SOBRE A TEORIA DO GRAU DE BROUWER E A TEORIA DO GRAU DE LERAY-SCHAUDER

Suzete Maria Silva Afonso
Instituto de Geociências e Ciências Exatas- Unesp
smafonso@rc.unesp.br

Carolinne Stefane de Souza
Instituto de Geociências e Ciências Exatas- Unesp
214001209@rc.unesp.br

RESUMO

Neste trabalho abordaremos a teoria do grau topológico de Brouwer que vale em espaços vetoriais de dimensão finita e a teoria do grau de Leray-Schauder que vale em espaços vetoriais de dimensão infinita. Além disso, demonstraremos o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer e o Teorema do Ponto Fixo de Schaefer utilizando as teorias supramencionadas.

ABSTRACT

In this work we discuss the Brouwer degree theory in finite dimensional spaces and the Leray-Schauder degree theory in infinite dimensional spaces. In addition , we will prove Brouwer Fixed Point Theorem and Schaefer Fixed Point Theorem using such theories.

Palavras-chave: Grau de Brouwer, grau de Leray-Schauder e ponto fixo.

1 INTRODUÇÃO

Inicialmente, introduziremos alguns conceitos e resultados que auxiliarão na abordagem da teoria do grau.

Definição 1.1: *Seja E um espaço vetorial normado. Diremos que E é um espaço de Banach quando E for completo, isto é, quando toda sequência de Cauchy em E convergir em E.*

Teorema 1.1 (Teorema da Função Inversa): *Sejam E e F espaços de Banach. Seja U um subconjunto aberto de E e seja $g : U \longrightarrow F$ uma aplicação de classe C^1 tal que, em um ponto $x_0 \in U$, a transformação linear $g'(x_0) : E \longrightarrow F$ é um isomorfismo. Então, existe um aberto $A \subset U$ contendo x_0 tal que a restrição $g_{|A} : A \longrightarrow g(A)$ é um difeomorfismo de classe C^1 entre os abertos A e $g(A)$.*

Definição 1.2: *Duas aplicações contínuas $f, g : X \longrightarrow Y$ entre espaços topológicos dizem-se homotópicas se existir uma aplicação contínua $F : X \times [0, 1] \longrightarrow Y$, denominada homotopia, tal que $F_0 = f$ e $F_1 = g$, onde $F_t = F_{|X\times\{t\}}$.*

Definição 1.3: *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado e seja $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ o espaço das aplicações $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ que juntamente com suas derivadas até a ordem k são restrições de aplicações contínuas definidas em um aberto que contém $\overline{\Omega}$.*

No espaço $C^k(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, consideraremos a seguinte norma

$$\|\varphi\|_{C^k(\overline{\Omega})} = \max\{C_j; 0 \le j \le k\},$$

onde $C_j = max\{\|D^j\varphi(x)\|;\ x \in \overline{\Omega}\}$ *e* $D^j\varphi$ *denota a derivada de ordem* j *de* φ.

$C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ *denota o espaço das aplicações contínuas de* $\overline{\Omega}$ *em* $\mathbb{R}^n$ *munido da norma*

$$\|\varphi\|_{C(\overline{\Omega})} = \max\{\|\varphi(x)\|;\ x \in \overline{\Omega}\}.$$

Proposição 1.1: *Sejam* Ω *um subconjunto aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* C^1 *e* $b \notin (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$, *onde* $S = \{x \in \Omega;\ J_\varphi[x] = 0\}$ *e* $J_\varphi[x]$ *é o determinante Jacobiano da aplicação* φ *no ponto* x. *Então, o conjunto* $A = \{x \in \Omega;\ \varphi(x) = b\}$ *é finito.*

Demonstração Se $A = \emptyset$, nada temos a fazer.

Consideremos $A \neq \emptyset$. Dado $x \in A$, temos $J_\varphi[x] \neq 0$, pois $b \notin \varphi(S)$. Pelo Teorema da Função Inversa, existe um aberto O_x contendo x tal que $\varphi_{|O_x}$ é um difeomorfismo entre O_x e $\varphi(O_x)$, com $b \in \varphi(O_x)$.

