UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE SCHAUDER

Suzete Maria Silva Afonso
Instituto de Geociências e Ciências Exatas/Unesp
smafonso@rc.unesp.br

Quédima Carlevaro de Souza
Instituto de Geociências e Ciências Exatas/Unesp
quedima.carlevaro@gmail.com

Maria Letícia Salvador
Instituto de Geociências e Ciências Exatas/Unesp
marialesalvador@gmail.com

RESUMO

O Teorema de Schauder é uma generalização do Teorema do Ponto Fixo de Brouwer. Enquanto o Teorema de Brouwer se aplica a espaços euclidianos, o Teorema de Schauder vale em espaços normados de dimensão infinita. Neste trabalho provaremos o Teorema de Schauder e aplicá-lo-emos para investigar a existência de solução para a Equação Integral de Urysohn.

ABSTRACT

The Schauder Theorem is a generalization of Brouwer Fixed Point Theorem. While Brouwer's Theorem applies to Euclidean spaces, the Schauder Theorem is valid in infinite-dimensional normed spaces. In this work we prove the Schauder Theorem and we apply it to investigate the existence of solution to the Urysohn Integral Equation.

Palavras-chave: Ponto fixo, Teorema de Schauder e Equação Integral de Urysohn.

1 PRELIMINARES

Inicialmente, listaremos alguns conceitos e resultados auxiliares para a apresentação do Teorema de Schauder e da aplicação deste à equação integral de Urysohn. Embora nos preocupemos com a exposição de preliminares à abordagem do Teorema de Schauder, informamos que assumimos que o leitor tenha familiaridade com os conceitos de espaço topológico, espaço métrico, sequência, fecho de um conjunto, função contínua, função limitada, diâmetro de um conjunto; conjuntos fechado, limitado, aberto e completo. Sugerimos ao leitor que consulte as referências [1], [2] e [3] para revisitar tais conceitos e analisar as demonstrações dos resultados que serão somente enunciados abaixo.

Definição 1.1: *Uma cobertura (aberta) de um subconjunto A de um espaço métrico (E, d) é uma família $(O_i)_{i\in I}$ de conjuntos (abertos) cuja reunião contém A.*

Definição 1.2: *Dizemos que um espaço métrico (E, d) é compacto se ele satisfaz a seguinte condição:*

(C) toda cobertura aberta de E admite uma subcobertura finita, isto é, dada uma família de

conjuntos abertos $(O_i)_{i\in I}$ *tal que* $E \subset \bigcup_{i\in I} O_i$, *existe um subconjunto finito* $\{i_1, \ldots, i_n\} \subset I$ *tal que* $E \subset O_{i_1} \cup O_{i_2} \cup \cdots \cup O_{i_n}$.

Teorema 1.1: *Um subconjunto de* $\mathbb{R}^n$ *(*$n \geq 1$*) é compacto se, e somente se, é fechado e limitado.*

Definição 1.3: *Um espaço métrico é sequencialmente compacto se toda sequência de pontos de* E *tem uma subsequência convergente.*

Num espaço métrico, os conceitos de conjuntos compacto e sequencialmente compacto são equivalentes, como veremos no próximo teorema.

Exemplo 1.1: *Para* $a, b \in \mathbb{R}$, *com* $a < b$, *o espaço métrico* $([a,b], d)$, *onde* $d(x,y) = |x-y|$, *para* $x, y \in [a,b]$, *é compacto e sequencialmente compacto.*

Definição 1.4: *Dizemos que um subconjunto* X *de um espaço métrico* (E,d) *é totalmente limitado se, para todo* $\varepsilon > 0$, *existe uma cobertura finita de* E *formada por conjuntos de diâmetro menor do que ou igual a* ε. *Isso equivale a dizer que, para todo* $\varepsilon > 0$, *existem pontos* $x_1, \ldots, x_m$ *tais que todo ponto* $x \in X$ *satisfaz* $d(x, x_j) \leq \varepsilon$ *para algum* $j \in \{1, \ldots, m\}$.

Teorema 1.2: *Seja* (E,d) *um espaço métrico. As seguintes propriedades são equivalentes:*

A) E *é compacto;*

B) E *é sequencialmente compacto;*

C) E *é completo e totalmente limitado.*

Pelo Teorema 1.2, concluímos que o espaço métrico exibido no Exemplo 1.1 é completo e totalmente limitado.

