma pontos colineares de F , em pontos colineares de F' .

Demonstração

Considere $\sigma : F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r e sejam A, B e C pontos de F tais que C pertence a \overline{AB} . Sejam $A' = \sigma(A)$ e $B' = \sigma(B)$ temos $\overline{A'B'} = r\overline{AB}$, como C está entre A e B , então $\overline{AC} + \overline{CB} = \overline{AB}$, e assim, para $C' = \sigma(C)$ segue que:

$$\overline{A'C'} + \overline{C'B'} = r\overline{AC} + r\overline{CB} = r(\overline{AC} + \overline{CB}) = r\overline{AB} = \overline{A'B'}, \text{ e}$$

consequentemente $C' \in \overline{A'B'}$.

Logo segue da Proposição 4.2 que a imagem de uma reta por σ é uma reta e a imagem de um ângulo é ainda um ângulo.

Proposição 4.3: A semelhança $\sigma : F \rightarrow F'$ preserva medida de ângulos. Em particular, σ preserva perpendicularismo.

Demonstração

Seja $C\hat{A}B$ um ângulo arbitrário tal que $m(C\hat{A}B) \neq 180^\circ$ e $Q = \sigma(C\hat{A}B)$. Como a imagem de um ângulo é ainda um ângulo segue que, Q é um ângulo ou seja, $Q = C'\hat{A}'B'$. Sejam P e K pontos pertencentes aos lados \overline{AB} e \overline{AC} do ângulo $C\hat{A}B$ e sejam P' e K' seus respectivos homólogos. Temos $\overline{A'P'} = r\overline{AP}$, $\overline{A'K'} = r\overline{AK}$ e $\overline{P'K'} = r\overline{PK}$. Logo pelo caso de semelhança L.L.L. temos que o triângulo PAK é semelhante ao triângulo $P'A'K'$ e portanto, $m(C\hat{A}B) = m(C'\hat{A}'B') = m(\hat{Q})$. ■

4.8.2 RELAÇÃO ENTRE SEMELHANÇA E ÁREA

Proposição 4.4: *As áreas de duas figuras semelhantes estão entre si como o quadrado da razão de semelhança.*

Demonstração

Primeiro observe que este resultado é válido para triângulos semelhantes, visto que a área de um triângulo é o produto de sua base pela sua altura dividido por dois. Segue então que este resultado é válido para polígonos semelhantes, visto que toda região delimitada por um polígono é triangularizável (isto é, pode ser vista como uma reunião finita de regiões triangulares justapostas de maneira que se duas destas regiões se interseccionam, a intersecção é um lado ou um vértice dos triângulos que são as fronteiras destas regiões). Seja então $\sigma : F \rightarrow F'$ uma semelhança de razão r entre as figuras F e F' . Como todo polígono P contido em F é transformado por σ num polígono P' semelhante à P contido em F' , temos:

$$\frac{\text{Área}(P')}{\text{Área}(P)} = r^2.$$

Analogamente, todo polígono Q' , contido em F' , é transformado pela semelhança σ^{-1} num polígono Q contido em F semelhante à Q' . Então:

$$\frac{\text{Área}(Q)}{\text{Área}(Q')} = \left(\frac{1}{r}\right)^2.$$

Portanto, a área de F' é o número real cujas aproximações por falta são iguais a r^2 vezes as aproximações por falta da área de F . Logo, temos:

$$\text{Área}(F') = r^2 \text{Área}(F). \quad \blacksquare$$

O corolário abaixo é atribuído à Hipócrates de Chios e será utilizado mais adiante, quando trataremos da quadratura de algumas lúnulas.

Corolário 4.1:

- As áreas de dois círculos estão entre si assim como os quadrados dos raios;
- As áreas de setores de dois círculos com ângulos centrais congruentes estão entre si assim como os quadrados dos raios;
- As áreas dos segmentos de dois círculos com ângulos centrais iguais estão entre si assim como os quadrados dos raios. (**Obs:** O termo segmento circular refere-se a porção de um círculo compreendida entre uma corda e o arco de circunferência determinado por essa corda.)

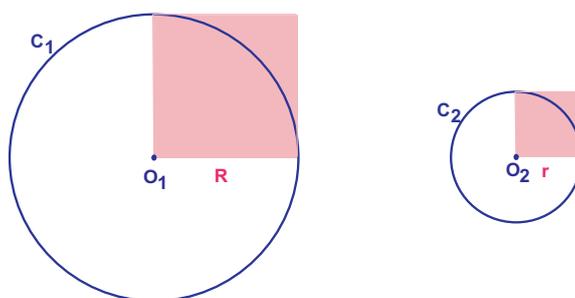


FIGURA 31: Razão entre a área de dois círculos

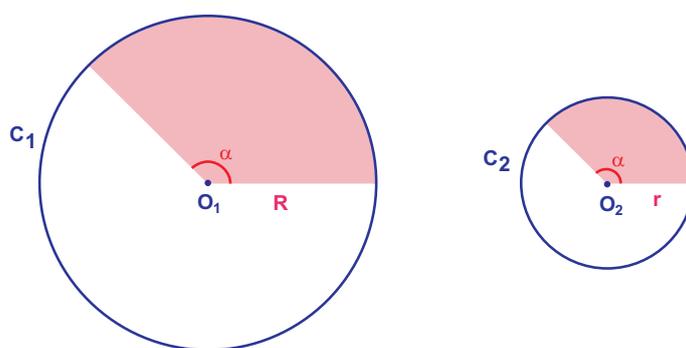


FIGURA 32: Setores de dois círculos com ângulos centrais iguais

Demonstração

Basta observar que: dois círculos, ou dois setores circulares com ângulos centrais iguais, ou dois segmentos circulares com ângulos centrais iguais são figuras semelhantes e utilizar o Teorema anterior.

■

Teorema 4.1: (Teorema de Pitágoras generalizado) Se três figuras semelhantes são construídas sobre os lados de um triângulo retângulo então a área da figura construída sobre a hipotenusa é igual a soma das áreas das figuras construídas sobre os catetos. Em particular se estas figuras são quadrados temos o Teorema de Pitágoras.

Demonstração

Sejam então $S(A)$, $S(B)$ e $S(C)$ as áreas de figuras semelhantes construídas respectivamente sobre os catetos a , b e sobre a hipotenusa c de um triângulo retângulo, como na Figura (34).

De acordo com a Proposição 4.4, como a razão entre as áreas de figuras semelhantes, é igual ao quadrado da razão de semelhança, tem-se:

$$\frac{S(A)}{S(B)} = \left(\frac{a}{b}\right)^2 \text{ ou seja, } \frac{S(A)}{a^2} = \frac{S(B)}{b^2}$$

$$\frac{S(A)}{S(C)} = \left(\frac{a}{c}\right)^2 \text{ ou seja, } \frac{S(A)}{a^2} = \frac{S(C)}{c^2}$$

Portanto:

$$\frac{S(A)}{a^2} = \frac{S(B)}{b^2} = \frac{S(C)}{c^2}$$

Note que como $a^2 = b^2 + c^2$, então segue que $S(A) = S(B) + S(C)$.

■

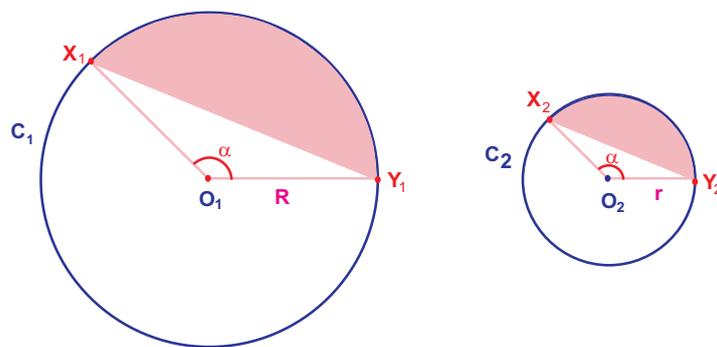


FIGURA 33: Segmentos de dois círculos com ângulos centrais iguais

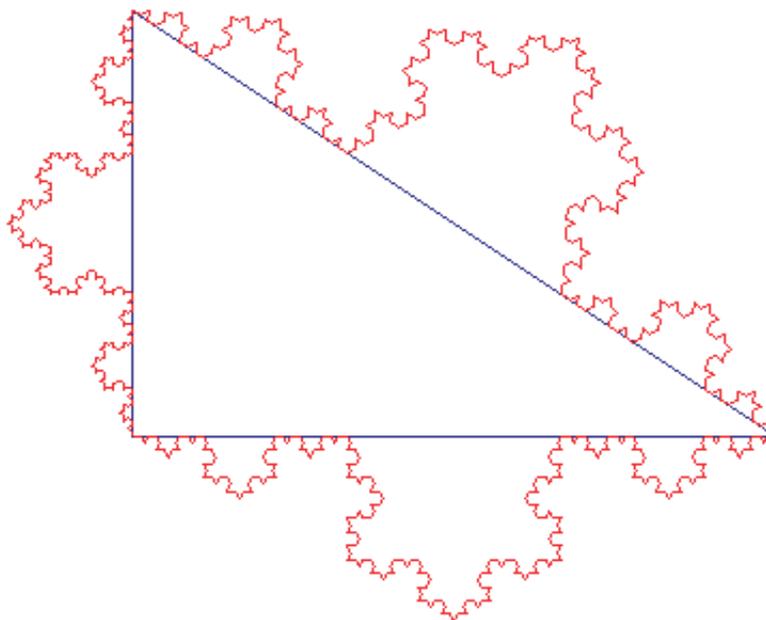


FIGURA 34: Teorema de Pitágoras Generalizado

5 PROBLEMAS ENVOLVENDO EQUIVALÊNCIA DE ÁREAS

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas (e soluções) que envolvem equivalência de áreas, os quais são exercícios propostos em [1].

Problema 5.1: Trace pelo ponto P uma reta que divida o quadrilátero $ABCD$ em dois polígonos equivalentes.

Solução: Trace uma reta \overleftrightarrow{AX} com $X \in \overleftrightarrow{BC}$ que seja paralela ao \overline{PB} e passe por A . Trace também a reta paralela ao \overline{PC} passando por D , obtendo assim o triângulo auxiliar PXZ com $Z \in \overleftrightarrow{BC}$.

Denote por M o ponto médio de \overline{XZ} e, uma vez que, a mediana de um triângulo o divide em dois triângulos equivalentes, decorre daí e das equivalências dos triângulos PBX e PBA e dos triângulos PCZ e PCD (equivalências estas que resultam da Proposição 2.1) que o segmento \overline{PM} (mediana do triângulo PXZ) também divide o quadrilátero $ABCD$ em dois quadriláteros equivalentes.

Problema 5.2: Trace por um vértice de um quadrado dado, uma reta que o divida em áreas proporcionais a 1 e 2.

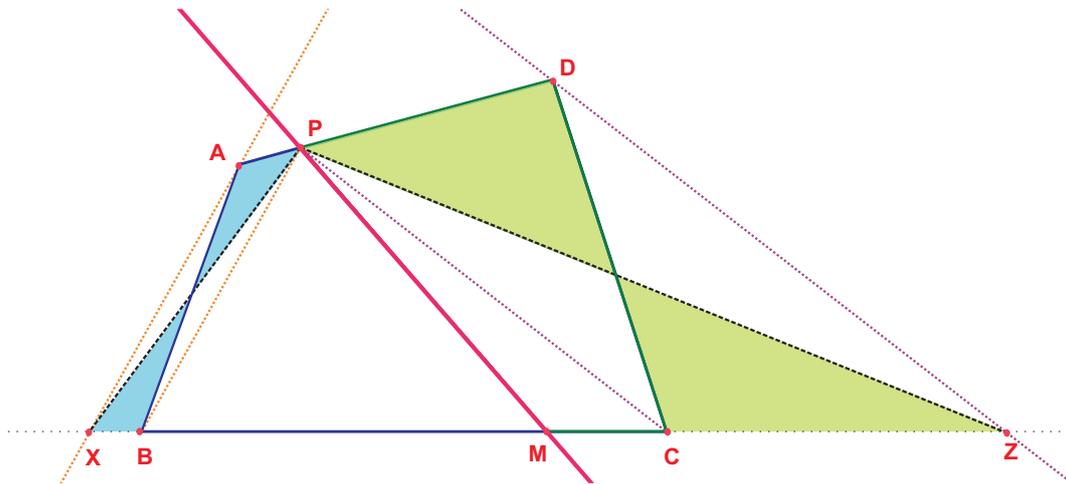


FIGURA 35: Solução do Problema 5.1

Solução: Seja $ABCD$ um quadrado dado de lado l e p, q segmentos de comprimentos (em alguma unidade de medida pré-estabelecida) a 1 e 2, respectivamente.

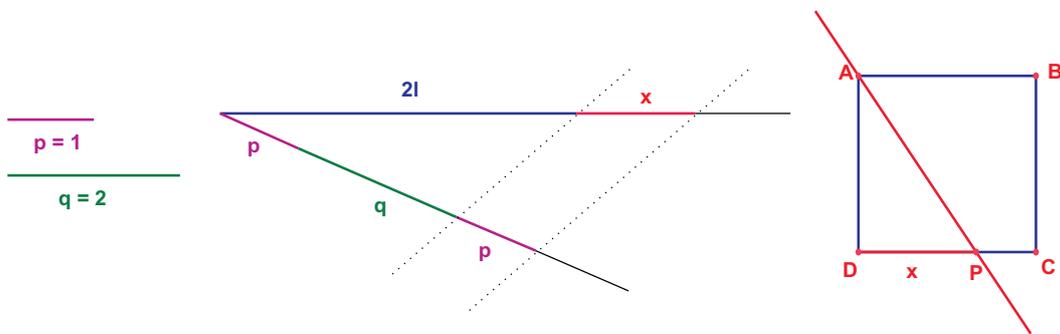


FIGURA 36: Solução do Problema 5.2

Suponha que uma reta passe pelo vértice A e intercecte \overline{DC} em um ponto P ($P \neq D$ e $P \neq C$) e seja $x = d(D, P)$. Seja S_1 a área do triângulo ADP e S_2 a área do quadrilátero $ABCP$. Note que:

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{x}{2l - x}$$

Mas, queremos que $\frac{S_1}{S_2} = \frac{1}{2}$ então segue que:

$$\frac{1}{2} = \frac{x}{2l - x} \Leftrightarrow \frac{3}{2l} = \frac{1}{x}.$$

Ou seja o ponto P que satisfaz a condição requerida é tal que o segmento \overline{DP} é a quarta proporcional entre os segmentos 3, $2l$ e 1, veja construção no Capítulo 1, seção 2.1.2.

Problema 5.3: Um pai quer doar aos seus cinco filhos o terreno de uma quadra ($100m \times 100m$) onde o imposto municipal é calculado de acordo com a frente do terreno. Como repartir esta herança, de modo que os lotes destinados a cada filho tenham a mesma área e o mesmo imposto a pagar?