Como φ é contínua e $\{b\} \subset \mathbb{R}^n$ é um conjunto fechado, segue que $A = \varphi^{-1}(\{b\})$ também é um conjunto fechado em $\overline{\Omega}$. Além disso, como $\overline{\Omega}$ é compacto (fechado e limitado em $\mathbb{R}^n$) e $A \subset \Omega$, segue que A é compacto. Sendo assim, uma vez que

$$A \subset \bigcup_{x \in A} O_x,$$

através do Teorema de Borel-Lebesgue, podemos afirmar que existem $x_1, ..., x_n \in A$ de forma que

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} O_{x_i}. \tag{1}$$

Como $\varphi : O_{x_i} \longrightarrow \varphi(O_{x_i})$ é difeomorfismo para cada $i \in \{1, ..., n\}$, segue de (1) que $A = \{x_1, ..., x_n\}$. ■

2 GRAU DE BROUWER

Com a conclusão extraída da Proposição 1.1, definimos o grau topológico de Brouwer para aplicações de classe C^1.

Definição 2.1: *Sejam* Ω *um subconjunto aberto e limitado de* $\mathbb{R}^n$, $\varphi : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* C^1 *e* $b \notin (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$. *O grau de Brouwer de* φ *em* Ω *relativamente a* b, *denotado por* $d(\varphi, \Omega, b)$, *é definido por*

$$d(\varphi, \Omega, b) = \begin{cases} 0, & \varphi^{-1}(\{b\}) = \emptyset \\ \sum_{i=1}^{n} sgn(J_\varphi[x_i]), & \varphi^{-1}(\{b\}) = \{x_1, ..., x_n\}, \end{cases}$$

onde a função sng $: \mathbb{R} - \{0\} \to \{-1, 1\}$ *é dada por*

$$sng\ t = \begin{cases} -1, & t < 0 \\ 1, & t > 0. \end{cases}$$

A seguir, enunciamos uma importante propriedade do grau que pode ser constatada facilmente através da Definição 2.1.

Lema 2.1: *Sejam* Ω *aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$ *e* $Id : \overline{\Omega} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ *a aplicação dada por* $Id(x) = x$, *para* $x \in \overline{\Omega}$. *Então*

$$d(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1, & \text{se } b \in \Omega \\ 0, & \text{se } b \notin \Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Na Definição 2.1 vimos o conceito de grau topológico para a terna φ, Ω, b, em que φ é uma função em $C^1(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto limitado e $b \notin (\varphi(\partial\Omega) \cup \varphi(S))$. Nosso objetivo, a partir de agora, é apresentar a definição do grau topológico para um caso mais geral. Mais precisamente, definiremos o grau topológico $d(\varphi,\Omega,b)$ de funções $\varphi\in C(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ em qualquer ponto $b\notin\varphi(\partial\Omega)$. Nas linhas seguintes, exibiremos uma série de lemas que nos conduzirão a tal definição. Cabe informar ao leitor interessado que as demonstrações dos resultados que forem somente enunciados na sequência podem ser verificadas em [2] e [1].

Lema 2.2: *Sejam $\varphi\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e $b\notin\varphi(\partial\Omega)\cup\varphi(S)$. Então, existe uma vizinhança $U\subset C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ de φ tal que, para cada $\psi\in U$, vale:*

(i) $b\notin\psi(\partial\Omega)$;

(ii) *Se* $\psi(t)=b$, *então* $J_\psi[t]\neq 0$;

(iii) $d(\psi,\Omega,b)=d(\varphi,\Omega,b)$.

O lema acima infere que o grau topológico de Brouwer é localmente constante na topologia de $C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$.

O próximo resultado afirma que o grau de Brouwer é constante com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^n\setminus(\varphi(\partial\Omega)\cup\varphi(S))$.

Lema 2.3: *Sejam $\varphi\in C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e b,c dois pontos pertencentes à mesma componente conexa de*
$\mathbb{R}^n\setminus(\varphi(\partial\Omega)\cup\varphi(S))$, então

$$d(\varphi,\Omega,b)=d(\varphi,\Omega,c).$$

Com o lema enunciado abaixo concluímos que se $\varphi\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$, então o grau de Brouwer será constante com relação a b em cada componente conexa de $\mathbb{R}^n\setminus\varphi(\partial\Omega)$.

