.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

A test for the UC-solution of optimization problems with an interval-valued objective function

Ulcilea A. S. Leal[*]
Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, UFMS/CPCS
Rod. MS 306 Km 105 Caixa Postal 102
79560-000, Chapadão do Sul , MS
E-mail: ulcilea.leal@ufms.br

Geraldo N. Silva **Gino G. M. Huamán**
Universidade Estadual Paulista, UNESP
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: gsilva@ibilce.unesp.br gigu1885@hotmail.com

ABSTRACT

We study optimization problems with an interval-valued objective function of the form

$$\begin{array}{l} \min \quad F(\mathbf{x}) = [\underline{f}(\mathbf{x}), \overline{f}(\mathbf{x})] \\ \text{subject to:} \\ g_i(\mathbf{x}) \leq 0, \;\; i = 1, ..., m, \end{array} \tag{1}$$

where $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ is a real-valued vector function, $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{I}(\mathbb{R})$ is an interval-valued objective function, and $X = \{x \in \mathbb{R}^n | \; g_i(x) \leq 0, \;\; i = 1, ..., m\}$ is the feasible set. The first thing to be considered is how the solutions of problem (1) are "ranked" since we have an interval-valued objective function. The solution concept for this problem is defined from a partial order relation in the space $\mathbb{I}(\mathbb{R})$. We study the problem (1) using the order relation $\leq_{UC}$ in $\mathbb{I}(\mathbb{R})$ as follows:

Let $A = [\underline{a}, \overline{a}]$ and $B = [\underline{b}, \overline{b}]$ be two intervals. The order relation $\leq_{UC}$ is defined by Wu [1]

$$A \leq_{UC} B \text{ if and only if } \overline{a} \leq \overline{b} \text{ and } a^C \leq b^C,$$

where $a^C = \frac{\underline{a}+\overline{a}}{2}$. The strict order relation is defined by $A <_{UC} B$ if and only if $A \leq_{UC} B$ and $A \neq B$. For this order relation, the solution concept for the optimization problem is defined by Wu [1]: let $\widehat{\mathbf{x}}$ be a feasible solution of problem (1); i.e., $\widehat{\mathbf{x}} \in X$. Then, $\widehat{\mathbf{x}}$ is a UC-solution of problem (1) if there exists no $\mathbf{x} \in X$ such that $F(\mathbf{x}) <_{UC} F(\widehat{\mathbf{x}})$.

Theorem 1 *If $\widehat{\boldsymbol{x}}$ is a UC-solution of the problem (1), then $\widehat{\boldsymbol{x}}$ solves the following two problems:*

$$(P_1) \begin{cases} \min \quad \overline{f}(\boldsymbol{x}) \\ \textit{subject to:} \\ f^C(\boldsymbol{x}) \leq f^C(\widehat{\boldsymbol{x}}) \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \;\; i = 1, ..., m, \end{cases} \quad \textit{and} \quad (P_2) \begin{cases} \min \quad f^C(\boldsymbol{x}) \\ \textit{subject to:} \\ \overline{f}(\boldsymbol{x}) \leq \overline{f}(\widehat{\boldsymbol{x}}) \\ g_i(\boldsymbol{x}) \leq 0, \;\; i = 1, ..., m. \end{cases}$$

Reciprocally, if $\widehat{\boldsymbol{x}}$ solves (P_1) and (P_2), then $\widehat{\boldsymbol{x}}$ is a UC-solution of the problem (1).

References

[1] WU, H. C. The Karush Kuhn Tucker optimality conditions in an optimization problem with interval-valued objective function. *European Jornaul of Operation Research*, v.176, p. 47-59, 2007.

[*]The research has been partially supported by both FAPESP and Capes Foundation under the grants 2012/00189 and BEX 11153/3-0, respectively.