Solução: Seja $ABCD$ o quadrado que representa o terreno. Primeiramente trace as diagonais desse quadrado e designe de E o ponto de encontro das diagonais. Observe que deve-se dividir o terreno de modo que todos os filhos pagem o mesmo imposto, então como ele é calculado devido a frente do terreno devemos dividir o perímetro desse terreno em cinco partes congruentes, veja construção no Capítulo 1, seção 2.1.3. Sejam A, P, Q, R e S os pontos que dividem o perímetro em partes congruentes.

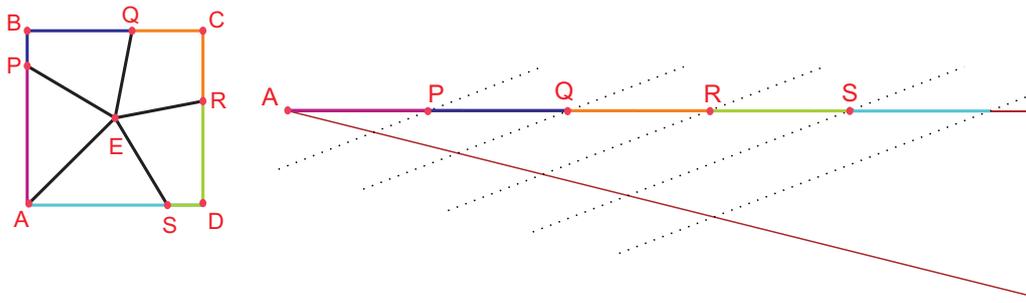


FIGURA 37: Solução do Problema 5.3

Segue da Proposição 2.1 que os lotes obtidos APE , $PBQE$, $QCRE$, $RDSE$ e SAE possuem mesma área.

Problema 5.4: De um terreno de esquina é preciso desapropriar uma parte triangular para o traçado de uma rua, de modo que seja conservado um poste de energia elétrica em sua fronteira. Como fazê-lo, de modo que a área a ser desapropriada seja mínima?

Solução: Primeiramente vamos analisar o problema supondo que ele estivesse solucionado. Então sejam t e u , conforme Figura (38), semirretas com origem comum que representam a esquina do terreno, e seja \overline{MN} o segmento que passa pelo poste de energia P e soluciona o problema.

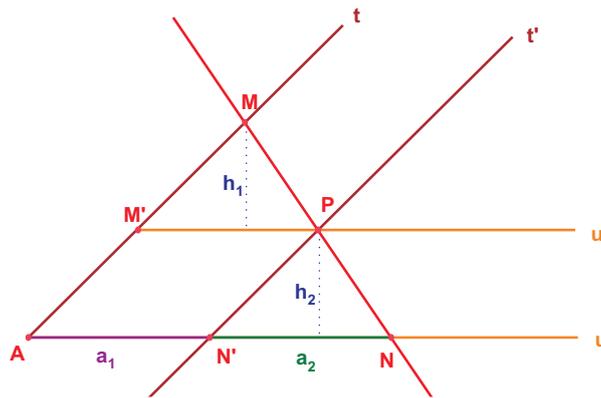


FIGURA 38: Solução do Problema 5.4

Sejam t' e u' retas paralelas à t e u respectivamente, ambas passando por P . Designe de M' o ponto de interseção de t com u' , e N' o ponto de interseção de u com t' .

Denote também $a_1 = d(A, N')$, $a_2 = d(N', N)$, h_1 a distância de M a u' e h_2 a distância de P a u . Então, observe que a área S do triângulo AMN será:

$$S = \frac{(a_1 + a_2)(h_1 + h_2)}{2}. \tag{1}$$

E por outro lado, temos:

$$\text{Área (AM'PN')} + \text{Área (MM'P)} + \text{Área (NN'P)} = a_1 h_2 + \frac{a_1 h_1}{2} + \frac{a_2 h_2}{2}. \tag{2}$$

Segue de (1) e (2) que:

$$a_2 = \frac{a_1 h_2}{h_1}. \tag{3}$$

Substituindo (3) em (1), obtemos:

$$S = \frac{a_1(h_1 + h_2)^2}{2h_1}.$$

Agora, derivando em relação a h_1 e igualando o resultado a zero, tem-se:

$$\frac{dS}{dh_1} = \frac{2h_1^2 a_1 - 2a_1 h_2^2}{4h_1^2} = 0.$$

Donde concluímos que $h_1 = h_2$, pois $h_1, h_2 \neq 0$. Então basta construir uma reta u'' que seja simétrica à reta u em relação à P , determinando o ponto M , interseção de u'' com t . Depois, trace a reta \overleftrightarrow{MP} e seja N o ponto de interseção de \overleftrightarrow{MP} com u . Enfim, a área que deve ser desapropriada é a área triangular AMN .

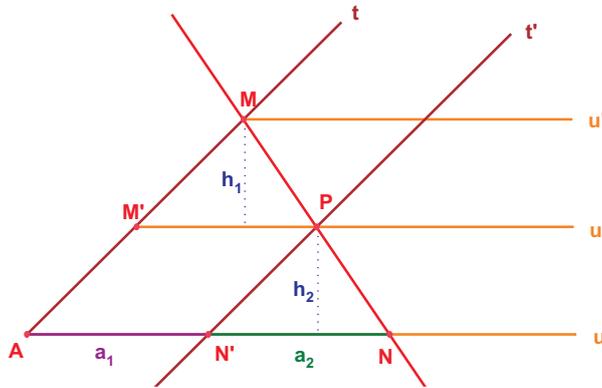


FIGURA 39: Solução do Problema 5.4

Problema 5.5: Quatro amigos adquiriram uma chácara plana em forma triangular contendo uma mina d'água. Agora querem dividi-la entre si de acordo com o capital empregado por cada um na compra, que foi de 10% , 20%, 30% e 40%, respectivamente, de maneira que todos os lotes na partilha dêem acesso à mina. Como fazê-lo?

Para solucionar este problema vamos representar a chácara por uma região triangular ABC e a mina pelo ponto M . Teremos que analisar os três casos que seguem.

a) A mina está localizada na fronteira da chácara e não é nenhum dos seus vértices.

Neste caso, para resolver o problema, vamos supor sem perda de generalidade que $M \in \overline{AB}$, $M \neq A$ e $M \neq B$ e proceder como segue. Primeiramente construímos um triângulo auxiliar MBD , com D pertencente a \overline{BC} e \overline{AD} paralelo a \overline{MC} . Segue então da Proposição 2.1 que os triângulos MCA e MCD são equivalentes. Consequentemente os triângulos ABC e MBD são equivalentes, uma vez que são as uniões do triângulo comum BMC com os triângulos MCA e MCD respectivamente.

Em seguida dividimos a base \overline{BD} em partes proporcionais a 10, 20, 30 e 40 (veja construção na seção 2.1.3), obtendo os pontos E , F e G sobre \overline{BD} . Depois, construímos os segmentos \overline{ME} , \overline{MF} e \overline{MG} , e observamos que esses segmentos dividem o triângulo auxiliar MBD em triângulos cujas áreas são proporcionais a 10, 20, 30 e 40.

Agora observe que podemos ter as seguintes possibilidades:

- Os pontos E , F e G estão localizados fora do triângulo ABC ;
- Os pontos F e G estão localizados fora do triângulo ABC , enquanto somente o ponto E está localizado na fronteira do triângulo ABC ;
- O ponto G está fora do triângulo ABC , enquanto os pontos E e F estão localizados na fronteira do triângulo ABC ;
- Os pontos E , F e G estão localizados na fronteira do triângulo ABC .

Vamos resolver apenas o caso em que o ponto G está fora do triângulo ABC , enquanto os pontos E e F estão localizados na fronteira do triângulo ABC . Os outros casos seguem análogos.

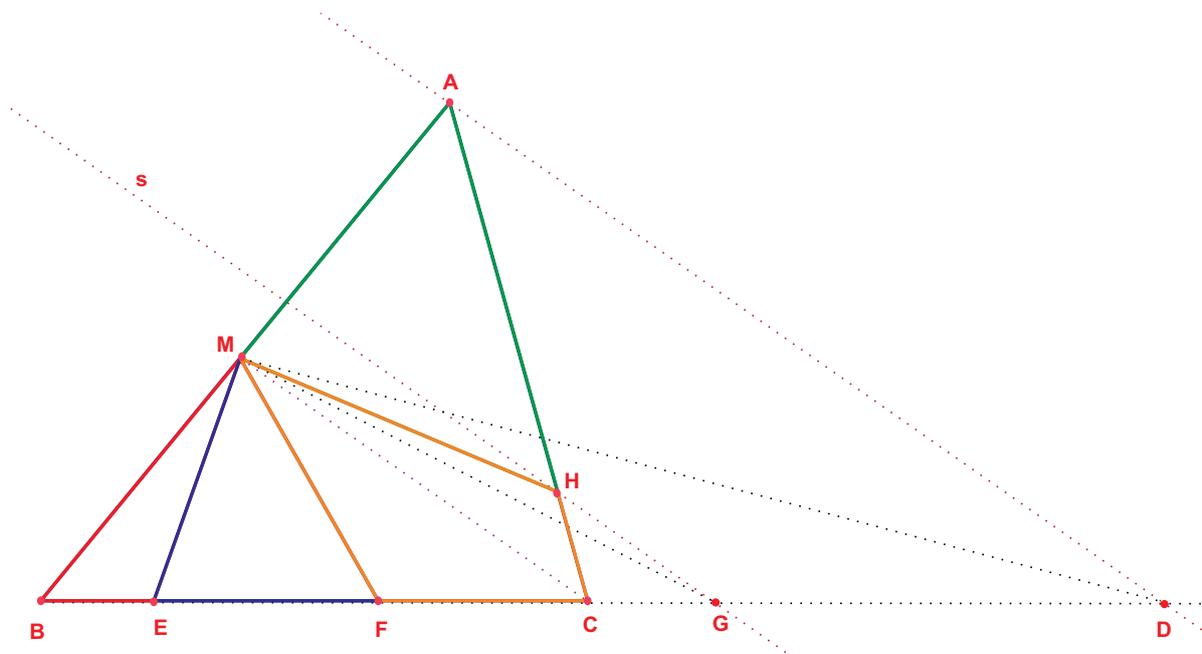


FIGURA 40: A mina está localizada na fronteira e não é nenhum dos seus vértices

Analisando a Figura (40), note que os triângulos MBE e MEF já fazem parte da solução do problema, pois estão totalmente contidos no triângulo ABC . Falta ainda construir um polígono equivalente ao triângulo MFG , que esteja contido no triângulo ABC . Para isso traçamos uma reta s paralela a \overline{MC} , passando por G o qual encontrará o lado \overline{AC} no ponto H . Observe que, por construção os triângulos MCG e MCH possuem base comum \overline{MC} e estão situados entre as mesmas paralelas, logo pela Proposição 2.1, são equivalentes. Portanto o polígono que estamos procurando é o quadrilátero $MFCH$. E o triângulo restante AMH é o quarto polígono procurado.

Logo, os lotes que solucionam o problema são os triângulos MBE , MEF e MHA e o quadrilátero $MFCH$.

b) A mina coincide com um dos vértices do triângulo.

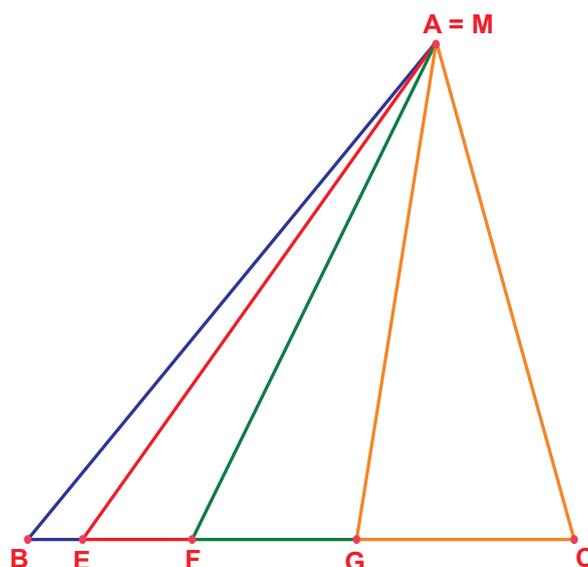


FIGURA 41: A mina coincide com um dos vértices do triângulo

Para facilitar a notação, vamos supor sem perda de generalidade que $M = A$. Neste caso, para solucionar o problema, dividimos o lado oposto ao vértice M , neste caso

o lado \overline{BC} , em partes proporcionais a 10, 20, 30 e 40, obtendo os pontos E , F e G sobre este lado, conforme Figura (41). Traçando então os segmentos \overline{ME} , \overline{MF} e \overline{MG} obtemos os triângulos MBE , MEF , MFG e MGC os quais são a solução do problema, visto que todos esses triângulos possuem a mesma altura relativa ao vértice M .

c) A mina está localizada no interior da chácara.

Para solucionar o problema neste caso, procedemos como segue. Inicialmente traçamos uma reta \overleftrightarrow{AE} paralela a \overline{BM} , passando por A , e uma reta paralela a \overline{MC} passando por A , obtendo assim o triângulo auxiliar AED , com E e D pertencentes a \overleftrightarrow{BC} .

Em seguida dividimos o lado \overline{ED} em partes proporcionais a 10, 20, 30 e 40, obtendo os pontos F , G e H sobre \overline{BD} . Depois traçamos os segmentos \overline{ME} , \overline{MF} , \overline{MG} , \overline{MH} e \overline{MD} os quais dividirão o triângulo auxiliar MED em triângulos cujas áreas são proporcionais a 10, 20, 30 e 40 (veja caso b).

Agora, observe que podemos ter as seguintes possibilidades:

- Os pontos F , G e H estão localizados fora do triângulo ABC sendo que $F - G - H - B - C$ ou $B - C - F - G - H$;
- Os pontos F , G e H estão localizados fora do triângulo ABC sendo que $F - B - C - G - H$ ou $F - G - B - C - H$;
- Os pontos F e H estão fora do triângulo ABC , enquanto somente o ponto G está localizado na fronteira do triângulo ABC ;
- Os pontos F e G estão fora do triângulo ABC , enquanto somente o ponto H está localizado na fronteira do triângulo ABC . A solução desse caso é análoga a solução do caso em que G e H estão fora do triângulo ABC enquanto somente o ponto F está localizado na fronteira desse triângulo;
- O ponto H está fora do triângulo ABC , enquanto os pontos F e G estão localizados na fronteira do triângulo ABC . A solução desse é análoga à solução do caso em que o ponto F está fora do triângulo ABC , enquanto os pontos G e H estão localizados na fronteira do triângulo ABC ;
- Os pontos F , G e H estão localizados na fronteira do triângulo ABC .

Vamos resolver apenas o caso em que os pontos F e H estão localizados fora do triângulo ABC , enquanto o ponto G está localizado na fronteira do triângulo ABC . As soluções dos demais casos seguem de forma análoga.

Observe na Figura (42) que os triângulos MEF , MFG , MGH e MHD não estão contidos totalmente no interior do triângulo ABC , por isso vamos construir polígonos equivalentes que estejam contidos no triângulo ABC . Primeiramente, vamos construir um polígono equivalente ao triângulo MFG , para isto trace uma reta t paralela a \overline{MB} , passando por F o qual encontrará o lado \overline{AB} em K . Observe que, por construção os triângulos BMF e BMK possuem mesma base \overline{BM} e estão situados entre as mesmas paralelas, logo pela Proposição 2.1, são equivalentes. Portanto, $MKBG$ é um dos polígonos procurados.