Lema 2.4: *Sejam $\varphi\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$. Se $b,c\notin\varphi(\partial\Omega)\cup\varphi(S)$ e estão na mesma componente conexa de $\mathbb{R}^n\setminus\varphi(\partial\Omega)$, então*

$$d(\varphi,\Omega,b)=d(\varphi,\Omega,c).$$

Seja C_b a componente conexa de $\mathbb{R}^n\setminus\varphi(\partial\Omega)$ que contém b. Como $\mathbb{R}^n\setminus\varphi(\partial\Omega)$ é aberto, então C_b também é. Por outro lado, pelo Teorema de Sard, $\varphi(S)$ tem medida nula em $\mathbb{R}^n$. Dessa forma, podemos concluir que $\varphi(S)$ não contém C_b, isto é, $C_b\setminus\varphi(S)\neq\emptyset$. Este fato, juntamente com o Lema 2.4, nos permite definir o grau topológico $d(\varphi,\Omega,b)$ quando φ pertence a $C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e b é imagem de um ponto crítico de φ.

Definição 2.2: *Sejam $\varphi\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e $b\in\varphi(S)$ tal que $b\notin\varphi(\partial\Omega)$. Considere C_b a componente conexa de $\mathbb{R}^n\setminus\varphi(\partial\Omega)$ que contém b. Definimos*

$$d(\varphi,\Omega,b)=d(\varphi,\Omega,c),\quad c\in C_b\setminus\varphi(S),$$

sendo o membro direito da igualdade acima dado pela Definição 2.1.

O próximo resultado implica que o grau estabelecido na Definição 2.2 é localmente constante na topologia de $C^1(\Omega,\mathbb{R})$.

Lema 2.5: *Se $\varphi\in C^2(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ e $b\notin\varphi(\partial\Omega)$, então existe uma vizinhança U de φ, na topologia de $C^1(\overline{\Omega},\mathbb{R}^n)$ tal que, para cada $\psi\in U$, vale*

(i) $b\notin\psi(\partial\Omega)$;

(ii) $d(\psi,\Omega,b)=d(\varphi,\Omega,b)$.

O lema abaixo é conhecido como a propriedade da *invariância por homotopia* do grau topológico.

Lema 2.6: *Se $H\in C^2(\overline{\Omega}\times[0,1],\mathbb{R}^n)$ e $b\notin H(\partial(\Omega)\times[0,1])$, então*

$$d(H(\cdot,t_1),\Omega,b)=d(H(\cdot,t_2),\Omega,b),$$

para quaisquer $t_1,t_2\in[0,1]$.

Demonstração Na demonstração deste lema, usaremos o seguinte resultado de Análise no $\mathbb{R}^n$:

Resultado auxiliar: Sejam $K \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto compacto, $X \subset \mathbb{R}^m$ e $f : K \times X \to \mathbb{R}^p$ uma função contínua. Então, fixado $x_0 \in X$ e dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$\forall x \in X; \|x - x_0\| < \delta \Rightarrow \|f(y, x) - f(y, x_0)\| < \varepsilon, \, \forall y \in K.$$

Vamos fixar $\tau \in [0, 1]$ e aplicar o resultado acima para as funções H e $\partial_1 H$, onde $\partial_1 H$ denota a derivada de H em relação à primeira variável.

Então, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ de maneira que

$$\forall t \in [0, 1]; |t - \tau| < \delta \Rightarrow \begin{cases} \|H(y, t) - H(y, \tau)\| < \varepsilon \\ \|\partial_1(y, t) - \partial_1(y, \tau)\| < \varepsilon, \end{cases}$$

para todo $y \in \overline{\Omega}$, de onde segue que

$$\forall t \in [0, 1]; |t - \tau| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot, t) - H(\cdot, \tau)\|_{C^1(\overline{\Omega})} < \varepsilon.$$

Escolhendo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos afirmar, pelo lema anterior, que existe $\delta > 0$ tal que

$$d(H(\cdot, t), \Omega, b) = d(H(\cdot, \tau), \Omega, b), \quad \forall t \in [0, 1] \quad \text{e} \quad |t - \tau| < \delta.$$

Como $[0, 1]$ é compacto e conexo, e a função $t \in [0, 1] \mapsto d(H(\cdot, t), \Omega, b) \in \mathbb{Z}$ é localmente constante, concluímos que $d(H(\cdot, t), \Omega, b)$ é constante em $[0, 1]$. ■

Através do lema a seguir será possível definir o grau de funções contínuas em $\overline{\Omega}$.