Distâncias de Bregman e algumas de suas propriedades aplicadas a otimização convexa

Rafael Martin Gonçalez*
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: rmgoncalez@yahoo.com.br

Celia Ap. Z. Barcelos
Instituto de Matemática, UFFU
Av. João Naves de Ávila 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: celiazb@gmail.com

RESUMO

Distância de Bregman é um tipo de distância não convencional que pode ser definida da seguinte maneira:
(Bregman, 1967; Censor e Zenios, 1998) Seja $\phi : S \to R$, $S = dom(\phi)$ uma função estritamente convexa definida em um conjunto convexo $S \subset R^d$ tal que ϕ é diferenciável no interior relativo de S, denotado por ri(S), que supostamente é não vazio. A distância de Bregman $d_\phi : S \times ri(S) \to [0, +\infty)$ é definida como:

$$d_\phi(x, y) = \phi(x) - \phi(y) - \langle x - y, \nabla\phi(y)\rangle,$$

em que $\nabla\phi(y)$ representa o vetor gradiente de ϕ calculado em y e ϕ é chamada de função de Bregman. Dentre suas propriedades destacamos as seguintes: não negatividade, convexidade, linearidade, separação linear e a identidade dos três pontos que é uma generalização do teorema de pitágoras e que podem ser usadas para a construção de uma sequência de funções $\{\varphi_k(\cdot)\}$ que satisfazem desigualdades fundamentais para métodos de resolução do problema de otimização convexa restrita, como o de Auslender e Teboulle [**?**].

References

[1] AUSLENDER, A.; TEBOULLE, M. Interior gradient and proximal methods for convex and conic optimization, *Computacional Optimization and Applications*, (2007)

[2] BANERJEE, A.; MERUGU, S. Clustering with Bregman Divergence. *Journal of Machine Learning Research*, 6 1705-1749 (2005)

[3] ROSSETTO, D. R. Tópicos em métodos ótimos para otimização convexa, *Tese de Doutorado*, Universidade de São Paulo, 2012

[4] TSENG, P. On accelerated proximal gradient methods for convex-concave optimization. *submitted to SIAM Journal on Optimization*, 2008

*Bolsista de Mestrado - FAPEMIG

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Equações de Volterra Estocásticas Governadas por Processos de Lévy

Fabiano F. T. dos Santos
Instituto de Matemática e Estatística, UFG
Campus Samambaia, CP 131
74001-970, Goiânia, GO
E-mail: fortunato@ufg.br

RESUMO

As equações de Volterra estocásticas estão inseridas em diversas áreas do conhecimento, modelando fenômenos na Física [5], Ciências Biológicas [3] e Finanças [6]. tais equações têm a forma

$$V(t) = \int_0^t K(t,s)V(s)ds + X(t),\ t \geq 0, \tag{1}$$

onde, $K(\cdot,\cdot)$ é chamado núcleo de Volterra e $X = \{X(t) : t \geq 0\}$ é um processo estocástico. Em seu livro [2], Reid utiliza o núcleo resolvente $\Gamma(\cdot,\cdot)$ associado ao núcleo de Volterra, para mostrar que o processo

$$V(t) = -\int_0^t \Gamma(t,s)X(s)ds + X(t), \tag{2}$$

é solução da equação (1), quando X é um processo de segunda ordem. Se o processo que governa a equação de Volterra não tiver, necessariamente, segundo momento finito, então o cálculo de Itô ([4],[5]) não poderá ser utilizado. Uma classe importante de processos com esta característica são os processos α-estáveis [7]. Se o processo X for um processo α-estável, com índice de estabilidade $\alpha \in (0,2)$, Santos mostrou em [8], adaptando a técnica de Reid, que (2) ainda é solução da equação (1).

A proposta agora, é resolver a equação (1), quando X pertence a uma classe que contém os processos α-estáveis; os processos de Lévy [1].

Referências

[1] BERTOIN, J. *Levy Processes.* Cambridge University Press, 1996.

[2] BHARUCHA-REID, A. T. *Random Integral Equations.* New York: Academic Press, v. 96, 1972.

[3] KUBO, R.; TODA, M.; HASHITSUME, N. *Statistical Physics II: Nonequilibrium Statistical Mechanics.* Berlin: Springer-Verlag, Springer Series in Solid-State Science, v.31, 1985.

[4] OKSENDAL, B. *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications.* 5th ed. London: Springer-Verlag, 1998.