Agora, vamos construir um polígono equivalente ao triângulo MGH , para isso trace uma reta r paralela a \overline{MC} passando por H , a qual interseccionará \overline{AC} em J . Observe que, por construção os triângulos MCH e MCJ possuem mesma base comum \overline{MC} e estão situados entre as mesmas paralelas, logo pela Proposição 2.1, eles são equivalentes. Portanto, $MGCJ$ é outro polígono procurado.

Finalmente temos que dividir o polígono $AKMJ$ em partes proporcionais a 20% e 80%. Para isso trace uma reta paralela a \overline{MA} passando por K determinando o ponto X interseção dessa reta com \overline{JA} . Note que pela Proposição 2.1 os triângulos MAK e

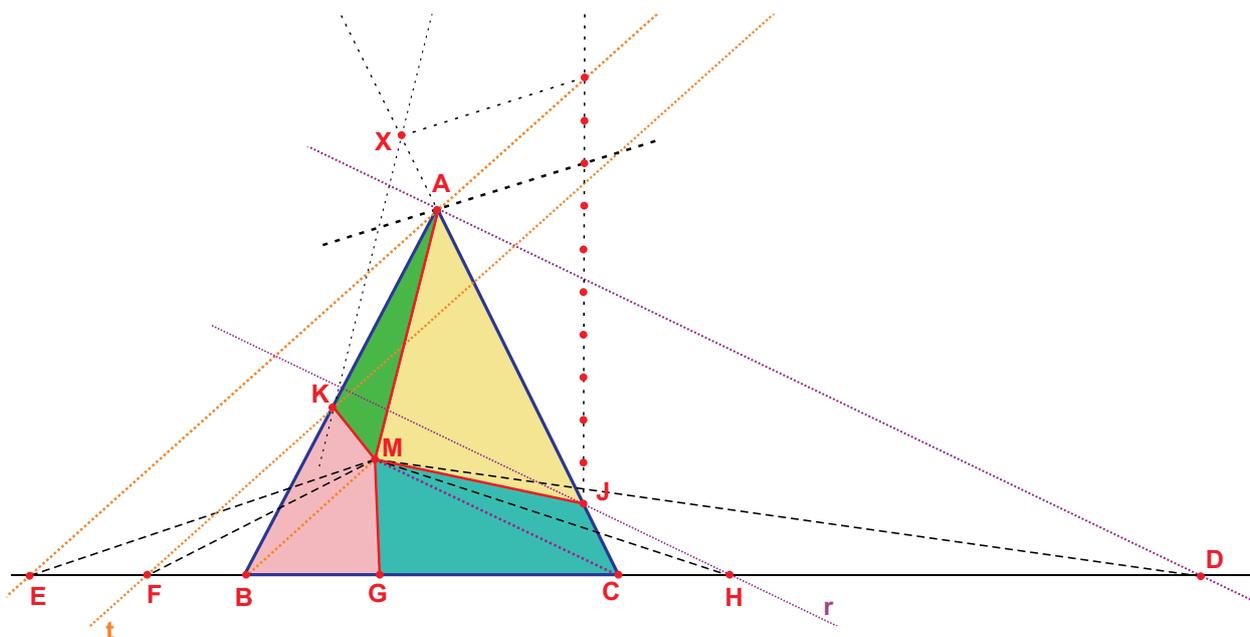


FIGURA 42: A mina está localizada no interior da chácara

MAX são equivalentes. Portanto basta dividir o lado \overline{XJ} do triângulo auxiliar XMJ em partes proporcionais à 20 e 80. Temos que os triângulos MAX e MAJ são polígonos que satisfazem a condição requerida. Como MAX não está contido no triângulo inicial podemos substituí-lo pelo equivalente MAK .

Enfim, os lotes procurados são MAK , $MKBG$, $MGCJ$ e MAJ respectivamente, proporcionais à 10% , 20%, 30% e 40% da área total da chácara.

6 QUADRATURAS

Quadrar uma região limitada plana significa determinar o lado de um quadrado que possua a mesma área que a região dada. Neste capítulo apresentaremos soluções para os problemas da quadratura de um polígono qualquer, quadratura de um arco de parábola, quadratura de algumas lúnulas e finalmente trataremos do problema da quadratura de um círculo.

6.1 QUADRATURAS DE POLÍGONOS

Resolver o problema da quadratura de um polígono consiste em determinar um quadrado que seja equivalente (em área) ao polígono dado. Utilizando apenas o método das construções geométricas, isto é, com o auxílio apenas de uma régua não graduada e um compasso, os gregos conseguiram realizar a quadratura de todos os tipos de polígonos. As soluções estão intimamente relacionadas com a construção da média geométrica entre dois segmentos. Iniciamos com a quadratura de um triângulo.

a) Quadratura de um triângulo

Uma solução para o problema da construção de um quadrado equivalente à um triângulo dado consiste em, primeiramente construir um retângulo de mesma área do triângulo dado e possuindo um lado comum com esse triângulo. Em seguida, a estratégia é construir um quadrado cujo lado seja a média geométrica dos lados do retângulo auxiliar. Mais explicitamente, dado um triângulo qualquer de base b e altura h deve-se construir um quadrado com lado $l = \sqrt{\frac{bh}{2}}$. Note que para construir

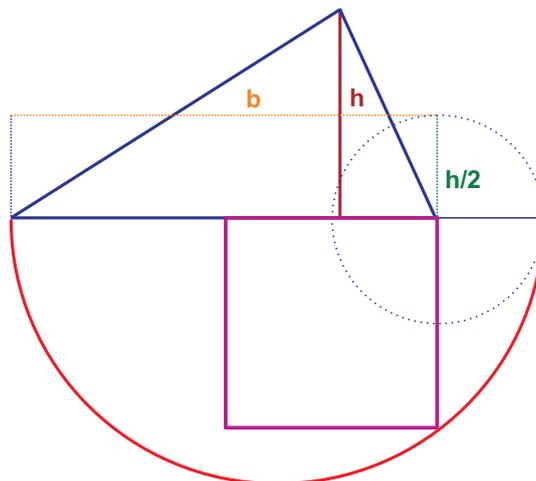


FIGURA 43: Quadratura do Triângulo

l geometricamente, basta determinar a média geométrica entre dois segmentos, por exemplo os de medida b e $\frac{h}{2}$ (lados do retângulo auxiliar). Veja Figura (43).

b) **Quadratura de um trapézio**

Para construir um quadrado de área igual a de um trapézio de bases B , b e altura h dado, basta construir a média geométrica entre os segmentos $B + b$ e $\frac{h}{2}$, os quais, como no exemplo a) são os lados de um retângulo auxiliar equivalente ao trapézio dado. Veja Figura (44).

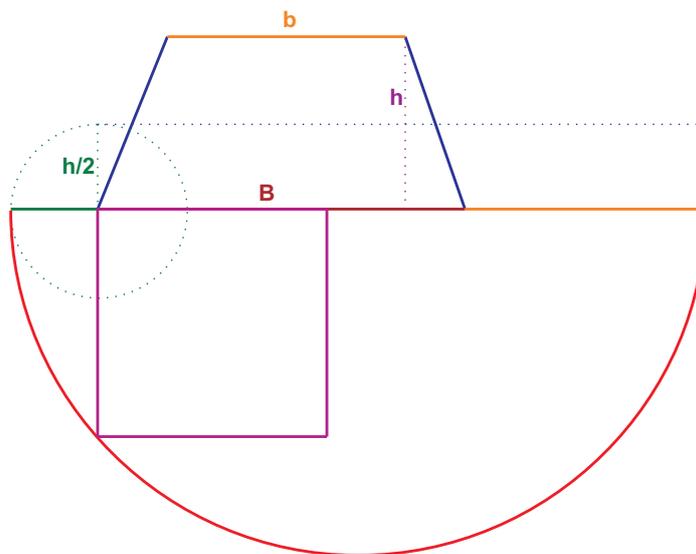


FIGURA 44: Quadratura do Trapézio

c) **Quadratura de um hexágono regular**

Dado um hexágono regular $ABCDEF$ qualquer vamos executar sua quadratura. Inicialmente construímos um paralelogramo auxiliar que seja equivalente ao hexágono dado, pois como nos exemplos a) e b) acima, a média geométrica entre a altura e a base desse paralelogramo é o lado de um quadrado que soluciona o problema.

Para isso trace s e r retas paralelas à \overleftrightarrow{BD} , passando respectivamente por F e C . Seja B' o ponto de intersecção de r com \overleftrightarrow{AB} e seja E' o ponto de intersecção de s com \overleftrightarrow{DE} . Note que $AE'DB'$ é um paralelogramo, pois do hexágono obtemos $\overleftrightarrow{AB'}$ paralelo a $\overleftrightarrow{E'D}$, ambos medindo $\frac{3}{2}$ de AB . Observe ainda que $AE'DB'$ possui a mesma área que o hexágono dado, visto que os triângulos BDC e BDB' são equivalentes e o

mesmo ocorre com os triângulos AEF e $AE'E'$, o que se justifica pela Proposição 2.1. Finalmente, construa a média geométrica entre $E'D$ e $B'D$, obtendo assim o lado do quadrado que soluciona o problema, conforme Figura (45).

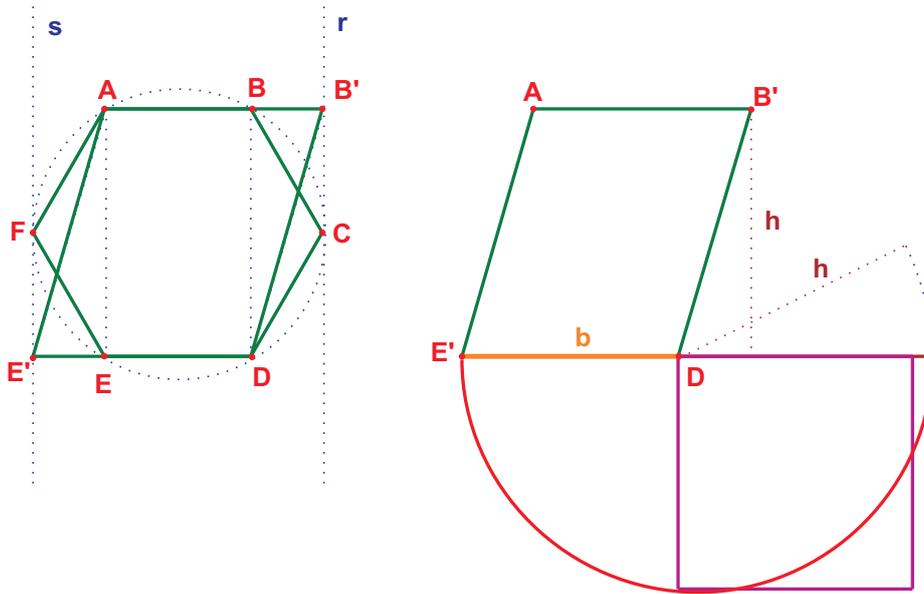


FIGURA 45: Quadratura do Hexágono

d) O caso geral: Quadratura de um polígono de n lados

Para transformar um polígono qualquer de n lados ($n \geq 4$) em um quadrado equivalente, basta observar que um polígono de n lados pode ser transformado em um polígono equivalente de $n - 1$ lados. De fato, dado um polígono qualquer $A_1A_2A_3, \dots, A_n$ (convexo ou côncavo), trace por A_1 uma paralela a A_2A_n obtendo o ponto A'_1 na reta $A_{n-1}A_n$ e como consequência da Proposição 2.1 tem-se que o polígono $A'_1A_2A_3 \dots A_{n-1}$ de $n - 1$ lados é equivalente ao polígono $A_1A_2A_3 \dots A_n$ de n lados, conforme Figura (46) e Figura (47).

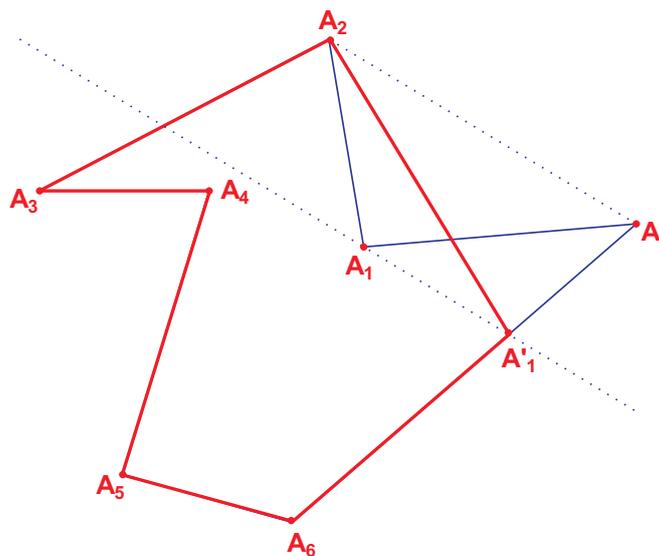


FIGURA 46: O caso côncavo

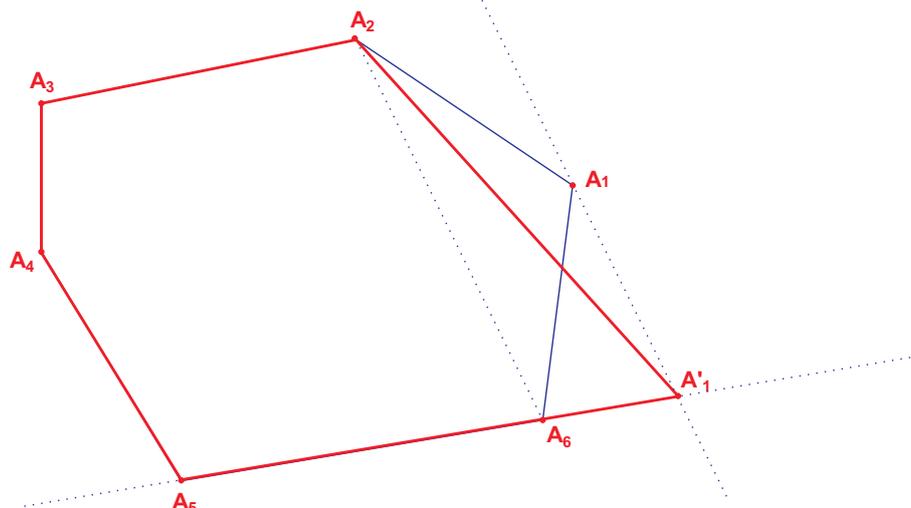


FIGURA 47: O caso convexo



FIGURA 48: Arquimedes de Siracusa

6.2 QUADRATURA DA PARÁBOLA

Arquimedes (Figura (48)), nascido por volta de 287 a.C. em Siracusa, cidade grega situada na ilha da Sicília, figura entre os maiores matemáticos de todos os tempos e considerado o maior matemático de toda a antiguidade. Com relação à sua morte, tem-se em [2] e [4] que durante a Segunda Guerra Púnica a cidade de Siracusa se viu envolvida na luta entre Roma e Cartago; tendo se associado a essa última, a cidade foi sitiada pelos romanos durante os anos de 214 a 212 a.C sob o comando do general Marcelo. Durante o cerco Arquimedes inventou engenhosas máquinas de guerra para conservar o inimigo à distância e graças à essas máquinas de defesa, Siracusa resistiu ao sítio de Roma por quase três anos. Por fim, no entanto, as defesas se romperam e Siracusa caiu. De acordo com uma versão, ele encontrou a morte durante a pilhagem da cidade, quando mergulhado em seus raciocínios, preocupava-se com um diagrama traçado num tabuleiro de areia e ordenou a um soldado romano para se afastar de seu diagrama; o saqueador, incontinentemente, teria atravessado o corpo do ancião com uma lança.