Lema 2.7: *Se $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então existirá uma vizinhança U de φ, na topologia de $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, tal que*

$$b \notin \psi_1(\partial\Omega), \quad b \notin \psi_2(\partial\Omega)$$

e

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b),$$

para quaisquer $\psi_1, \psi_2 \in U$.

Demonstração Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Como $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, a distância de b a $\varphi(\partial\Omega)$ é positiva. Considere, pois, $r = \operatorname{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$. Como, pelo Teorema de Aproximação de Weirstrass, $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ é denso em $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, segue que

$$U = \left\{\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n); \ \|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}\right\} \neq \emptyset.$$

Sejam $\psi_1, \psi_2 \in U$ e defina $H : \overline{\Omega} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $H(x, t) = t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x)$, para $(x, t) \in \overline{\Omega} \times [0, 1]$. Afirmamos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0, 1])$. Com efeito, suponha que exista $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, 1]$ tal que $H(x, t) = b$. Neste caso, como a distância entre b e $\varphi(\partial\Omega)$ é r, segue que

$$\|H(x, t) - \varphi(x)\| = \|b - \varphi(x)\| \geq r. \tag{3}$$

Por outro lado, utilizando a expressão que define H, obtemos

$$\begin{aligned} \|H(x, t) - \varphi(x)\| &= \|t\psi_1(x) + (1 - t)\psi_2(x) - t\varphi(x) - (1 - t)\varphi(x)\| \\ &\leq t\|\psi_1(x) - \varphi(x)\| + (1 - t)\|\psi_2(x) - \varphi(x)\|. \end{aligned}$$

Por conseguinte,

$$\|H(x, t) - \varphi(x)\| \leq t\|\psi_1 - \varphi\|_{C(\overline{\Omega})} + (1 - t)\|\psi_2 - \varphi\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Então, como $\psi_1, \psi_2 \in U$, temos

$$\|H(x,t) - \varphi(x)\| < t\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Como a desigualdade acima está em contradição com (3), concluímos que $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$. Além disso, como $H \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, segue, pelo Lema 2.6, que

$$d((H(\cdot,1), \Omega, b) = d((H(\cdot,0), \Omega, b),$$

ou seja,

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b),$$

o que finaliza a prova. ■

Definição 2.3: *Sejam $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Definimos o grau topológico de Brouwer de φ em relação a Ω no ponto b por*

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b), \quad \psi \in U,$$

sendo U a vizinhança de φ na topologia de $C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, cuja existência é assegurada pelo Lema 2.7.

Dentre as propriedades do grau de Brouwer para aplicações contínuas, destacamos as seguintes:

Proposição 2.1: *Se $\varphi \in C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$, então existirá uma vizinhança V de φ, na topologia de $C(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$, tal que*

$$b \notin \psi_1(\partial\Omega), \quad b \notin \psi_2(\partial\Omega)$$

e

$$d(\psi_1, \Omega, b) = d(\psi_2, \Omega, b),$$

para quaisquer $\psi_1, \psi_2 \in V$.

Informamos que uma demonstração para a Proposição 2.1 pode ser encontrada em [2].

Proposição 2.2: *Se $H \in C(\overline{\Omega} \times [0,1], \mathbb{R}^n)$ é uma homotopia e $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então*

$$d(H(\cdot,t), \Omega, b) \quad \text{é constante em} \quad [0,1].$$

Demonstração Para cada $\tau \in [0,1]$, dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que

$$t \in [0,1]; |\tau - t| < \delta \Rightarrow \|H(\cdot,t) - H(\cdot,\tau)\|_{C(\overline{\Omega})} < \varepsilon,$$

já que H é contínua em $\overline{\Omega} \times [0,1]$.

Sendo $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, podemos afirmar através da Proposição 2.1 que:

$$d(H(\cdot,t), \Omega, b) = d(H(\cdot,\tau), \Omega, b) \ \text{ quando } t \approx \tau.$$

Daí, a aplicação $t \mapsto d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ é localmente constante.