Definição 1.5: *Seja* (E, τ) *um espaço topológico e seja* (F,d) *um espaço métrico. Dizemos que um conjunto* ξ *de aplicações de* E *em* F *é equicontínuo no ponto* $x_0 \in E$ *se, dado* $\varepsilon > 0$, *existe uma vizinhaça* V_{x_0} *de* x_0 *em* E *tal que*

$$x \in V_{x_0} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \varepsilon, \text{ para toda } f \in \xi.$$

É claro que, se o conjunto ξ *é equicontínuo no ponto* x_0, *então todas as funções* $f \in \xi$ *são contínuas no ponto* x_0. *Dizemos que* ξ *é equicontínuo se* ξ *é equicontínuo em todo ponto* $x \in E$; *neste caso, os elementos de* ξ *são funções contínuas.*

Exemplo 1.2: *Dados* $[a,b] \subset \mathbb{R}$ *com* $a < b$ *e* $M > 0$, *o conjunto*

$$\mathcal{E} = \{x \in C^1([a,b], \mathbb{R}); \|x'\| \leq M\},$$

onde $C^1([a,b], \mathbb{R}) = \{x : [a,b] \to \mathbb{R}; x$ *é diferenciável e* x' *é contínua em* $[a,b]\}$ *e* $\|x'\| = \sup_{a \leq t \leq b} |x'(t)|$, *é equicontínuo.*

Com efeito, dado $t_0 \in [a,b]$, *para todo* $t \in [a,b]$ *e* $x \in \mathcal{E}$, *tem-se*

$$|x(t) - x(t_0)| = \left| \int_{t_0}^{t} x'(s)ds \right| \leq \left| \int_{t_0}^{t} |x'(s)|ds \right| \leq |t - t_0|M. \tag{1}$$

Portanto, por (1), *dado* $\varepsilon > 0$, *existe* $\delta = \frac{\varepsilon}{M}$ *tal que*

$$t \in [a,b], |t - t_0| < \delta \Rightarrow |x(t) - x(t_0)| < \varepsilon, \quad \forall x \in \mathcal{E}.$$

Como t_0 *foi tomado arbitrariamente, concluímos que* $\mathcal{E}$ *é equicontínuo.*

Teorema 1.3: ***(Teorema de Àscoli)*** *Sejam* (E, d_1) *um espaço métrico compacto,* (F, d_2) *um espaço métrico completo e* $C(E,F)$ *o espaço das funções contínuas de* E *em* F *munido da métrica da convergência uniforme:* $d_\infty(f,g) = \sup_{x \in E} d_2(f(x), g(x))$.

Um subconjunto H *de* $C(E,F)$ *é relativamente compacto se, e somente se, ele cumpre as condições:*

(A_1) H é equicontínuo;

(A_2) Para todo $x \in E$, o fecho do conjunto

$$H(x) = \{f(x); f \in H\}$$

é compacto.

Lema 1.1: *Sobre um espaço vetorial E de dimensão finita, todas as normas são equivalentes.*

Lema 1.2: *Se K é um subconjunto convexo compacto de $\mathbb{R}^n$, então toda aplicação contínua de K em K tem um ponto fixo.*

Lema 1.3: *Seja f uma aplicação contínua de um espaço métrico (E, d) num espaço métrico (E', d') e seja K um subconjunto compacto de E. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para quaisquer $x, y \in E$ com $d(x, y) < \delta$, dist$(x, K) < \delta$, dist$(y, K) < \delta$, tem-se $d'(f(x), f(y)) < \varepsilon$.*

2 TEOREMA DE SCHAUDER

Vamos agora enunciar o Teorema de Schauder e constatar que ele é um caso particular de outro teorema que será demonstrado.