Algumas histórias pitorescas sobre Arquimedes relatadas por historiadores romanos se encontram descritas em [4]:

“...Dentre essas figuram as descrições dos engenhos criativos inventados por ele para ajudar na defesa de Siracusa... Havia catapultas móveis, de alcance ajustável, para arremessar pesos por sobre os navios inimigos que se aproximassem muito dos muros da cidade e grandes guindastes que içavam da superfície do mar esses navios. A história segundo a qual ele se utilizou de grandes espelhos ustórios para incendiar vasos de guerra inimigo tem origem posterior mas pode ser verdadeira. Há também a história de como ele fez por justificar sua afirmação, “Dê-me uma alavanca que moverei a Terra”, conseguindo mover, sozinho e sem esforço, apenas com a ajuda de um sistema de polias compostas, um navio pesadamente carregado que não podia ser retirado do cais sem grande esforço e muitos homens.

Segundo parece, Arquimedes era capaz de concentrações mentais intensas e há relatos sobre sua distração quando se enfronhava na resolução de algum problema. A repetidíssima história da coroa do rei Hierão e o ourives suspeito é típica. Pelo que consta esse ourives moldara para o rei, com um dado peso de ouro, uma coroa. Suspeitando de que pudesse haver prata oculta em meio ao ouro e não desejando desmanchar a coroa para tirar a prova, o rei encaminhou a questão a Arquimedes. E este, quando um dia se encontrava nos banhos públicos, deu com a solução, descobrindo a primeira lei da hidrostática – que um corpo, quando mergulhado num fluido, recebe um empuxo de intensidade igual ao peso do volume de água deslocado. Na sua excitação, Arquimedes teria se esquecido de vestir-se e saiu nu pelas ruas correndo para sua casa e gritando, “Eureka, eureka!” (“Achei, achei!”). Ele colocou a coroa num dos pratos de uma balança e um peso igual de ouro na outra e depois repetiu essa operação sob a água. O prato com a coroa ergueu-se, mostrando que ela continha algum material espúrio, menos denso que o ouro.”

Os trabalhos de Arquimedes são considerados verdadeiras obras-primas de exposição matemática. Um dos seus trabalhos dedicados à geometria plana e que se preservou até nossos dias é “*A Quadratura da Parábola*”, constituído de 24 proposições. Nesse tratado Arquimedes apresenta, via método de exaustão, a primeira solução para o problema da quadratura de um segmento de parábola. Carl Boyer em [2], diz que:

“...Dos tratados que se ocupavam principalmente do método de exaustão (isto é, o cálculo integral) o mais popular era *Quadratura da parábola*. As seções cônicas eram conhecidas havia já mais de um século quando Arquimedes escreveu, mas nenhum progresso fora feito no cálculo de suas áreas. Só o maior matemático da antiguidade conseguiu resolver a questão de quadrar uma seção cônica - um segmento de parábola – coisa que ele realizou na Proposição 17 da obra em que o objetivo era a quadratura. A prova pelo método de exaustão é longa e elaborada, mas Arquimedes provou rigorosamente que a área K de um segmento parabólico $APBQC$ (Figura (49)) é quatro terços da área de um triângulo T tendo a mesma base e mesma altura. Nas sete proposições seguintes (e últimas) Arquimedes deu uma segunda prova, diferente, do mesmo teorema. Primeiro mostrou que a área do maior triângulo inscrito, ABC , sobre a base AC é quatro vezes a soma dos triângulos correspondentes inscritos sobre cada um dos lados AB e BC como base. Continuando o processo sugerido por essa relação, fica claro que a área K do segmento parabólico ABC é dado pela soma da série infinita $T + \frac{T}{4} + \frac{T}{4^2} + \dots + \frac{T}{4^n} + \dots$ que vale $\frac{4}{3}T$. Arquimedes não falou em soma de série infinita, pois, processos infinitos eram mal vistos em seu tempo; em vez disso ele provou por uma dupla *reductio ad absurdum* que K não pode ser nem maior nem menor que $\frac{4}{3}T$. (Arquimedes como seus predecessores, não usou o nome *parábola*, mas a palavra *orthotome* ou secção de um cone reto).”

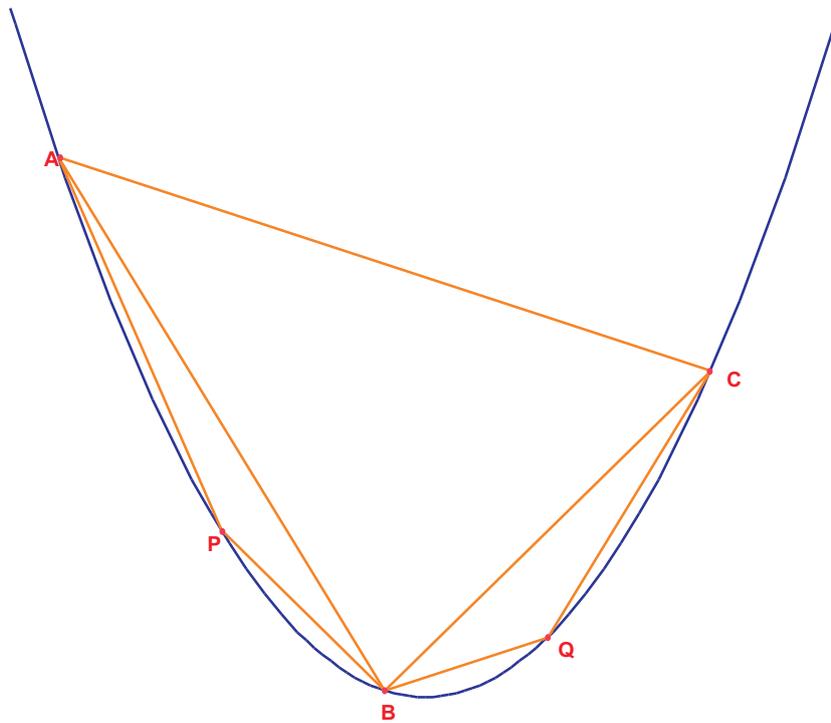


FIGURA 49: Quadratura da Parábola

Analisemos o método utilizado por Arquimedes para calcular a área de um segmento parabólico, ou seja, a área da parte da parábola compreendida pela corda arbitrária AC e pelo arco $APBQC$, conforme Figura (49), de acordo com [9].

A primeira aproximação realizada por ele foi utilizando o triângulo ABC , onde o vértice B é escolhido de tal forma que a reta tangente à parábola nesse ponto seja paralela ao segmento \overline{AC} . A segunda aproximação foi feita reunindo-se as áreas dos triângulos ABC , ABP e BCQ , onde os pontos P e Q foram escolhidos de modo que a tangente à parábola nesses pontos fosse paralela, respectivamente ao \overline{AB} e ao \overline{BC} . Na terceira aproximação ele inscreveu mais 4 novos triângulos, que foram construídos seguindo o mesmo processo de construção acima, e dessa forma a terceira aproximação é a soma das áreas dos triângulos ABC , ABP , BCQ com as áreas dos quatro novos triângulos. Prosseguindo com esse processo até “exaurir” o segmento parabólico, ele provou que a área é exatamente quatro terços da área do primeiro triângulo ABC .

A partir desse momento, denotaremos a área de um triângulo qualquer, digamos XYZ , por $S(XYZ)$. O ponto fundamental da demonstração de Arquimedes é que a soma das áreas dos triângulos ABP e BCQ é um quarto da área do triângulo ABC , ou seja:

$$S(ABP) + S(BCQ) = \frac{1}{4} S(ABC), \quad (4)$$

fato este que será provado mais adiante. Além disso, esta relação se repete em cada estágio sucessivo do processo. Assim, na terceira aproximação, a soma das áreas dos quatro novos triângulos convenientemente somadas duas a duas é

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{4} S(ABP) + \frac{1}{4} S(BCQ) \\ &= \frac{1}{4} (S(ABP) + S(BCQ)), \end{aligned}$$

que utilizando a equação (4) é

$$= \frac{1}{4^2} S(ABC);$$

e assim indefinidamente. Então, a

$$\begin{aligned} \text{Área do segmento parabólico} &= S(ABC) + \frac{1}{4} S(ABC) + \frac{1}{4^2} S(ABC) + \dots \\ &= S(ABC) \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Observe que o segundo fator desse produto é a soma de uma série geométrica infinita de razão igual à $\frac{1}{4}$. Mas,

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \dots + \frac{1}{4^n} \right) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(\frac{1 - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} \right) = \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3}$$

donde concluímos que, a

$$\text{Área do segmento parabólico} = \frac{4}{3} S(ABC).$$

Para completarmos a demonstração precisamos demonstrar o fato geométrico utilizado acima, isto é a igualdade dada pela equação (4). Para tal, podemos supor sem generalidade que escolhemos um sistema de coordenadas ortogonais de tal maneira que a parábola seja o gráfico da função $y = f(x) = ax^2$ e os pontos A e C sejam dados pelas coordenadas $A = (x_0, ax_0^2)$ e $C = (x_2, ax_2^2)$.

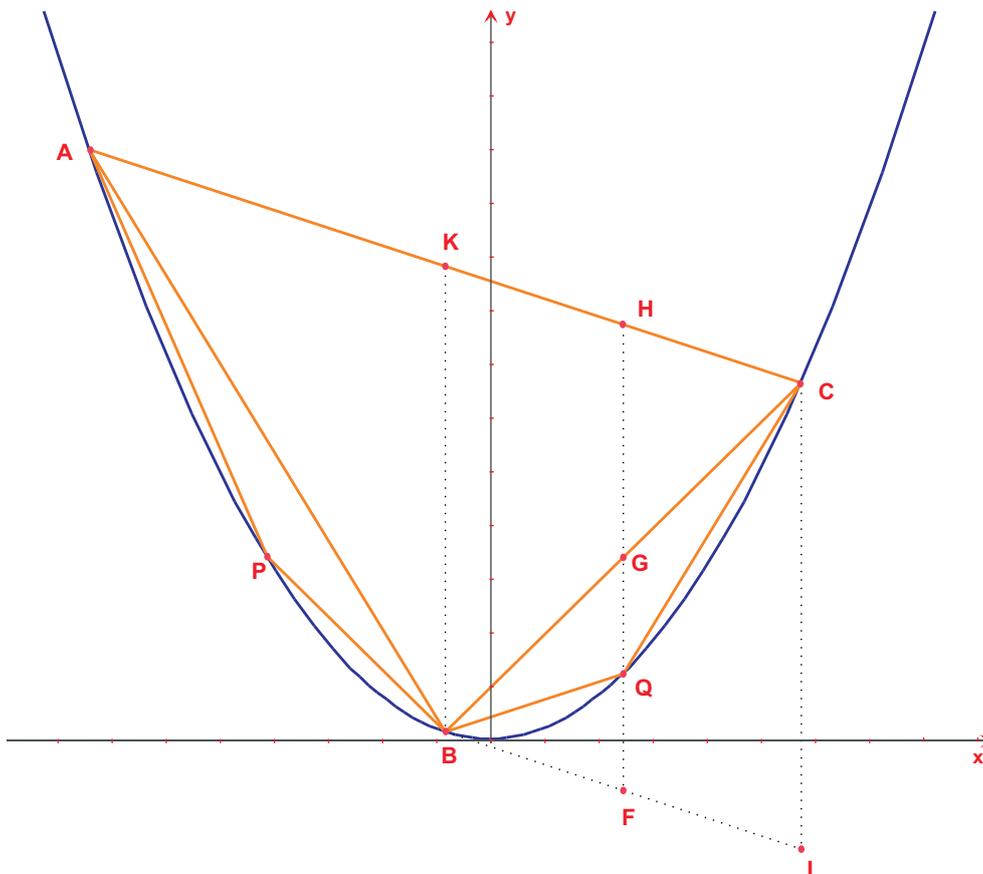


FIGURA 50: Quadratura da Parábola

Nestas condições denotemos por x_1 a abscissa do ponto B e por ax_1^2 a sua ordenada, ou seja, $B = (x_1, ax_1^2)$. Desta forma, lembrando que o ponto B foi escolhido de modo que a reta tangente fosse paralela à \overline{AC} , e lembrando também que a inclinação da reta tangente em B é $\frac{dy}{dx}(x_1) = 2ax_1$, segue que:

$$2ax_1 = \frac{ax_0^2 - ax_2^2}{x_0 - x_2} \Leftrightarrow x_1 = \frac{a[(x_0 - x_2)(x_0 + x_2)]}{2a(x_0 - x_2)} \Leftrightarrow x_1 = \frac{x_0 + x_2}{2}$$

ou seja, a reta vertical que passa por B , bissecciona a corda \overline{AC} num ponto K e então os triângulos ABK e CBK possuem a mesma área. Portanto basta provar que:

$$S(BCQ) = \frac{1}{4} S(BCK), \tag{5}$$

e de maneira análoga obtêm-se também que $S(ABP) = \frac{1}{4} S(ABK)$. Para isto, comece construindo o paralelogramo $BKCI$.

Como antes, se x_3 é a abscissa de $Q = (x_Q, y_Q)$, então o declive da tangente à parábola em Q é $2ax_3$. Mas, como Q foi escolhido de modo que a tangente em Q fosse paralela ao \overline{BC} , segue que:

$$2ax_3 = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} \Leftrightarrow x_Q = x_3 = \frac{x_2 + x_1}{2}.$$

Logo, a reta vertical por Q bissecciona a corda \overline{BC} num ponto G . Utilizando o Teorema Fundamental da Proporcionalidade segue que \overrightarrow{QG} também dividirá o lado \overline{CK} ao meio. Seja H o ponto de interseção de \overrightarrow{QG} com \overline{CK} , isto é o ponto médio de \overline{CK} .

Observe que se provarmos que

$$d(Q, G) = \frac{1}{2} d(G, H) \tag{6}$$

então segue que $S(CQG) = \frac{1}{2} S(CGH)$ (visto que os triângulos CQG e CGH possuem a mesma altura quando traçadas do vértice C) e $S(BQG) = \frac{1}{2} S(CGH)$ (pois, $S(CQG) = S(BQG)$). Daí segue que

$$S(BCQ) = S(CGH). \tag{7}$$

Considerando o triângulo BCK temos que o segmento \overline{HG} com extremidades nos pontos médios de \overline{CK} e \overline{BC} é paralelo ao terceiro lado \overline{KB} e possui metade de seu comprimento ou seja, $d(H, G) = \frac{1}{2} d(K, B)$, então

$$S(CGH) = \frac{S(BCK)}{4} \tag{8}$$

De (7) e (8), temos $S(BCQ) = \frac{S(BCK)}{4}$, o que prova (5).