Como o intervalo $[0,1]$ é um conjunto compacto e conexo, concluímos que $d(H(\cdot,t), \Omega, b)$ é constante em $[0,1]$. ■

Proposição 2.3: *Seja $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua com $b \notin \varphi(\overline{\Omega})$. Então $d(\varphi, \Omega, b) = 0$.*

Demonstração Seja $\psi \in C^2(\overline{\Omega}, \mathbb{R}^n)$ tal que $\|\varphi - \psi\|_{C(\overline{\Omega})} < \frac{r}{2}$, com $r = \operatorname{dist}(b, \varphi(\partial\Omega))$. Temos, então, que:

$$d(\varphi, \Omega, b) = d(\psi, \Omega, b).$$

Não é difícil verificar que $b \notin \psi(\overline{\Omega})$. Daí, $d(\psi, \Omega, b) = 0$ (veja Definição 2.1) e, por conseguinte, $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. ■

Proposição 2.4: *Sejam $\varphi : \overline{\Omega} \to \mathbb{R}^n$ uma aplicação contínua e $b \notin \varphi(\partial\Omega)$. Se $d(\varphi, \Omega, b) \neq 0$, então existe $x \in \Omega$ tal que $\varphi(x) = b$.*

Demonstração Se supuséssemos que b não pertencesse a $\varphi(\Omega)$, então não existiria $x_0 \in \overline{\Omega}$ tal que $\varphi(x_0) = b$ e, pela Proposição 2.3, teríamos $d(\varphi, \Omega, b) = 0$. ■

Com o auxílio das propriedades do grau de Brouwer para aplicações contínuas exibidas acima, podemos provar o Teorema do Ponto Fixo de Brouwer.

Teorema 2.1 (Teorema do Ponto Fixo de Brouwer): *Seja $\overline{B} = \overline{B}_r(0) = \{x \in \mathbb{R}^n; \|x\| \leq r\}$. Se $f : \overline{B} \longrightarrow \overline{B}$ é uma função contínua, então existe $x_0 \in \overline{B}$ tal que $f(x_0) = x_0$.*

Demonstração Definamos $\varphi : \overline{B} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ por $\varphi(x) = x - f(x)$, para $x \in \overline{B}$. Claramente, φ é uma aplicação contínua em $\overline{B}$.

Se existir $x_0 \in \partial B$ tal que $f(x_0) = x_0$, o resultado está demonstrado. Suponhamos, então, $f(x) \neq x$ (e, portanto, $\varphi(x) \neq 0$), para qualquer $x \in \partial B$. Neste caso, $0 \notin \varphi(\partial B)$.

Consideremos a homotopia $H : \overline{B} \times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $H(x, t) = x - tf(x)$, para $(x, t) \in \overline{B} \times [0, 1]$.

Afirmamos que $0 \notin H(\partial B \times [0, 1])$. De fato, se $t = 1$,

$$H(x, 1) = x - f(x) = \varphi(x) \neq 0, \forall x \in \partial B.$$

Agora, se $t_0 \in [0, 1)$, então para $y \in \partial B$, temos

$$\|t_0 f(y)\| = t_0\|f(y)\| \leq t_0 r < r = \|y\|,$$

o que mostra que $t_0 f(y) \neq y$, para qualquer $y \in \partial B$. Por conseguinte, $H(y, t_0) \neq 0$ para qualquer $y \in \partial B$, e $0 \notin H(\partial B \times [0, 1])$.

Pela Proposição 2.2, $d(H(\cdot, t), B, 0)$ é constante para todo $t \in [0, 1]$. Daí,

$$d(H(\cdot, 0), B, 0) = d(H(\cdot, 1), B, 0). \tag{4}$$

Por outro lado,

$$H(x, 0) = x = I(x),\ \forall x \in \overline{B} \quad \text{e} \quad H(x, 1) = \varphi(x),\ \forall x \in \overline{B}. \tag{5}$$

Então, por (4), (5) e pelo Lema 2.1, temos

$$d(\varphi, B, 0) = d(I, B, 0) = 1.$$

Portanto, $d(\varphi, B, 0) \neq 0$ e, pela Proposição 2.4, concluímos que existe $x_0 \in B$ tal que $\varphi(x_0) = 0$, ou seja, existe $x_0 \in B$ tal que $f(x_0) = x_0$. ■

3 GRAU DE LERAY-SCHAUDER

Veremos, agora, a teoria do grau válida em espaços de dimensão infinita.

No que segue, E denota um espaço de Banach munido da norma $\|.\|$.