[5] PROTTER, P. E. *Stochastic Integration and Differential Equations.* 2th ed. Berlin: Springer-Verlag, 2005.

[6] PROTTER, P. E. Volterra Equations Driven by Semimartingales. *The Annals of Probability*, v. 13, p. 519-503, 1985.

[7] SAMORODNITSKY, G.; TAQQU, M. S. *Stable Non-Gaussian Random Processes - Stochastic Models with Infinite Variance.* London: Chapman & Hall, 2000.

[8] SANTOS, F. F. T. *Class of Solutions for the Generalized Langevin Equation.* PhD Thesis (in portuguese), Department of Mathematics at the University of Brasilia, Brazil, 2011.

Estudo sobre o aumento da ordem de precisão de funcionais integrais dependentes da solução de EDPs via equação adjunta

Alessandro A. Santana
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: alessandro@famat.ufu.br

RESUMO

O trabalho que foi desenvolvido tem por finalidade apresentar um estudo numérico sobre um método de aumento da ordem de precisão no cálculo de funções definidas por integrais cujo integrando é proveniente da solução de equações diferenciais. Esse método se baseia na utilização da solução da chamada equação adjunta. Os trabalhos de Giles e Pierce [1, 2, 3, 4, 5, 6] mostram que essa técnica, através de testes computacionais, dobra a ordem de precisão do funcional integral. Com a finalidade de entendimento da teoria apresentada por Giles, nesse estudo foi reproduzido um teste computacional apresentado pelo mesmo, de um problema bidimensional, envolvendo o cálculo de um funcional integral cujo integrando é solução da equação de Poisson. Tal reprodução envolveu o emprego de uma grande quantidade de outros métodos numéricos para que o objetivo do estudo fosse atingido e a teoria fosse assimilada.

Referências

[1] Giles, M. e Pierce, N.; "Adjoint Recovery of Superconvergent Functionals from Approximate solutions of Partial Differential Equations" , Relatório Técnico, Oxford University, 1998.

[2] Giles, M. e Pierce, N.; "Adjoint Error Correction for Integral Outputs" , Relatório Técnico, Oxford University, 1998.

[3] Giles, M. e Pierce, N.; Adjoint Recovery of Superconvergent Functionals from PDE Approximations , *SIAM Review*, 42 (2000) 247-264.

[4] Giles, M. e Pierce, N.; "Analysis of Adjoint Error Correction for Superconvergent Functional Estimates", Relatório Técnico, Oxford University, 2001.

[5] Giles, M. e Pierce, N.; An Introduction to the Adjoint Approach to Design , *Flow, Turbulence and Combustion*, 65 (2000) 393-415.

[6] Giles, M. e Pierce, N. e Endre, S. ; Progress in adjoint error correction for integral functionals , *Computing and Visualization in Science*, 6 (2-3) (2004), 113-121.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

K-lateration applied to the K-Discretizable Molecular Distance Geometry Problem

Germano Abud
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: germano@famat.ufu.br

RESUMO

Euclidean distance geometry is the study of Euclidean geometry based on the concept of distance. This is useful in several applications where the input data consists of an incomplete set of distances, and the output is a set of points in Euclidean space realizing the given distances [3]. The K - *Discretizable Molecular Distance Geometry Problem* (^{K}**DMDGP**) is an important class of problems. The input is: a positive integer K; a simple weighted undirected graph $G = (V, E, d)$; an order $<$ on V such that $\{u, v\} \in E$, for each $v > K$ and $v - K \leq u \leq v - 1$; a valid realization $\bar{x} : \{1, \ldots, K\} \to \mathbb{R}^K$ of the first K vertices. The ^{K}DMDGP asks to decide whether $\bar{x}$ can be extended to a valid realization of G [3].

In this work we consider $K \in \{2, 3\}$. The Branch-and-Prune (**BP**) algorithm [3] envolves a binary search and finds all solutions of a ^{K}DMDGP instance. It is possible to determine the number of solutions of a given ^{K}DMDGP instance from data input [2], assuming the given set of distances is embeddable. If $d_{ij}, |i-j| \geq (K+1)$ is known then the subproblem associated to vertices $\{v_i, \ldots, v_j\}$ has unique solution.