Agora, para mostrar (6) é suficiente provar que $d(F, Q) = \frac{d(F, H)}{4}$, sendo $F = (x_F, y_F)$ construído de tal forma que $KHFB$ seja um paralelogramo. De fato, G é o ponto médio da diagonal \overline{CB} e então $d(Q, G) = \frac{d(G, H)}{2}$ equivale à $d(F, Q) = \frac{d(F, H)}{4}$.

Mas $d(F, Q) = \frac{d(F, H)}{4}$ equivale à $d(F, Q) = \frac{d(I, C)}{4}$. Seja então $C = (x_C, y_C)$ e $I = (x_I, y_I)$, efetuando os cálculos diretamente, obtemos:

$$\begin{aligned} d(F, Q) &= \sqrt{(x_Q - x_F)^2 + (y_Q - y_F)^2} = \sqrt{(y_Q - y_F)^2} = a(x_Q)^2 - \left(\frac{y_B + y_I}{2}\right) \\ &= a\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right)^2 - \left[\frac{ax_1^2 + ax_2^2 + 2ax_1(x_2 - x_1)}{2}\right] = \frac{a}{4}[(x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) - 4x_1^2 - 4x_1(x_2 - x_1)] \\ &= \frac{a}{4}(x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2) = \frac{a}{4}(x_1 - x_2)^2 \end{aligned}$$

e

$$d(I, C) = \sqrt{(x_C - x_I)^2 + (y_C - y_I)^2} = y_C - y_I$$

$$= ax_2^2 - [ax_1^2 + 2ax_1(x_2 - x_1)] = a(x_2^2 - x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_1^2) = a(x_1 - x_2)^2;$$

ou seja, $d(F, Q) = \frac{d(I, C)}{4}$ o que prova (6) e conclui a demonstração de (4).

6.3 QUADRATURA DAS LÚNULAS DE HIPÓCRATES

O matemático Hipócrates de Chios, Figura (51), nasceu na Grécia por volta de 430 a.C. e pouco se sabe sobre sua vida.

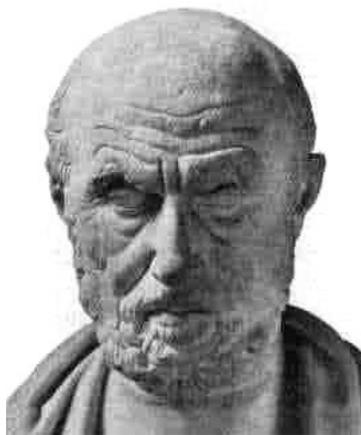


FIGURA 51: Hipócrates de Chios

Carl B. Boyer [2], nos diz:

“...Aristóteles conta que Hipócrates era menos astuto que Tales e que perdeu seu dinheiro em Bizâncio por fraude; outros dizem que foi atacado por piratas. De qualquer modo, o incidente nunca foi lamentado por sua vítima, pois considerava que isso foi sua sorte já que, em consequência ele se voltou para o estudo da geometria, em que conseguiu notável sucesso – uma estória típica de Idade Heróica. Proclus escreveu que Hipócrates compôs uma obra *Elementos da geometria*, antecipando-se por mais de um século à mais conhecida *Os elementos* de Euclides. No entanto, o texto de Hipócrates – bem como outro que se diz ter sido escrito por Leon, da platônica – se perdeu, embora Aristóteles o tenha conhecido. Na verdade nenhum tratado matemático do quinto século se conservou; mas temos um fragmento referente a Hipócrates, que Simplicio (viveu por volta de 520) diz ter copiado literalmente da *História da matemática* (hoje perdida) de Eudemo. Essa breve menção, o que de mais próximo temos de uma fonte original sobre a matemática do tempo, descreve uma parte da obra de Hipócrates que trata da quadratura de lunas.”

Uma lúnula (ou luna) é uma figura plana limitada por dois arcos circulares de raios diferentes. Mais especificamente, consideraremos apenas o caso em que ambos os arcos da lúnula situam-se do mesmo lado de uma corda comum \overline{CD} . O eixo de simetria da lúnula, ou menisco, contém os centros A e B dos arcos, assim como, os pontos médios E e F desses arcos, conforme Figura (52).

Denotando por τ a área da lúnula, por δ a área do quadrilátero $ACBD$, por a e b os raios dos círculos, 2α e 2β os ângulos centrais subtendidos pelos dois arcos, conforme Figura (52). Teremos:

$$\tau = \delta + (a^2\beta - b^2\alpha) = ab \operatorname{sen}(\beta - \alpha) + (a^2\beta - b^2\alpha) \quad (9)$$

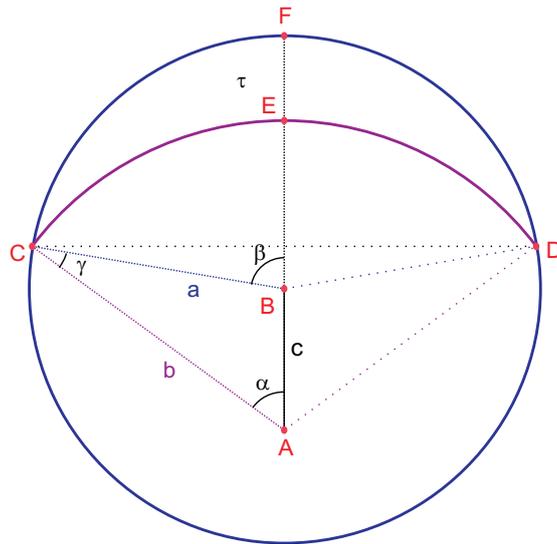


FIGURA 52: Lúnula

Certamente o problema da quadratura de lúnulas foi motivado pelo problema da quadratura do círculo que estudaremos na próxima seção. Segundo [2], Hipócrates foi quem deduziu a primeira quadratura rigorosa de uma área curvilinear, da história da Matemática: no caso a quadratura da lúnula descrita no item a) abaixo.

Outros tipos de lúnulas também foram consideradas por Hipócrates, de acordo com [10] ele limitou seu estudo a uma classe especial de lúnulas, as quais satisfazem a seguinte condição:

$$\text{Área setor } ACED = \text{Área setor } BCFD \Leftrightarrow a^2\beta = b^2\alpha$$

donde concluímos que a área de tais lúnulas é dada por

$$\tau = \delta = ab \operatorname{sen}(\beta - \alpha); \tag{10}$$

ou seja a área τ de uma tal lúnula é igual a área do quadrilátero $ACBD$. Ainda mais, aplicando a Lei dos Senos ao triângulo ABC temos que uma tal lúnula satisfaz a relação

$$\frac{a}{b} = \frac{\operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen} \beta} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} \tag{11}$$

Passaremos a descrever agora as quadraturas das lúnulas consideradas por Hipócrates:

- a) Trace um círculo de centro em O e considere dois diâmetros perpendiculares \overline{AB} e \overline{CD} . Trace o arco circular com centro em C unindo A e B determinando um arco circular AEB . Então a região limitada pelos arcos ADB e AEB , isto é a lúnula (de Hipócrates) $AEBD$ tem área igual à do triângulo ABD , veja Figura (53).

Demonstração

As cordas \overline{DA} e \overline{DB} são tangentes ao arco AEB e dividem a lúnula $AEBD$ em três regiões com áreas a_1 , a_2 e a_3 , conforme Figura (53).

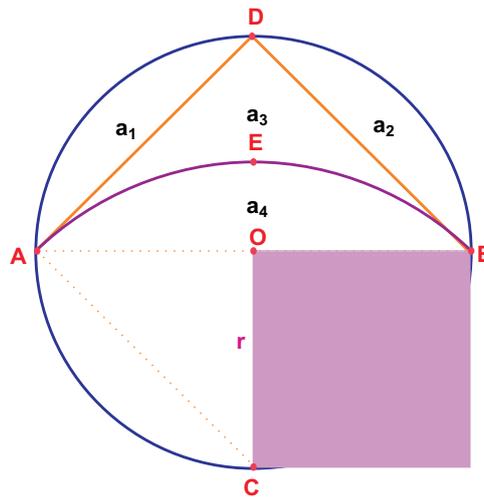


FIGURA 53: Lúnula Caso a)

Seja r o raio do círculo que passa por A , B e D . Utilizando o Teorema de Pitágoras segue que:

$$r^2 + r^2 = d(A, C)^2 \Leftrightarrow d(A, C) = r\sqrt{2},$$

ou seja, o raio do círculo maior (círculo de centro C passando por A e B) é $r\sqrt{2}$.

Note que \overline{DA} e \overline{DB} são cordas congruentes do círculo de raio r e que \overline{AB} é uma corda do círculo de raio $r\sqrt{2}$, todos com ângulos centrais retos (visto que o triângulo ACB está inscrito em uma semicircunferência e por construção \overline{AB} e \overline{CD} são diâmetros perpendiculares). Então, utilizando 4.1 segue:

$$\frac{a_1}{a_4} = \frac{a_2}{a_4} = \frac{r^2}{(\sqrt{2}r)^2} = \frac{1}{2} \Rightarrow a_1 = \frac{1}{2} a_4 \text{ e } a_2 = \frac{1}{2} a_4.$$

Logo, $a_1 + a_2 = a_4$. Daí tem-se:

$$\begin{aligned} \text{Área da lúnula } AEED &= (a_1 + a_2) + a_3 \\ &= a_4 + a_3 \\ &= \text{área do triângulo } ABD \\ &= r^2 \end{aligned}$$

Portanto, para realizar a quadratura da lúnula $AEED$ basta construir um quadrado de lado r , como por exemplo o quadrado de lados \overline{OB} e \overline{OC} hachurado na Figura (53).

Observe que, denotando $\alpha = m(\widehat{ACO})$, $\beta = m(\widehat{AOD})$ e $\gamma = m(\widehat{CAD})$, tem-se $\beta = 2\alpha$, pois $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$. Além disso, como β é ângulo externo do triângulo AOC tem-se $\beta = \gamma + \alpha$, e então, $\gamma = 45^\circ$. Assim sendo, temos que $a^2\beta = 90r^2$ e $b^2\alpha = 45(r\sqrt{2})^2$, logo a lúnula $AEED$ satisfaz a condição especial $a^2\beta = b^2\alpha$. Então, utilizando 10 obtemos:

$$\tau = r(\sqrt{2}r)\text{sen}(\beta - \alpha) = r^2\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right) = r^2$$

■

- b) Construa um trapézio isósceles $CDNM$ inscrito num círculo de modo que o quadrado sobre o lado maior \overline{CD} seja igual (em área) à soma dos quadrados sobre os três lados menores congruentes \overline{CM} , \overline{MN} e \overline{ND} , isto é, de modo que a razão entre o quadrado da base maior e o quadrado de cada lado congruente do trapézio seja de 3 para 1. Então se construirmos sobre \overline{CD} um segmento circular CED (ver definição em 4.1) equivalente aos que estão sobre os três lados congruentes, a lúnula $CMNDE$ é equivalente ao

trapézio $CDNM$, veja Figura (54).

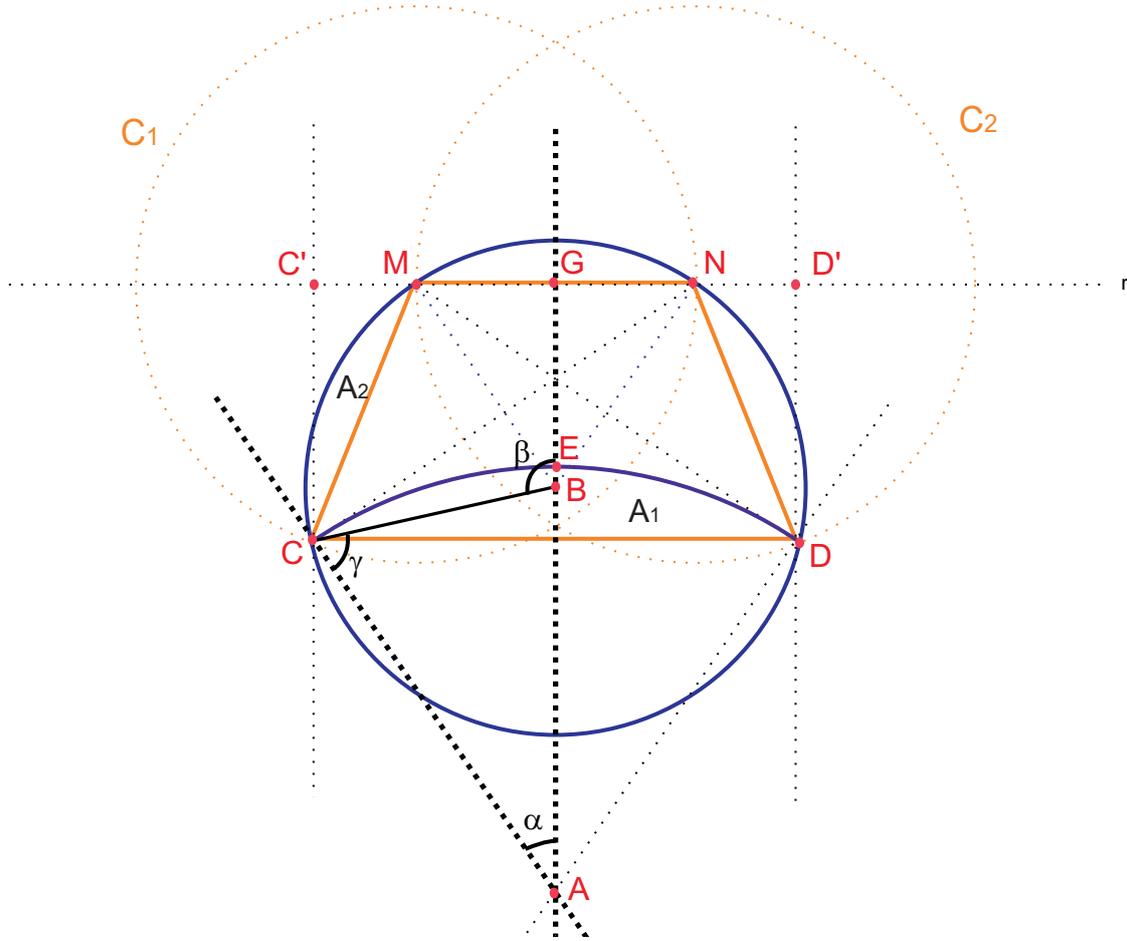


FIGURA 54: Lúnula Caso b)

Construção: Vamos denotar

$$d(C, M) = d(M, N) = d(N, D) = u = 1. \quad (12)$$

Como $d(C, D)^2$ é igual à soma dos quadrados das medidas dos três lados congruentes, ou seja,

$$[d(C, D)]^2 = [d(C, M)]^2 + [d(M, N)]^2 + [d(N, D)]^2,$$

segue utilizando (12) que: $d(C, D) = \sqrt{3}$. Seja r uma reta qualquer, construa sobre r um segmento unitário \overline{MN} . Encontre o ponto médio de \overline{MN} e chame-o de G , agora trace uma circunferência de centro em G e raio $\frac{\sqrt{3}}{2}$, sejam C' e D' os pontos de interseções dessa circunferência com a reta r .