Teorema 2.1 (Teorema de Schauder): *Seja $(E, \|.\|)$ um espaço normado e seja K um subconjunto compacto e convexo de E. Então, qualquer aplicação contínua $T : K \longrightarrow K$ tem um ponto fixo.*

O Teorema 2.1 é um caso particular do seguinte resultado:

Teorema 2.2: *Seja S um subconjunto convexo de um espaço normado $(E, \|.\|)$ e seja $T : S \longrightarrow S$ uma aplicação contínua tal que $T(S) \subset K \subset S$, onde K é compacto; então T tem um ponto fixo.*

Demonstração

A prova será dividida em três partes.
Parte 1: Vamos demonstrar que, dado $\varepsilon > 0$, existem um subconjunto compacto convexo K_ε de S contido num subespaço vetorial de dimensão finita e uma aplicação contínua $P_\varepsilon : K \longrightarrow K_\varepsilon$ tal que, para todo $x \in K$, tem-se $\|x - P_\varepsilon x\| < \varepsilon$. De fato: Segue da Propriedade C) do Teorema 1.2 que, dado $\varepsilon > 0$, existem pontos $x_1, \cdots, x_m \in K$ tais que todo $x \in K$ dista de algum deles menos de ε, uma vez que K é compacto. Para $j = 1, \cdots, m$, definimos a função contínua $g_j : K \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$g_j(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - x_j\|, & \text{se} \quad \|x - x_j\| \leqslant \varepsilon \\ 0, & \text{se} \quad \|x - x_j\| \geqslant \varepsilon. \end{cases}$$

Temos $\sum_{j=1}^{m} g_j(x) > 0$, para todo $x \in K$ e, definindo

$$h_j(x) = \frac{g_j(x)}{\sum_{k=1}^{m} g_k(x)}, j = 1, \cdots, m,$$

temos $h_j(x) \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} h_j(x) = 1$, para todo $x \in K$, e $h_j(x) = 0$, se $\|x - x_j\| \geqslant \varepsilon$.

Denotamos por K_ε o conjunto convexo

$$\left\{\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_m x_m;\ \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = 1\right\}.$$

K_ε é a envoltória convexa dos pontos $x_1, \ldots, x_m$ e está, pois, contida num subespaço de dimensão finita de E e em S. Do Teorema 1.1 e do Lema 1.1 segue que K_ε é compacto.

Definamos $P_\varepsilon : K \longrightarrow K_\varepsilon$ por $P_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} h_j(x) x_j$, para $x \in K$. P_ε é contínua, pois h_j é contínua em K, para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, e

$$x - P_\varepsilon(x) = \sum_{j=1}^{m} h_j(x)(x - x_j),\ \ x \in K,$$

onde, no segundo membro, só as parcelas para as quais $\|x - x_j\| < \varepsilon$ são não-nulas. Portanto,

$$\|x - P_\varepsilon(x)\| \leqslant \sum_{j=1}^{m} h_j(x)\|x - x_j\| < \sum_{j=1}^{m} h_j(x)\varepsilon = \varepsilon, \quad \text{para todo } x \in K.$$

Parte 2: Vamos mostrar que, para todo $\varepsilon > 0$, existe $x_\varepsilon \in S$ tal que $\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| < \varepsilon$. Com efeito, com a notação utilizada na Parte 1, consideremos a aplicação

$$P_\varepsilon \circ T : x \in S \longmapsto P_\varepsilon(Tx) \in K_\varepsilon \subset S.$$

Para a restrição de $P_\varepsilon \circ T$ a K_ε vale o Lema 1.2 e, portanto, existe $x_\varepsilon \in K_\varepsilon$ tal que $P_\varepsilon(Tx_\varepsilon) = x_\varepsilon$. Pela Parte 1, considerando $x = Tx_\varepsilon$, temos então $\|P_\varepsilon(Tx_\varepsilon) - Tx_\varepsilon\| < \varepsilon$, ou seja, $\|x_\varepsilon - Tx_\varepsilon\| < \varepsilon$.
Parte 3: Vamos concluir que T admite um ponto fixo. Da Parte 2, segue que, para todo $n \in \mathbb{N}$, existe $x_n \in S$ tal que

$$\|x_n - Tx_n\| < \frac{1}{n}. \tag{2}$$

Temos $Tx_n \in K$ e, sendo K compacto, a sequência $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ contém uma subsequência, a qual denotaremos por $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ por simplicidade de notação, que converge para um ponto $x \in K \subset S$. Da relação (2) segue que $x_n \longrightarrow x$ e, da continuidade de T, segue que $Tx_n \longrightarrow Tx$, que, com a relação (2), nos fornece $Tx = x$.

■

3 UMA APLICAÇÃO DO TEOREMA DE SCHAUDER

Agora, aplicaremos o Teorema de Schauder para provar a existência de pelo menos uma solução para a equação integral de Urysohn. Antes disso, demonstraremos um resultado que será necessário para tal prova.