Definição 3.1: *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E. Diremos que uma aplicação do tipo $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade, onde $I : E \longrightarrow E$ é a aplicação identidade e $T \in C(\overline{\Omega}, E)$, quando $T(\overline{\Omega})$ estiver contido em um subespaço de dimensão finita de E.*

Definição 3.2: *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E e seja $\phi = I - T : \overline{\Omega} \to E$ uma perturbação de dimensão finita da identidade. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e F for um subespaço de dimensão finita de E contendo b e $T(\overline{\Omega})$, definiremos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por:*

$$d(\phi, \Omega, b) := d(\phi_{|\overline{\Omega} \cap F}, \Omega \cap F, b).$$

Nos trabalhos [2] e [1] o leitor encontrará a prova detalhada de que a Definição 3.2 é consistente, isto é, independe da escolha do subespaço F.

Definição 3.3: *Seja Ω um subconjunto aberto e limitado de E. Um operador $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é dito compacto se é contínuo e $T(\overline{\Omega})$ é relativamente compacto (ou seja, o conjunto $\overline{T(\overline{\Omega})}$ é compacto).*

Denotemos o conjunto de todos os operadores compactos $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ por $Q(\overline{\Omega}, E)$.

Não é difícil verificar que $Q(\overline{\Omega}, E)$ munido da norma

$$\|T\|_Q = \sup_{x\in\overline{\Omega}} \|T(x)\|, \quad T \in Q(\overline{\Omega}, E).$$

é um espaço de Banach.

Lema 3.1: *Seja $K \subset E$ compacto. Então, dado $\varepsilon > 0$, existe um subespaço de dimensão finita F_ϵ de E e uma aplicação contínua $g_\varepsilon : K \longrightarrow F_\varepsilon$ tal que $\|x - g_\varepsilon(x)\| < \varepsilon$, para qualquer $x \in K$.*

Demonstração Dado $\epsilon > 0$, temos que $K \subset \bigcup_{x\in K} B(x, \epsilon)$. Segue da compacidade de K que existem $y_1, ..., y_n \in E$ tais que

$$K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(y_i, \varepsilon).$$

Consideremos $F_\varepsilon = [y_1, ..., y_n]$ (subespaço gerado por $y_1, ..., y_n$). Claramente, $\dim F_\varepsilon < \infty$. Para todo $i \in \{1, ..., n\}$, consideremos as seguintes funções

$$b_i : E \longrightarrow \mathbb{R}, \text{ definidas por}$$

$$b_i(x) = \begin{cases} \varepsilon - \|x - y_i\|, \text{ se } x \in B(y_i, \varepsilon) \\ 0, \text{ se } x \notin B(y_i, \varepsilon). \end{cases}$$

Usando as funções $b_i's$, definimos $g_\varepsilon : K \longrightarrow F_\epsilon$ por

$$g_\varepsilon(x) = \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^n b_i(x)}.$$

Como as funções $b_i's$ são contínuas, segue que g_ε também é contínua.

Além disso,

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) x}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} - \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x) y_i}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \right\| = \left\| \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)(x - y_i)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \right\| \le \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)\|x - y_i\|}{\sum_{i=1}^n b_i(x)}.$$

Daí, para todo $x \in K$,

$$\|x - g_\varepsilon(x)\| < \frac{\sum_{i=1}^n b_i(x)}{\sum_{i=1}^n b_i(x)} \varepsilon = \varepsilon.$$

■

Definição 3.4: *Se $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ for um operador compacto, diremos que a aplicação $\phi = I - T$ é uma perturbação compacta da identidade.*

A demonstração do resultado abaixo pode ser encontrada em [1].

Lema 3.2: *Seja ϕ uma perturbação compacta da identidade, onde $\phi = I - T$, $T : \overline{\Omega} \to E$ e $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Então:*

i) ϕ é um operador fechado (isto é, a imagem por ϕ de um conjunto fechado é um conjunto fechado);

ii) ϕ é própria (isto é, a imagem inversa por ϕ de um conjunto compacto é um conjunto compacto).

Considere $\phi = I - T$ uma perturbação compacta da identidade, com $T \in Q(\overline{\Omega}, E)$. Segundo o Lema 3.2, temos que $\phi(\partial\Omega)$ é fechado em E. Assim, $r = \text{dist}\,(b, \phi(\partial\Omega)) > 0$. Afirmamos que existe uma uma perturbação de dimensão finita da identidade $\phi_r = I - T_r$, tal que $\|\phi - \phi_r\| < \frac{r}{2}$ e $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$.