Trace duas circunferências C_1 e C_2 de modo que C_1 tenha centro em M , C_2 tenha centro em N e as duas tenham raios unitários. Construa uma perpendicular a r passando por C' , sendo C o ponto de interseção dessa perpendicular com C_1 e construa outra reta perpendicular a r passando por D' , sendo D o ponto de interseção dessa reta com C_2 . O trapézio $CDNM$ satisfaz as condições requeridas.

Agora, para determinar o centro B do círculo que circunscreve o trapézio basta traçar as bissetrizes dos ângulos \widehat{CMN} e \widehat{MND} . E, para determinar o centro A do arco que passa por C e D basta traçar a perpendicular ao \overline{CN} passando por C e a perpendicular ao \overline{DM} passando por D e denotar por A o ponto de interseção dessas perpendiculares.

Demonstração

Seja $\alpha = m(\widehat{CAB})$, $\beta = m(\widehat{CBG})$ e $\gamma = m(\widehat{ACB})$. Primeiramente vamos mostrar que $\beta = 3\alpha$ e $\gamma = 2\alpha$.

Observe que $m(\widehat{CNM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CM}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CBM})$. Também, \overline{MB} é perpendicular à \overline{CN} (pois, $\widehat{CMB} \cong \widehat{BMN}$ e o triângulo CMN é isósceles de base \overline{CN}), e então $m(\widehat{CBM}) + m(\widehat{BCN}) = 90^\circ$. Além disso, por construção, $m(\widehat{NCA}) = 90^\circ$ daí tem-se $m(\widehat{ACB}) + m(\widehat{BCN}) = 90^\circ$. Segue que:

$$2m(\widehat{CNM}) = m(\widehat{CBM}) = m(\widehat{ACB}) = \gamma. \tag{13}$$

Agora, G é o ponto médio de \overline{MN} , e o triângulo MGB é retângulo em \widehat{G} , visto que \overline{BG} é a altura relativa a base do triângulo isósceles MNB . Então $m(\widehat{MBG}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MBN}) = \frac{1}{2} m(\widehat{MN}) = \frac{1}{2} m(\widehat{CM}) = m(\widehat{CNM})$. Logo, daí e de (13) tem-se:

$$\beta = m(\widehat{CBG}) = m(\widehat{CBM}) + m(\widehat{MBG}) = 2m(\widehat{CNM}) + m(\widehat{CNM}) = 3m(\widehat{CNM}). \tag{14}$$

Falta mostrar que $m(\widehat{CNM}) = \alpha$. Para isso, basta observar que β é ângulo externo do triângulo ACB e então, $\beta = \alpha + \gamma$. Usando então que $\beta = 3m(\widehat{CNM})$, $\gamma = 2m(\widehat{CNM})$, vêm que:

$$\beta = \alpha + \gamma \Rightarrow 3m(\widehat{CNM}) = \alpha + 2m(\widehat{CNM}) \Rightarrow \alpha = m(\widehat{CNM})$$

Para ver que a área da região curvilínea A_1 compreendida entre a corda \overline{CD} e o arco \widehat{CED} é três vezes a área da região curvilínea A_2 compreendida entre a corda \overline{CM} e o arco menor \widehat{CM} de centro em B , basta observar que $\triangle MBN \approx \triangle CAD$ (caso A.A.; visto que ambos os triângulos são isósceles, $m(\widehat{MBG}) = m(\widehat{CBG}) - m(\widehat{CBM}) = \beta - \gamma = 3\alpha - 2\alpha = \alpha$), segue que $\frac{d(M, B)}{d(M, N)} = \frac{d(C, A)}{d(C, D)} \Rightarrow \frac{d(M, B)}{1} = \frac{d(C, A)}{\sqrt{3}} \Rightarrow d(C, A) = \sqrt{3}d(M, B) = \sqrt{3}d(C, B)$. Então, utilizando (4.1), segue:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{d(C, A)^2}{d(C, B)^2} = 3 \Rightarrow A_1 = 3A_2. \tag{15}$$

Portanto, para quadrar a lúnula $CMNDE$ basta quadrar o trapézio $CDNM$, veja quadratura do trapézio na seção (6.1) caso b).

Das relações $\beta = 3\alpha$ e

$$\frac{a}{b} = \sqrt{\frac{\alpha}{3\alpha}} \Rightarrow b = a\sqrt{3} \tag{16}$$

segue que a lúnula $CMNDE$ satisfaz a condição especial $a^2\beta = b^2\alpha$, e então podemos calcular sua área utilizando a equação (10).

Utilizando a relação (11) temos que $\text{sen}(3\alpha) = \sqrt{3}\text{sen}\alpha$ e note que $\text{sen}(3\alpha)$ pode ser substituído por $3\text{sen}\alpha - 4(\text{sen}\alpha)^3$. Resolvendo essa equação cúbica e eliminando a solução trivial obtemos: $\text{sen}\alpha = \frac{1}{2}\sqrt{3 - \sqrt{3}}$. Segue daí e de (16) que a área da lúnula será:

$$\tau = \text{absen}(2\alpha) = 2a^2\sqrt{3} \text{sen}\alpha \cos\alpha = a^2 3^{\frac{3}{4}} 2^{-\frac{1}{2}}$$



- c) De acordo com [11] essa lúnula responde aos mesmos requisitos das outras duas abordadas anteriormente com a diferença de que em lugar de um triângulo ou de um quadrilátero, considera-se um pentágono côncavo no qual três lados congruentes formam uma poligonal inscrita no arco maior da lúnula, e cada um dos outros dois, congruentes entre si e inscritos no arco menor, são iguais em potência a $\frac{3}{2}$ dos anterio-

res (isto é, o quadrado do comprimento do lado do pentágono inscrito no arco menor é $\frac{3}{2}$ do quadrado do comprimento do lado inscrito no arco maior da lúnula). Nessas condições a área da lúnula é equivalente à do pentágono.

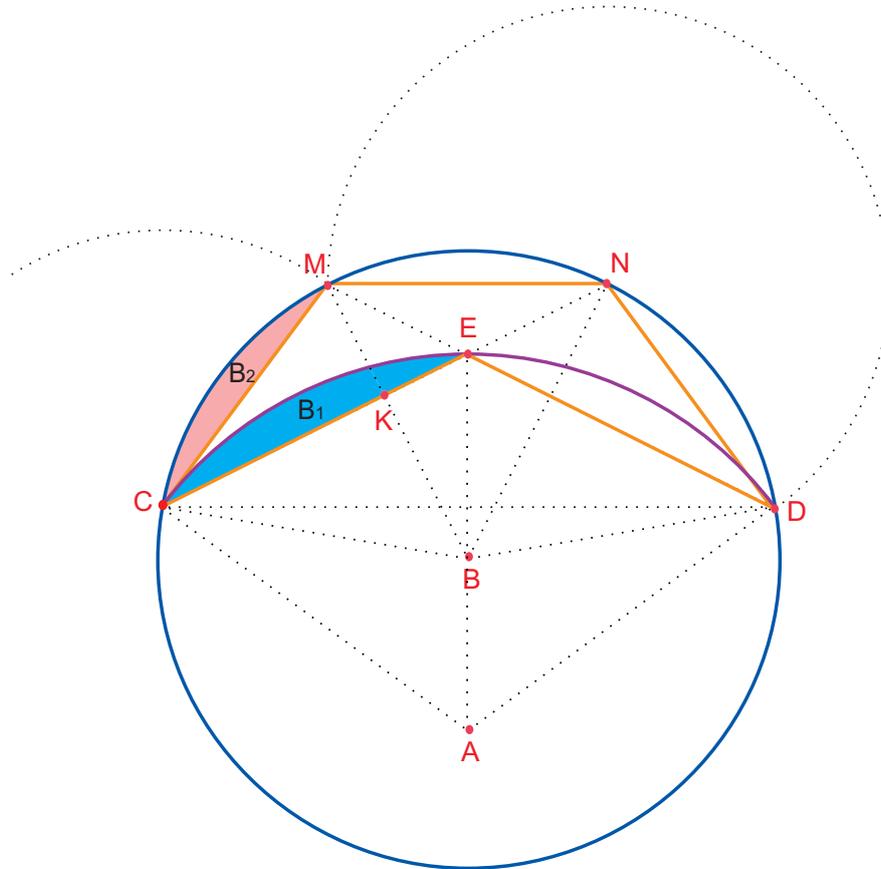


FIGURA 55: Lúnula Caso c)

Construção: Construa três pontos colineares C , E e N de maneira que

$$d(C, N) - d(E, N) = d(C, E) = \sqrt{3} \tag{17}$$

e

$$d(C, N) \cdot d(E, N) = [d(N, D)]^2 = 2, \tag{18}$$

Observe que (17) e (18) implicam que

$$[d(C, E) + d(E, N)] \cdot d(E, N) = [d(N, D)]^2 \Rightarrow [d(E, N)]^2 + \sqrt{3} d(E, N) - 2 = 0$$

Resolvendo essa equação quadrática e eliminando a solução negativa obtemos:

$$d(E, N) = \frac{\sqrt{11} - \sqrt{3}}{2}$$

Para determinar os demais vértices M e D do pentágono côncavo proceda como segue. Construa duas circunferências de raio $\sqrt{2}$ uma de centro em C e outra com centro em N , e seja M um dos pontos de interseção destas duas circunferências. O ponto D pode ser encontrado como interseção da semirreta \overrightarrow{ME} com a circunferência de centro em N e raio $\sqrt{2}$.

O ponto B do arco circular que passa por $CMND$ (arco maior da lúnula) é determinado como sendo a interseção das mediatrizes dos segmentos \overline{CN} e \overline{DM} , e o centro A do arco circular que passa por CED (arco menor da lúnula) é obtido como interseção

da perpendicular à \overline{DN} passando por D com a perpendicular à \overline{CM} passando por C . Afirmamos que o pentágono côncavo $CEDNM$ e a lúnula correspondente, construídos nas condições acima satisfazem as propriedades requeridas.

Note que a motivação para construir os pontos C , E e N satisfazendo as equações (17) e (18) se fundamenta na Figura (55) ao imaginarmos o problema resolvido de tal forma que o arco interno \widehat{CED} da lúnula seja tangente aos lados \overline{CM} e \overline{ND} do pentágono inscrito no arco maior da lúnula.

Demonstração

Seja $\theta = m(\widehat{MDN})$ daí como o triângulo MND é isósceles de base \overline{MD} segue que $\theta = m(\widehat{MDN}) = m(\widehat{DMN})$, então tem-se, $\theta = \frac{1}{2} m(\widehat{MN})$.

Seja $\lambda = m(\widehat{EDC})$ e como o triângulo ECD é isósceles de base \overline{CD} segue que $\lambda = m(\widehat{EDC}) = m(\widehat{ECD})$, então $\lambda = \frac{1}{2} m(\widehat{ND})$. Observe que $m(\widehat{MN}) = m(\widehat{ND})$, pois em uma mesma circunferência duas cordas são congruentes se, e somente se, são congruentes os arcos menores correspondentes e lembre-se que $\overline{MN} \cong \overline{ND}$ por construção. Logo, temos que $\theta = \lambda$.

Sendo $\alpha = m(\widehat{CAE})$ temos que $\alpha = m(\widehat{CE})$, pois é ângulo central. Mas, $\lambda = \frac{m(\widehat{CE})}{2}$ pois é ângulo inscrito; ambos relativos à circunferência de centro A e raio \overline{CA} . Então $\theta = \lambda = \frac{\alpha}{2}$.

Temos também que $m(\widehat{CBM}) = m(\widehat{CM})$ pois é ângulo central e $\frac{\alpha}{2} = \lambda = \frac{m(\widehat{CM})}{2}$ pois é ângulo inscrito, ambos relativos à circunferência de centro B e raio \overline{CB} ; daí concluímos que $\alpha = m(\widehat{CM}) = m(\widehat{CBM})$.

Analisando o triângulo BCK note que, por construção, $m(\widehat{BKC}) = 90^\circ$ e então: $\frac{\alpha}{2} + m(\widehat{DCB}) + \alpha = 90^\circ$. E como, por construção, $\overline{CM} \perp \overline{CA}$ segue que: $\gamma + m(\widehat{DCB}) + \alpha = 90^\circ$ sendo $\gamma = m(\widehat{BCA})$. Concluímos então que $\frac{\alpha}{2} = \gamma$, ou equivalentemente $\alpha = 2\gamma$, e conseqüentemente, sendo $\beta = m(\widehat{BCE})$ ângulo externo ao $\triangle ABC$, portanto $\beta = \alpha + \gamma$ segue que $\beta = 3\gamma$.

Para ver que duas vezes a área da região curvilínea B_1 compreendida entre a corda \overline{CE} e o arco \widehat{CED} é três vezes a área da região curvilínea B_2 compreendida entre a corda \overline{CM} e o arco menor \widehat{CM} de centro B , basta observar, que como $m(\widehat{CBM}) = \alpha = m(\widehat{CAE})$ segue pela Proposição 4.1 que

$$\frac{B_1}{B_2} = \frac{d(C, E)^2}{d(C, M)^2} = \frac{3}{2} \Rightarrow 2B_1 = 3B_2,$$

sendo B_1 e B_2 as áreas hachuradas na Figura (55).

Portanto, para quadrar a lúnula $CMNDE$ basta quadrar o pentágono, veja quadratura do pentágono na sessão 6.1 caso d).

Observe que: Área setor CADE = Área setor CBDNM ou seja, $b^2\alpha = a^2\beta$, visto que $\beta = 3\gamma$, $\alpha = 2\gamma$ e da equação 11 tem-se $a^2 = \frac{2b^2}{3}$. Portanto a lúnula é quadrável e sua área é então dada por $\tau = absen(\beta - \alpha)$ que pode ser calculada como abaixo.

Utilizando a relação (11), obtemos que $\sqrt{2}sen(3\gamma) = \sqrt{3}sen(2\gamma)$, substituindo $sen(3\gamma)$ por $3sen\gamma cos^2\gamma - sen^3\gamma$ obteremos $4cos^2\gamma - \sqrt{6}cos\gamma - 1 = 0$, resolvendo essa equação quadrática concluímos que $cos\gamma = \frac{\sqrt{22} + \sqrt{6}}{8}$.

Logo utilizando (9) temos que a área da lúnula $CMNDE$ é:

$$\tau = ab \operatorname{sen}(\beta - \alpha) = a \left(\frac{\sqrt{3}a}{\sqrt{2}} \right) (\operatorname{sen}\gamma) = \frac{a^2}{8} \sqrt{54 - 6\sqrt{33}}$$

■

Em [2] o autor menciona mais duas quadraturas além das descritas acima:

“ O fato de que outros estudiosos, além de Simplicius, também se referem a esse trabalho indica que estamos sobre terreno firme, historicamente falando, ao descrever a quadratura de lunas de Hipócrates. Simplicius viveu no sexto século, mas apoiou-se não só em Eudemo (viveu por volta de 320 A. C.), mas também em Alexandre de Afrodisias (viveu por volta de 200 D. C.) um dos mais importantes comentadores de Aristóteles. Alexandre descreve duas quadraturas além das mencionadas acima.”