Informamos que $C([a,b],\mathbb{R})$ denota o espaço vetorial das funções contínuas de $[a,b]$ em $\mathbb{R}$ munido da norma uniforme: $\|f\|_\infty = \sup_{t\in[a,b]} |f(t)|$, $f \in C([a,b],\mathbb{R})$.

Lema 3.1: *Dada uma função contínua* $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, *seja*

$$(kx)(t) = \int_a^t K[t, s, x(s)]ds, \quad t \in [a,b],$$

para $x \in C([a,b],\mathbb{R})$. *Então,*

I) $kx \in C([a,b],\mathbb{R})$ *e a aplicação* $x \in C([a,b],\mathbb{R}) \longmapsto kx \in C([a,b],\mathbb{R})$ *é contínua.*

$II)$ k é compacto, isto é, para qualquer $r > 0$, o fecho do conjunto $k(B_r)$ é compacto em $C([a,b],\mathbb{R})$, onde

$$B_r = \{x \in C([a,b],\mathbb{R}); \|x\|_\infty \leqslant r\}.$$

Demonstração

$I)$ Vamos, primeiramente, mostrar que $kx \in C([a,b],\mathbb{R})$ para $x \in C([a,b],\mathbb{R})$. Com efeito, dados $t, t_0 \in [a,b]$, temos

$$|(kx)(t) - (kx)(t_0)| \leq \int_a^t |K[t,s,x(s)] - K[t_0,s,s(s)]|ds + \int_{t_0}^t |K[t_0,s,x(s)]|ds.$$

Como K é uniformemente contínua sobre o compacto $[a,b] \times [a,b] \times x([a,b])$, a primeira integral se torna arbitrariamente pequena com $|t - t_0|$, e o mesmo vale para a segunda, pois K é limitada sobre o compacto $\{t_0\} \times [a,b] \times x([a,b])$. Isso significa que, quando $t \to t_0$, $(kx)(t) \to (kx)(t_0)$, o que caracteriza kx como uma função contínua em t_0. Como t_0 foi escolhido de modo arbitrário, segue que $kx \in C([a,b],\mathbb{R})$ se $x \in C([a,b],\mathbb{R})$.
Agora, verificaremos que a aplicação (não-linear) $x \in C([a,b],\mathbb{R}) \longmapsto kx \in C([a,b],\mathbb{R})$ é contínua. De fato, dados $x, x_0 \in C([a,b],\mathbb{R})$, para todo $t \in [a,b]$, temos

$$|(kx)(t) - (kx_0)(t)| = \left|\int_a^t \{K[t,s,x(s)] - K[t,s,x_0(s)]\}ds\right|$$

e, como K é contínua e $[a,b] \times [a,b] \times x_0([a,b])$ é compacto, segue do Lema 1.3 que, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que, para

$$\|x - x_0\| = \sup_{a \leqslant s \leqslant b} |x(s) - x_0(s)| < \delta,$$

tem-se

$$| K(t,s,x(s)) - K(t,s,x_0(s)) | < \frac{\varepsilon}{b-a}, \qquad \forall s,t \in [a,b],$$

e, portanto, $\|kx - kx_0\| < (b-a)\dfrac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$.
$II)$ Para demonstrar que k é compacto, basta mostrar que $k(B_r)$ satisfaz as propriedades (A_1) e (A_2) do Teorema 1.3.
(A_1) $k(B_r)$ é equicontínuo: De fato, K é uniformemente contínua e limitada no conjunto compacto $[a,b]\times[a,b]\times D_r$, onde $D_r = \{z \in \mathbb{R}; \|z\| \leqslant r\}$. Consideremos $M = \sup\{|K(t,s,z)|; s,t \in [a,b], z \in D_r\}$. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta = \frac{\varepsilon}{2M} > 0$ tal que, para $|t_1 - t_2| < \delta, |s_1 - s_2| < \delta$ e $|z_1 - z_2| < \delta$, com $z_1, z_2 \in D_r$, temos $|K(t_1,s_1,z_1) - K(t_2,s_2,z_2)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}$. Assim, para $|t - t_0| < \delta$ e $x \in B_r$ (e, portanto, $x(s) \in D_r$ para $s \in [a,b]$), temos

$$\begin{aligned} |(kx)(t) - (kx)(t_0)| &\leq \int_a^t |K[t,s,x(s)] - K[t_0,s,x(s)]|\,ds + \left|\int_{t_0}^t K[t_0,s,x(s)]ds\right| \\ &\leq (b-a)\frac{\varepsilon}{2(b-a)} + |t-t_0|M \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2M}M = \varepsilon. \end{aligned}$$