We will apply sucessive bilaterations ($K = 2$) and sucessive trilaterations ($K = 3$) to "antecipate" prunes corresponding to $d_{ij}, |i-j| \geq (K+1)$. We denote p_i the position vector of a point P_i (in $\mathbb{R}^2$ or $\mathbb{R}^3$), $p_{i,j}$ the vector $\overrightarrow{P_iP_j}$ and $\mathrm{D}(i_1, \ldots, i_n; j_1, \ldots, j_n)$ the Cayley-Menger bideterminant associated to the sequences of points $\{P_{i_1}, \ldots, P_{i_n}\}$ and $\{Q_{j_1}, \ldots, Q_{j_n}\}$ (if the sequences are the same, we write $\mathrm{D}(i_1, \ldots, i_n)$). Consider a triangle on the plane with vertices P_i, P_j, P_k. We have by bilateration:

$$p_{i,k} = Z_{i,j,k} p_{i,j}, \quad Z_{i,j,k} = \frac{1}{\mathrm{D}(i,j)} \begin{pmatrix} \mathrm{D}(i,j;i,k) & \mp\sqrt{\mathrm{D}(i,j,k)} \\ \pm\sqrt{\mathrm{D}(i,j,k)} & \mathrm{D}(i,j;i,k) \end{pmatrix} \tag{1}$$

Now, given a ^{2}DMDGP instance such that $d_{1n}, n \geq 5$ is knowning and no other distances (except those associated with triples of consecutive vertices) are given, we can apply sucessive bilaterations to express d_{1n} in terms of d_{1k} and knowning distances [1]. At level k of **BP**, the above equation involves only known distances (and those obtained in previous levels) and the unknown d_{1k}. So we have additional prunes from level 4 to level $n-1$ and only feasible solutions are stored in each level. Generally, if $d_{ij}, |i-j| \geq 4$ is a prune information this procedure can be applied from level i to level j. Analogously to bilateration, a trilateration formula can be applied to set $\{P_{i_1}, P_{i_2}, P_{i_3}, P_{i_4}, P_{i_5}\}$ in $\mathbb{R}^3$ such that the distance d_{i_4,i_5} is unknown. Now, consider a ^{3}DMDGP instance such that $d_{1n}, n \geq 6$ is known and no other distances (except those associated with quadruples of consecutive vetices) are given. If $d_{ij}, |i-j| \geq 5$ is a prune information, applying sucessive trilaterations [1] we have additional prunes from level i to level j.

Referências

[1] ABUD,G.; LAVOR,C. *Explorando a Dualidade em Geometria de Distâncias*, Tese de doutorado, IMECC-Unicamp, 2014.

[2] LIBERTI,L.; LAVOR,C.; ALENCAR,J.; ABUD, G. Counting the Number of Solutions of K-DMDGP Instances, *Lecture Notes in Computer Science* **8085**, 224–230, 2013.

[3] LIBERTI,L.; LAVOR,C.; MACULAN,N.; MUCHERINO,A. *Euclidean Distance Geometry and Applications*, SIAM Review **56**(1), 3–69, 2014.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Novas construções de reticulados D_n rotacionados via $\mathbb{Z}$-módulos

Agnaldo J. Ferrari*
Faculdade de Ciências, UNESP
Av. Luiz E. C. Coube, 14-01
17033-360, Bauru, SP
E-mail: ferrari@fc.unesp.br

Grasiele C. Jorge†
Inst. de Ciência e Tecnologia, UNIFESP
Av. Cesare Mansueto Giulio Lattes, 1201
12247-014, São José dos Campos, SP
E-mail: grasiele.jorge@unifesp.br

Antonio Aparecido de Andrade‡
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, UNESP
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: andrade@ibilce.unesp.br

RESUMO

Um sistema de comunicação pode ser considerado como um conjunto de equipamentos e meios físicos com a finalidade de transportar uma informação de uma fonte até um destinatário usando um canal de comunicação. Um canal é um meio físico por onde a informação é transmitida e está sujeito a vários tipos de ruídos, imperfeições e interferências que geram distorções. Um canal muito usado na transmissão de sinais é o canal com desvanecimento do tipo Rayleigh, caracterizado pela propagação por múltiplos percursos formados pela reflexão e/ou difração do sinal transmitido.