A saber:

- d) Seja AOB um quadrante de um círculo, tomando AB como diâmetro, trace o semicírculo AEB voltado para fora do quadrante. Então a lúnula $AEBF$ limitada pelo arco AFB determinado pelo quadrante e pelo semicírculo AEB tem área igual a do triângulo AOB . Veja Figura (56).

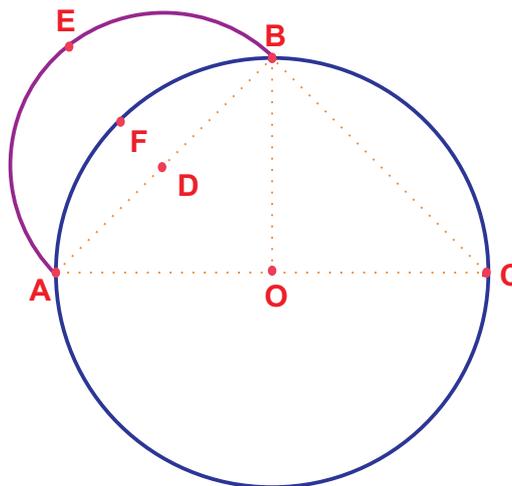


FIGURA 56: Lúnula Caso d)

Demonstração

Seja D o centro do semicírculo construído para fora do quadrante. Note que o triângulo ABC é retângulo em B , pois está inscrito na semicircunferência de diâmetro \overline{AC} . Assim, aplicando o Teorema de Pitágoras para esse triângulo: $d(A, B)^2 + d(B, C)^2 = d(C, A)^2$ que junto com o fato do triângulo ABC ser isósceles de base \overline{AC} resulta em $2d(A, B)^2 = d(C, A)^2$.

Utilizando a Proposição 4.1, tem-se que:

$$\frac{\text{Área do semicírculo } AEB}{\text{Área do semicírculo } ABC} = \frac{\left[\frac{d(A, B)}{2} \right]^2}{\left[\frac{d(A, C)}{2} \right]^2} = \frac{[d(A, B)]^2}{[d(A, C)]^2} = \frac{[d(A, B)]^2}{2[d(A, B)]^2} = \frac{1}{2}$$

Segue daí que :

$$\text{Área do semicírculo } AEB = \frac{1}{2} \text{ Área do semi-círculo } ABC \tag{19}$$

Observe que:

$$\text{Área do quadrante } AOB = \frac{1}{2} \text{Área do semicírculo } ABC \tag{20}$$

Então de (19) e (20) resulta que:

$$\text{Área do quadrante } AOB = \text{Área do semicírculo } ABE$$

Segue portanto que:

$$\text{Área do triângulo } AOB = \text{Área da lúnula } AEBF$$

Logo, quadrar a lúnula $AEBF$ é equivalente à quadrar o triângulo ABO . Lembramos que uma solução para o problema da quadratura de um triângulo encontra-se na sessão (6.1) item a). ■

Carl B. Boyer em [2] descreve também uma relação envolvendo a área de uma outra lúnula de Hipócrates, não mencionada acima, a saber:

- e) Seja $ABCD$ um semi-hexágono regular inscrito num círculo de diâmetro \overline{AD} . Construa a lúnula $AXBZ$ descrevendo exteriormente o semicírculo de diâmetro AB conforme Figura (57). Então, a área do trapézio $ABCD$ é a soma do triplo da área da lúnula $AXBZ$ com a área do semicírculo de diâmetro \overline{AB} .

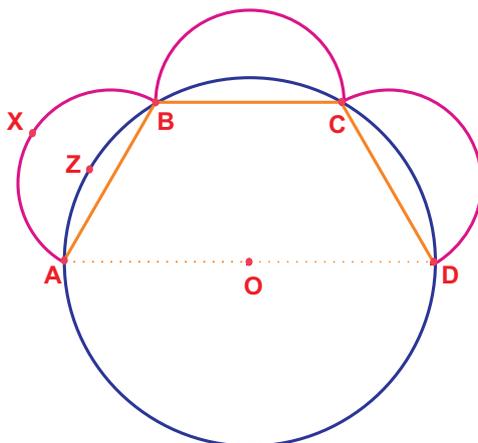


FIGURA 57: Lúnula Caso e)

Demonstração

Sabemos que:

$$\begin{aligned} &\text{Área do trapézio } ABCD + 3 \text{Área semicírculo } AXB \\ &= \text{Área semicírculo } ABCD + 3 \text{Área da lúnula } AXBZ \end{aligned}$$

Lembrando que o lado do hexágono regular inscrito numa circunferência é a medida de seu raio temos $d(A, B) = d(A, O)$, ou seja $\overline{AB} \cong \overline{AO}$, então utilizando a Proposição (4.1) segue que:

$$\frac{\text{Área semicírculo } AXB}{\text{Área semicírculo } ABCD} = \frac{\left[\frac{d(A, B)}{2}\right]^2}{[d(A, O)]^2} = \frac{1}{4},$$

Portanto,

$$\text{Área semicírculo } AXB = \frac{1}{4} \text{Área semicírculo } ABCD$$

Daí:

$$\begin{aligned} & \text{Área do trapézio } ABCD + 3\text{Área semicírculo } AXB \\ & = 4\text{Área semicírculo } AXB + 3\text{Área da lúnula } AXBZ \end{aligned}$$

Logo, a área do trapézio $ABCD$ é a soma do triplo da área da lúnula $AXBZ$ com a área do semicírculo de diâmetro \overline{AB} . ■

Note que, se fosse possível realizar a quadratura dessa lúnula, então o semicírculo – e consequentemente o círculo – também seria quadrável. Segundo Carl B. Boyer em [2]:

“...Essa conclusão parece ter encorajado Hipócrates, bem como seus contemporâneos, a pensar que algum dia se conseguiria quadrar o círculo...”

Há três opiniões quanto ao que Hipócrates deduziu de suas quadraturas de lunas. Alguns acham que ele acreditou poder quadrar todas as lunas, logo também o círculo; outros acham que ele percebia as limitações de sua obra, que lidava só com certos tipos de lunas. E pelo menos um estudioso afirmou que Hipócrates sabia não ter quadrado o círculo mas tentou enganar seus compatriotas, fazendo-os acreditar que tinha tido sucesso.”

Muito embora, faltem elementos para determinar em que medida Hipócrates estimou ter encontrado uma solução para o problema da quadratura do círculo, é importante registrar o comentário que se encontra em [2]:

“As quadraturas de Hipócrates são significativas não tanto como tentativas de quadrar o círculo mas como indicações do nível da matemática na época; mostram que os matemáticos atenienses eram hábeis no tratar transformações de áreas e proporções.”

6.4 QUADRATURA DO CÍRCULO

Os matemáticos da Grécia Antiga nos legaram três problemas famosos (ou clássicos) de Geometria que muito contribuíram para o desenvolvimento da Matemática. Eles são problemas de construções geométricas que resistiram à todas as tentativas de soluções, sob a limitação auto-imposta de se usarem apenas os instrumentos euclidianos: a régua não graduada e o compasso. A saber:

- 1) A *duplicação do cubo*, ou seja, o problema da construção da aresta de um cubo, cujo volume é o dobro do volume de um cubo cuja aresta é dada;
- 2) A *triseção de um ângulo*, ou seja, o problema de dividir um ângulo dado qualquer em três partes iguais (isto é, em três ângulos congruentes cuja soma é o ângulo dado);
- 3) A *quadratura de um círculo*, ou seja, o problema de construir um quadrado cuja área é a mesma de um círculo dado.

Somente no século *XIX*, mais de dois milênios depois de os três problemas terem sido concebidos, se estabeleceu a impossibilidade das três construções geométricas via a metodologia régua-compasso. A busca de soluções para esses problemas levou a muitas descobertas frutíferas, influenciou profundamente a geometria: estimulou a criação de novas teorias e motivou o aparecimento de diversas curvas transcendentais (não algébricas).

Nossa contribuição nesse trabalho é modesta, consiste apenas em descrever duas soluções não euclidianas do problema da quadratura do círculo apresentados por matemáticos da antiguidade grega, claro que utilizando métodos não restritos, isto é com o auxílio de outras curvas (no caso curvas transcendentais) e construções que não podem ser obtidas

somente com a metodologia régua-compasso. Mais especificamente, na sequência abordaremos a solução apresentada por Hípias de Elis através da curva quadratriz cujo processo de construção é descrito por via cinemática; em seguida descrevemos a solução dada por Arquimedes de Siracusa que utiliza a espiral que leva seu nome (espiral de Arquimedes).

6.4.1 QUADRATRIZ

Hípias de Elis (460 a. C. aproximadamente) inventou uma curva transcendente que ficou conhecida como quadratriz ou trissectriz de Hípias, por meio da qual pode-se resolver dois dos problemas clássicos: o problema da trisseção do ângulo (na verdade, essa curva não só trissecciona um ângulo dado mas, mais geralmente, multissecciona-o num número qualquer de parte) e o da quadratura do círculo.

Esta curva pode ser definida como segue: seja $ABCD$ um quadrado, como na Figura (58). Suponha que o lado \overline{AB} seja deslocado para baixo uniformemente e paralelamente a si mesmo a partir de sua posição inicial até coincidir com \overline{DC} . Ao mesmo tempo o lado \overline{DA} gira uniformemente em torno de D em sentido horário de sua posição inicial até coincidir com \overline{DC} . Suponha ainda que os dois movimentos estão sincronizados de tal forma que ambos os lados, \overline{AB} e \overline{DA} coincidam com \overline{DC} no mesmo instante de tempo. O lugar descrito pelas interseções destes dois lados móveis do quadrado durante o período de movimento é a quadratriz de Hípias.

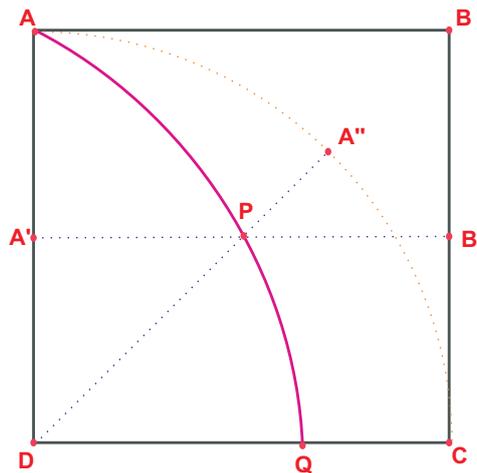


FIGURA 58: Quadratriz

Denotando os lados móveis do quadrado em um instante fixado qualquer respectivamente por $\overline{A'B'}$ e $\overline{DA''}$, conforme Figura (58), temos pela proporcionalidade dos dois movimentos que o ponto P de interseção de $\overline{A'B'}$ e $\overline{DA''}$ satisfaz a seguinte relação:

$$\frac{d(A, D)}{d(A', D)} = \frac{m(\widehat{AC})}{m(\widehat{A''C})}$$

ou seja,

$$\frac{a}{r \operatorname{sen} \theta} = \frac{(\pi/2)a}{\theta a},$$

onde a é o comprimento do lado do quadrado $ABCD$, θ é o ângulo entre \overrightarrow{DP} e \overrightarrow{DC} e $r = d(D, P)$. Isto é, a equação polar da quadratriz relativa ao quadrado de lado a , considerando o pólo em D e o eixo polar dado por \overrightarrow{DC} é:

$$\pi r \operatorname{sen} \theta = 2a\theta, \quad 0 < \theta \leq \frac{\pi}{2}$$

Esta curva foi criada por Hípias de Elis originariamente em suas tentativas de trisseccionar um ângulo. Mas tudo indica que foi Dinóstrato (c. 350 a. C.) quem pela primeira vez usou esta curva para realizar a quadratura do círculo. De acordo com [2] temos:

“A quadratura tornou-se uma questão simples quando foi observada uma propriedade da extremidade Q da quadratriz, onde Q é a intersecção da quadratriz com o lado \overline{DC} do quadrado associado à curva, conforme Figura [58], aparentemente por Dinóstrato. Se a equação da trissectriz é $\pi r \text{sen} \theta = 2a\theta$, onde a é o lado do quadrado $ABCD$ associado à curva, então o limite de r quando θ tende a zero é $2a/\pi$.”

Portanto o comprimento do segmento DQ é $\frac{2a}{\pi}$. Essa afirmação segue facilmente se utilizarmos Cálculo Diferencial elementar. De fato:

$$d(D, Q) = \lim_{\theta \rightarrow 0} r = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{2a\theta}{\pi \text{sen} \theta} = \frac{2a}{\pi} \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{\text{sen} \theta}{\theta}} = \frac{2a}{\pi},$$

visto que $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\text{sen} \theta}{\theta} = 1$ (Limite Fundamental).

Agora, uma vez construído o segmento \overline{DQ} de comprimento $\frac{2a}{\pi}$ pode-se, utilizando apenas régua e compasso dividir $\frac{2a}{\pi}$ por $2a$, e em seguida tomar o inverso de $\frac{1}{\pi}$, constrói-se assim o número π e conseqüentemente soluciona-se o problema da quadratura do círculo.

Mas, a prova dada por Pappus (c. 300) e provavelmente feita por Dinóstrato, baseia-se apenas em considerações de geometria elementar. Afirma essencialmente que o lado a é a média geométrica entre o segmento DQ e o arco AC , ou seja,

$$\frac{m(\widehat{AC})}{d(A, B)} = \frac{d(A, B)}{d(D, Q)},$$

ou ainda equivalentemente, que \overline{DQ} é a 3ª proporcional entre o arco AC e o lado a do quadrado $ABCD$ nessa ordem. Ele realiza a prova por dupla redução ao absurdo, prova indireta tipicamente grega, que pode ser vista abaixo.

- i) Suponha por absurdo que $\frac{m(\widehat{AC})}{d(A, B)} = \frac{d(A, B)}{d(D, R)}$ sendo $d(D, R) > d(D, Q)$. Trace uma circunferência com centro em D e raio \overline{DR} , sejam de T e R os pontos de interseções dessa circunferência com \overline{AD} e \overline{DC} , respectivamente. Seja S o ponto de intersecção entre a quadratriz e a circunferência construída (esse ponto existe pois $d(D, R) > d(D, Q)$). Trace a perpendicular à \overline{DC} passando por S e seja U o ponto de intersecção dessa perpendicular com \overline{DC} .

Nessas condições, Dinóstrato afirmou que $\frac{m(\widehat{AC})}{d(A, B)} = \frac{m(\widehat{TR})}{d(D, R)}$, pois sabia que os arcos de círculos correspondentes são proporcionais aos raios. Utilizando então a

hipótese $\frac{m(\widehat{AC})}{d(A, B)} = \frac{d(A, B)}{d(D, R)}$ segue que $m(\widehat{TR}) = d(A, B)$. Mas, da propriedade que define a quadratriz tem-se $\frac{d(A, B)}{d(S, U)} = \frac{m(\widehat{TR})}{m(\widehat{SR})}$ e como $m(\widehat{TR}) = d(A, B)$ segue que $m(\widehat{SR}) =$

$d(S, U)$ o que é uma contradição, visto que $m(\widehat{SR}) > d(S, U)$. Logo, a 3ª proporcional \overline{DR} entre $m(\widehat{AC})$ e $d(A, B)$, nessa ordem, não pode ser maior que $d(D, Q)$.