(A_2) Para todo $t_0 \in [a,b]$, o conjunto

$$(kB_r)(t_0) = \left\{\int_a^{t_0} K[t_0,s,x(s)]ds \in \mathbb{R}; x \in B_r\right\}$$

é limitado em $\mathbb{R}$, pois K é limitada em $[a,b] \times [a,b] \times D_r$. Portanto, o fecho do conjunto $(kB_r)(t_0)$ é compacto, pelo Teorema 1.1.

■

No que segue, usaremos a seguinte notação: dada uma função contínua $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ e dado $r > 0$, escrevemos

$$\|K\|_r = \sup\{|K(t,s,z)|; s,t \in [a,b], z \in \mathbb{R}, |z| \leq r\}.$$

Teorema 3.1: *Seja $K : [a,b] \times [a,b] \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua. Para toda $f \in C([a,b],\mathbb{R})$, existe $\lambda_f \in]0,\infty]$ tal que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{R}$ com $|\lambda| < \lambda_f$, existe pelo menos uma função $y \in C([a,b],\mathbb{R})$ solução da equação integral de Urysohn:*

$$y(t) = f(t) + \lambda \int_a^b K[t,s,y(s)]ds, \quad a \leqslant t \leqslant b. \tag{3}$$

Demonstração

Para quaisquer $x \in E = C([a,b],\mathbb{R})$ e $t \in [a,b]$, definimos

$$(kx)(t) = \int_a^b K[t,s,x(s)]ds.$$

No Lema 3.1, vimos que $kx \in E$, k é um operador contínuo de E em E e k é compacto. Portanto, para toda $f \in E$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$, também é compacto o operador

$$T = T_{f,\lambda} : x \in E \longmapsto Tx = f + \lambda kx \in E.$$

Dado $r > 0$, seja $B_r = \{x \in E; \|x\| \leqslant r\}$. Tomando $r > \|f\|_\infty$, para

$$|\ \lambda\ | \leqslant \frac{r - \|f\|_\infty}{(b-a)\|K\|_r},$$

temos $T(B_r) \subset B_r$. De fato, dados $x \in B_r$ e $t \in [a,b]$:

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &= \left| f(t) + \lambda \int_a^b K[t,s,x(s)]ds \right| \\ &\leq |f(t)| + |\lambda|(b-a)\|K\|_r \\ &\leq \|f\|_\infty + \frac{r - \|f\|_\infty}{(b-a)\|K\|_r}(b-a)\|K\|_r \\ &= r. \end{aligned}$$

Do Teorema 2.1 segue, então, que $T_{f,\lambda}$ tem um ponto fixo $y \in B_r$, isto é, que a Equação (3) tem uma solução $y \in B_r$.
Mais geralmente, podemos tomar $\lambda \in \mathbb{R}$ com

$$|\lambda| < \lambda_f = \sup_{r>0} \frac{r - \|f\|_\infty}{(b-a)\|K\|_r}.$$

■

4 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O Teorema de Schauder é um resultado sobre existência de pontos fixos. Tem grande utilidade na teoria de equações diferenciais, pois, através dele, podemos garantir existência de solução para certas classes de equações. No Teorema 1.3, vimos que a equação integral de Urysohn tem pelo menos uma solução. A mesma conclusão pode ser obtida para a Equação Integral de Hammerstein (veja a referência [4], página 171) e para a Equação Integral de Volterra (veja a referência [4], página 172).

REFERÊNCIAS

[1] E. L. Lima, *Espaços Métricos*. Projeto Euclides, IMPA, 2003.

[2] J. Munkres, *Topology*. Pearson, 2000.

[3] G. F. Simmons, *Introduction to Topology and Modern Analysis*. Krieger Publishing Company; Reprint edition, 2003.

[4] C. S. Hönig, *Aplicações da Topologia à Análise*. Textos Universitários do IME-USP, 2011.