Considere $K = T(\overline{\Omega})$ e observe que K é compacto em E, pois T é compacto. Pelo Lema 3.1, existe um subespaço de dimensão finita $F_{\frac{r}{2}}$ e uma aplicação contínua $g_{\frac{r}{2}} : K \longrightarrow F_{\frac{r}{2}}$ tal que

$$\|y - g_{\frac{r}{2}}(y)\| < \frac{r}{2}, \qquad \text{para qualquer } y \in K. \tag{6}$$

Defina $T_r : \overline{\Omega} \longrightarrow F_{\frac{r}{2}}$ e $\phi_r : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ por $T_r(x) = (g_{\frac{r}{2}} \circ T)(x)$ e $\phi_r(x) = x - T_r(x)$, para $x \in \overline{\Omega}$, respectivamente.

Verifiquemos que $\|\phi - \phi_r\| < \frac{r}{2}$ e $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$. Com efeito, dado qualquer $x \in \overline{\Omega}$, temos:

$$\|\phi(x) - \phi_r(x)\| = \|x - T(x) - [x - T_r(x)]\| = \|T(x) - T_r(x)\| = \|T(x) - g_{\frac{r}{2}}(T(x))\| < \frac{r}{2},$$

por (6). Portanto $\|\phi - \phi_r\| < \frac{r}{2}$. Além disso, se $x_0 \in \partial\Omega$, então

$$\|b - \phi_r(x_0)\| \geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - \phi_r(x_0)\| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2},$$

de onde segue que $b \notin \phi_r(\partial\Omega)$.

Definição 3.5: *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ uma aplicação, onde $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é um operador compacto. Se $b \notin \phi(\partial\Omega)$, definimos o grau de Leray-Schauder de ϕ em Ω com relação a b por*

$$d(\phi, \Omega, b) = d(\phi_r, \Omega, b),$$

onde $\phi_r = I - T_r$ é uma perturbação de dimensão finita da identidade que satisfaz

$$\|\phi - \phi_r\| < \frac{r}{2}, \tag{7}$$

onde $r = \text{dist}\,(b, \phi(\partial\Omega))$.

Note que o conjunto das perturbações de dimensão finita da identidade que usaremos para calcular o grau $d(\phi, \Omega, b)$ é não vazio, pois a aplicação $\phi_r = I - T_r$, com $T_r = g_{\frac{r}{2}} \circ T$, cumpre as exigências da Definição 3.5.

Proposição 3.1: *A Definição 3.5 independe da escolha de ϕ_r.*

Demonstração Sejam $\phi_{r_1} = I - T_{r_1}$ e $\phi_{r_2} = I - T_{r_2}$, onde $\phi_{r_1}, \phi_{r_2} : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ são duas perturbações finitas da identidade, com

$$\|\phi - \phi_{r_i}\| < \frac{r}{2}, \quad i = 1, 2,$$

e

$$r = \text{dist}\,(b, \phi(\partial\Omega)).$$

Sejam F_1 e F_2 subespaços de dimensão finita de E tais que $T_{r_i}(\overline{\Omega}) \subset F_i$ e $b \in F_i$ para $i = 1, 2$.

O subespaço $F = F_1 + F_2$ contém b e $T_{r_i}(\overline{\Omega})$, para $i = 1, 2$.

Para facilitar a notação, tomemos $\overline{\phi}_{r_i} = \phi_{r_i|\overline{\Omega} \cap F}, i = 1, 2$. Desta forma,

$$d(\phi_{r_i}, \Omega, b) = d(\overline{\phi}_{r_i}, \Omega \cap F, b), \quad i = 1, 2.$$

Consideremos, agora, a homotopia $H : (\overline{\Omega} \cap F) \times [0, 1] \longrightarrow F$ dada por $H(x, t) = t\overline{\phi}_{r_1}(x) + (1 - t)\overline{\phi}_{r_2}(x)$, para $(x, t) \in (\overline{\Omega} \cap F) \times [0, 1]$.