- ii) Suponha por absurdo que $\frac{m(\widehat{AC})}{d(A, B)} = \frac{d(A, B)}{d(D, R)}$ onde $d(D, R) < d(D, Q)$. Construa T e R com as mesmas propriedades do caso *i*. Construa o segmento \overline{DS} sendo S o ponto

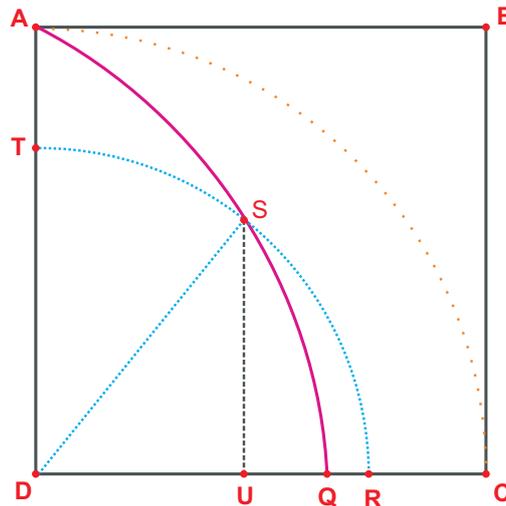


FIGURA 59: Caso i)

pertencente ao arco \widehat{AQ} da quadratriz e designe de M o ponto de interseção desse segmento com o arco \widehat{TR} , conforme Figura (60).

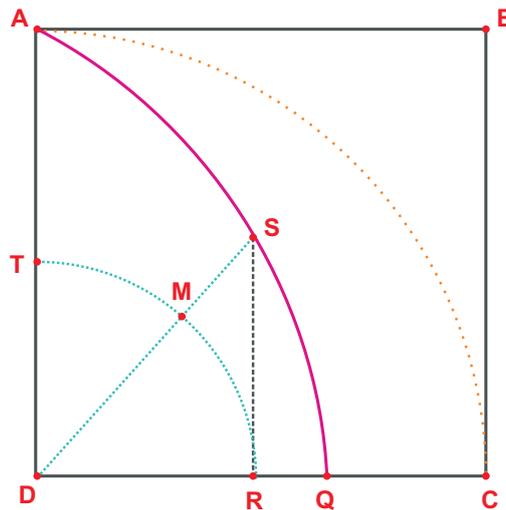


FIGURA 60: Caso ii)

De forma análoga ao *caso i)* conclui-se que, sob essas condições, $d(S, R) = m(\widehat{MR})$, o que é uma contradição, visto que $d(S, R) > m(\widehat{MR})$. Logo, a 3ª proporcional \overline{DR} entre \overline{AC} e \overline{AB} não pode ser menor do que $d(D, Q)$.

Concluimos de *i)* e *ii)* que a 3ª proporcional entre \widehat{AC} e \overline{AB} , nessa ordem, é o segmento

$$DQ, \text{ ou seja: } \frac{m(\widehat{AC})}{d(A, B)} = \frac{d(A, B)}{d(D, Q)} .$$

Portanto, dado o quadrado $ABCD$ de lado a e o ponto Q de intersecção da quadratriz associada com o lado \overline{DC} , é possível construir com régua e compasso, um segmento de reta de comprimento $m(\widehat{AC})$, ou seja de comprimento $b = \frac{\pi}{2}a$, tal segmento é a terceira proporcional entre o segmento DQ e o lado \overline{AB} do quadrado cuja construção se encontra descrita na seção (2.1.2).

Logo, o retângulo que tem como lados $2b$ e a tem área igual a $2 \left(\frac{\pi}{2}a\right) a = \pi a^2$ que é igual a área do círculo de raio a .

Assim para quadrar o círculo de raio a basta construir um quadrado de área igual à desse retângulo, ou seja um quadrado cujo lado seja a média geométrica entre $2b$ e a .

6.4.2 ESPIRAL DE ARQUIMEDES

Arquimedes também foi atraído pelos famosos problemas da matemática grega, ele inventou a curva chamada *espiral de Arquimedes* a qual fornece soluções para o problema da quadratura do círculo e para o problema da trisseção do ângulo.

De acordo com [4] a espiral de Arquimedes é definida como o lugar geométrico dos pontos P que se movem uniformemente ao longo de um raio ou semirreta que, por sua vez, gira uniformemente num plano em torno de sua origem. Se tomarmos como sistema polar de referência a posição inicial \overrightarrow{OK} do eixo de rotação quando P coincide com a origem O do raio, teremos que $d(O, P)$ é proporcional ao ângulo $K\hat{O}P$ e a equação polar da espiral é $\rho = k\theta$ sendo k a constante de proporcionalidade.

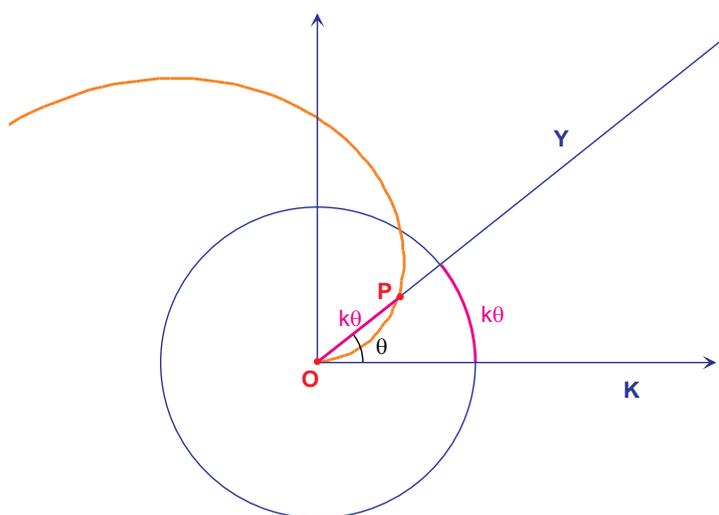


FIGURA 61: Espiral de Arquimedes

Vejam agora duas propriedades demonstradas por Arquimedes, que nos possibilitam quadrar o círculo a partir da *espiral de Arquimedes*.

Proposição 6.1: *Todo círculo é equivalente a um triângulo retângulo que possui os catetos sendo iguais ao raio e ao perímetro do círculo, [2].*

Demonstração

Arquimedes em várias de suas demonstrações usou a técnica “dupla redução ao absurdo”, sempre que era muito difícil demonstrar diretamente que uma grandeza era igual a outra, ele supunha por absurdo que as duas grandezas em questão eram desiguais, ou seja considerava os casos em que uma das grandezas fixadas era maior ou menor do que a outra, e assim deduzia duas contradições. Foi utilizando esta técnica que ele demonstrou esta Proposição: seja S_t a área do triângulo retângulo cuja base é o perímetro P_c do círculo e cuja altura é o raio r do círculo, então teremos $S_t = \frac{P_c r}{2}$ e seja S_c a área do círculo. Por hipótese de absurdo ele primeiramente considerou que a área do círculo era maior que a área do triângulo ou seja, $S_c > S_t$, ou ainda $S_c > S_c - S_t = k > 0$.

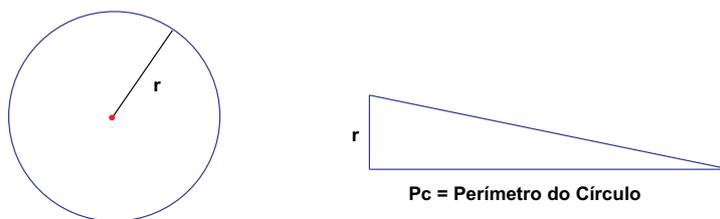


FIGURA 62: Igualdade de áreas dada por Arquimedes

Inscribendo um polígono regular de n lados no círculo, note que quanto maior o número de lados deste polígono, mais sua área S_p se aproximará da área do círculo, então tem-se $S_c > S_p$.

Como o número de lados do polígono pode ser considerado tão grande quanto se queira, pode-se afirmar que sua área é praticamente igual a área do círculo, com isso pode-se dizer que a área do polígono é maior que a do triângulo, ou seja, $S_p > S_t$.

Daí e da hipótese $S_c - S_t = k > 0$, segue que $S_c > S_p > S_t$ e $S_c - S_p = k_1$ sendo $k_1 < k$. Observe que a área S_p do polígono regular de n lados, cujo perímetro denotaremos por P_p , é a soma das áreas de $2n$ triângulos retângulos de altura h e hipotenusa r . Abrindo o polígono, conforme Figura [63] e cortando bem ao meio esta série de triângulos e encaixando-os vamos obter um retângulo de lados h e $\frac{P_p}{2}$.

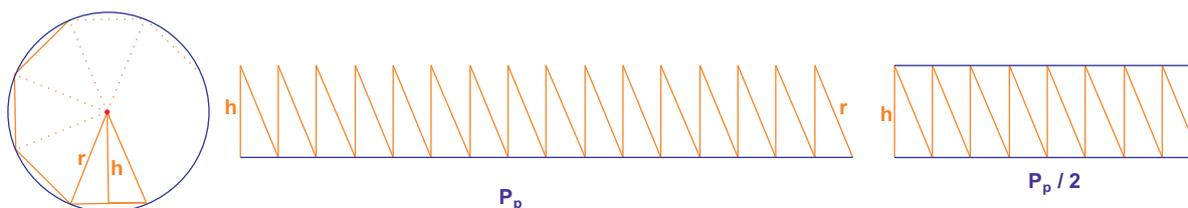


FIGURA 63: Igualdade de áreas dada por Arquimedes

A área do retângulo construído é igual a área do polígono $S_p = \frac{P_p h}{2}$. Mas já vimos que a área do triângulo retângulo é $S_t = \frac{P_c r}{2}$ e $S_p > S_t$ daí segue que $P_p h > P_c r$. Mas isto é um absurdo, pois sendo o comprimento da circunferência maior do que o perímetro do polígono, ou seja $P_c > P_p$, e o raio r do círculo maior do que a apótema h , isto é, $r > h$, conclui-se que $S_t > S_p$ e obtemos uma contradição. Agora, supondo como hipótese de absurdo que $S_c < S_t$ e realizando um raciocínio análogo ao anterior obteremos novamente uma contradição, concluindo assim que a área do círculo é igual a área do triângulo que possui os catetos sendo iguais ao raio e ao perímetro do círculo. ■

Proposição 6.2: Traçando a tangente a espiral pelo ponto P e a perpendicular a \overrightarrow{OP} passando por O , sendo Q o ponto de interseção dessa perpendicular com a tangente construída, tem-se que $d(O, Q)$ é o comprimento do arco da circunferência de centro O e raio \overline{OP} compreendido entre as semirretas \overrightarrow{OK} (eixo polar) e \overrightarrow{OP} .

Demonstração

A prova desta proposição realizada por Arquimedes também faz uso de uma típica “dupla redução ao absurdo”. A prova que faremos aqui utiliza apenas o seguinte resultado de cálculo elementar: Seja ψ o ângulo entre o raio vetor \overrightarrow{OP} e a tangente em P a uma curva de equação polar $\rho = \rho(\theta)$, então $tg\psi = \frac{\rho(\theta)}{\rho'(\theta)}$, onde $\rho'(\theta)$ é a derivada de ρ em relação à θ .

Aplicando este resultado a curva Espiral de Arquimedes, temos que

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{k\theta}{k} = \theta \tag{21}$$

Por outro lado,

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{d(O, Q)}{d(O, P)}, \tag{22}$$

visto que por construção o triângulo OPQ é retângulo em O . De (21) e (22) segue que $d(O, Q) = \theta \cdot d(O, P)$ e a proposição está provada. ■

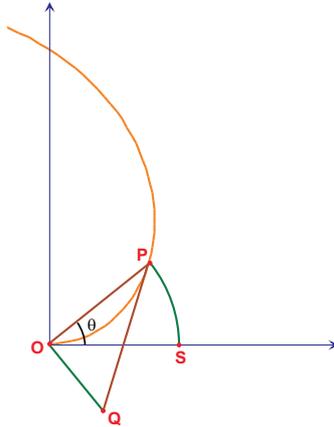


FIGURA 64: Proposição (6.2)

Seja então T o ponto, diferente do pólo, onde a Espiral de Arquimedes intersecciona o eixo x (eixo polar) na primeira volta, e seja K o ponto em que a tangente a espiral em T intersecciona o eixo y , então da Proposição 6.1 segue que $d(O, K)$ é o comprimento da circunferência de raio \overline{OT} , e da Proposição 6.2 tem-se que a circunferência de raio \overline{OT} é equivalente (em área) ao triângulo retângulo OTK . Logo para quadrar o círculo de raio \overline{OT} , basta realizar a quadratura do triângulo OTK , ver seção (6.1) item a).

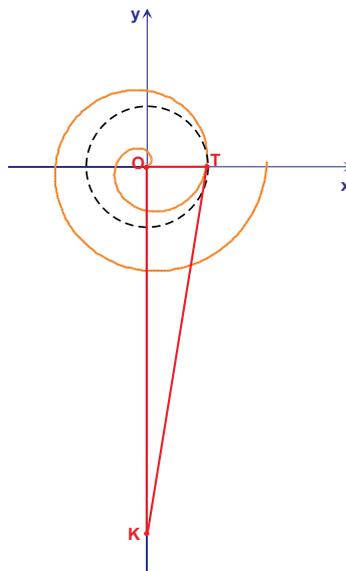


FIGURA 65: Quadratura do círculo

REFERÊNCIAS

- [1] E. Q. F. Rezende and M. L. B. Queiroz, *Geometria Euclidiana Plana e Construções Geométricas*. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2000.
- [2] C. B. Boyer, *História da Matemática. Tradução de Elza F. Gomide*. São Paulo: Editora Edgard Blucher, 1974.
- [3] E. L. Lima, *Medida e Forma em Geometria*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 1991.
- [4] H. Eves, *Introdução à História da Matemática. Tradução: Hygino H. Domingues*. Campinas, SP: Editora da UNICAMP, 2004.
- [5] E. L. Lima, P. C. P. Carvalho, E. Wagner, and A. C. Morgado, *Temas e Problemas Elementares*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2 ed., 2005.
- [6] "Tabela Plimpton 322." <http://www.math.ubc.ca/~cass/courses/m446-03/pl322/322.jpg>. Acesso em: 3 de dezembro de 2009.
- [7] E. L. Lima, *Meu professor de Matemática e outras histórias*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 5 ed., 2006.
- [8] "Idéia da demonstração de Perigal." www.edumatec.mat.ufrgs.br/atividades_diversas/ativ23/pit1.html. Acesso em: 6 de novembro de 2009.
- [9] G. F. Simmons, *Cálculo com geometria analítica. Tradução de Seiji Hariki*, vol. 2. São Paulo: McGraw-Hill, 1987.
- [10] T. Dantzig, *The Bequest of the Greeks*. Osmanu University Library, 1955.
- [11] B. Levi, *Lendo Euclides: A matemática e a geometria sob um olhar renovador. Tradução de Julián Miguel Barbero Fuks*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2008.