Veja que

$$\|\phi(x) - H(x,t)\| = \|t\phi(x) + (1-t)\phi(x) - t\overline{\phi}_{r_1}(x) - (1-t)\overline{\phi}_{r_2}(x)\| \leq$$
$$\leq t\|\phi(x) - \overline{\phi}_{r_1}(x)\| + (1-t)\|\phi(x) - \overline{\phi}_{r_2}(x)\| < r\frac{r}{2} + (1-t)\frac{r}{2} = \frac{r}{2}.$$

Dessa forma $b \notin H(\partial(\overline{\Omega} \cap F) \times [0,1])$, pois, para $x_0 \in \partial(\overline{\Omega} \cap F)$, temos

$$\|b - H(x_0,t_0)\| \geq \|b - \phi(x_0)\| - \|\phi(x_0) - H(x_0,t_0)\| > r - \frac{r}{2} = \frac{r}{2},$$

para todo $t \in [0,1]$. Usando a Invariância do Grau de Brouwer por homotopia, temos

$$d(\phi_{r_1},\Omega,b) = d(\overline{\phi}_{r_1},\Omega \cap F,b) = d(\overline{\phi}_{r_2},\Omega \cap F,b) = d(\phi_{r_2},\Omega,b).$$

■

Dentre as propriedades do grau de Leray-Schauder, destacamos as seguintes:

Proposição 3.2: *Se Ω é um subconjunto aberto e limitado de E e $I : E \to E$ é a aplicação identidade, então:*

$$d(I,\Omega,b) = \begin{cases} 1, & b \in \Omega \\ 0, & b \notin \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Proposição 3.3: *Sejam Ω um subconjunto aberto e limitado de E e $\phi = I - T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ uma aplicação, onde $T : \overline{\Omega} \longrightarrow E$ é um operador compacto. Se $b \notin \phi(\overline{\Omega})$, então $d(\phi,\Omega,b) = 0$. Em particular, temos que se $b \notin \phi(\partial\Omega)$ e $d(\phi,\Omega,b) \neq 0$, então existe $u_0 \in \Omega$ tal que $\phi(u_0) = b$.*

Proposição 3.4: *Seja H uma aplicação em $C(\overline{\Omega} \times [0,1],E)$ definida por $H(x,t) = x - S(x,t)$, para $(x,t) \in \overline{\Omega} \times [0,1]$, onde $S : \overline{\Omega} \times [0,1] \longrightarrow E$ é um operador compacto. Se $b \notin H(\partial\Omega \times [0,1])$, então $d(H(\cdot,t),\Omega,b)$ é constante em $[0,1]$.*

As demonstrações das proposições acima são extensas e, por isso, julgamos por bem não explorá-las aqui. Estas podem ser encontradas em [2] e [1].

Como consequência das três propriedades listadas acima, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 3.1 (Teorema do Ponto Fixo de Schaefer): *Seja $T : E \longrightarrow E$ um operador compacto. Se existir $r > 0$ tal que*

$$\sigma T(u) = u \Leftrightarrow \|u\| < r,$$

para $u \in E$ e $\sigma \in [0,1]$, então T admitirá um ponto fixo em E.

Demonstração Seja $\overline{B}_r(0) = \{x \in E; \|x\| \leq r\}$ e defina $H : \overline{B}_r(0) \times [0,1] \longrightarrow E$ por $H(u,\sigma) = u - \sigma T(u)$, para $(u,\sigma) \in \overline{B}_r(0) \times [0,1]$.

Afirmamos que $0 \notin H(\partial B_r(0) \times [0,1])$. De fato,

$$0 = H(u,\sigma) \Leftrightarrow 0 = u - \sigma T(u) \Leftrightarrow u = \sigma T(u) \Leftrightarrow u \in B_r(0).$$

Pela Proposição 3.4, temos

$$d(H(\cdot,0),B_r(0),0) = d(H(\cdot,1),B_r(0),0) \Rightarrow d(I,B_r(0),0) = d(I-T,B_r(0),0).$$

Então, pela Proposição 3.2, $d(I-T,B_r(0),0) = 1 \neq 0$ e, pela Proposição 3.3, existe $u \in B_r(0)$ tal que

$$(I-T)u = 0, \text{ isto é, } u = T(u).$$

■

REFERÊNCIAS

[1] H. Berestycki, *Méthodes Topologiques et Problèmes Aux Limites non Linéaires*. PhD thesis, Université de Paris VI, 1975.

[2] O. B. Almeida, “Teoria do grau e aplicações,” Master’s thesis, Universidade Federal de Campina Grande, 2006.