O processo de projetar um conjunto de palavras-código pode ser reduzido a um problema geométrico de alocação de pontos em uma região de um espaço. Os códigos construídos a partir de reticulados constituem numa das técnicas de alocação de pontos.

Constelações de sinais tendo a estrutura de reticulados são consideradas importantes para a transmissão de sinais pois as estruturas algébricas e geométricas dos reticulados facilitam no processo de codificação e decodificação. Uma boa constelação de sinais para um canal com desvanecimento do tipo Rayleigh deve apresentar pequena probabilidade de erros na transmissão, e uma baixa probabilidade de erros está fortemente ligada à diversidade do reticulado e a uma distância produto mínima grande([1], [2]).

Neste trabalho, construímos uma nova família de reticulados D_n rotacionados via Teoria Algébrica dos Números [3], que apresentam excelente desempenho para o canal com desvanecimento do tipo Rayleigh, pois os reticulados possuem diversidade máxima e boa distância produto mínima. A construção é feita via $\mathbb{Z}$-módulos contidos em subcorpos de corpos ciclotômicos e a técnica utilizada consiste na manipulação matricial da matriz de Gram de um reticulado preestabelecido.

Referências

[1] BOUTROS, J.; VITERBO, E.; RASTELLO, C.; BELFIORE, J. C. Good lattice constellations for both Rayleigh fading and Gaussian channels. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, v. 42, n. 2, pp. 502-518, 1996.

[2] FLUCKIGER, E. B.; OGGIER, F.; VITERBO, E. New algebraic constructions of rotated $\mathbb{Z}^n$-lattice constellations for the Rayleigh fading channel. *IEEE Trans. on Inf. Theory*, v. 50, n. 4, pp. 702-714, 2004.

[3] VITERBO, E.; OGGIER, F. Algebraic number theory and code design for Rayleigh fading channels. *Foundations and Trends in Communications and Information Theory*, v. 1, n.3, 2004.

*Projetos FAPESP no. 2013/25977-7 e 2014/14449-2.
†Projeto FAPESP no. 2013/25977-7.
‡Projeto FAPESP no. 2013/25977-7.

Ordem e Caos em Sistemas Hamiltonianos pelos Métodos dos Índices de Alinhamento (SALI e GALI): Fundamentação Teórica para Posterior Aplicação no Estudo de Órbitas Estelares.

Ms. Lucas Antonio Caritá*
Instituto de Pesquisa e Desenvolvimento, IP&D
Universidade do Vale do Paraíba, UNIVAP
Av. Shishima Hifumi, 12244-000, São José dos Campos, SP
E-mail: lucasacarita@gmail.com

RESUMO

A distinção entre comportamento ordenado ou caótico é essencial para o estudo em sistemas dinâmicos. Sendo assim, necessitamos conhecer ferramentas matemáticas que nos ajudem a identificar movimentos ordenados ou caóticos na característica de uma órbita. Alternativos (ou complementares) ao famigerado Método dos Expoentes Característicos de Lyapunov, em Sistemas Hamiltonianos, podemos lançar mão dos Métodos dos Índices de Alinhamento, idealizados por Skokos a partir de 2001.

Considerando um fluxo hamiltoniano (N graus de liberdade), uma órbita no espaço de fase $2N$-dimensional com condição inicial $P(0) = (x_1(0), \cdots, x_{2N}(0))$ e dois vetores de desvios iniciais distintos $w_1(t)$ e $w_2(t)$ a partir do ponto inicial $P(0)$, define-se o Menor Índice de Alinhamento (SALI) por:

$$SALI(t) = min\{||\widehat{w}_1(t) + \widehat{w}_2(t)||, ||\widehat{w}_1(t) - \widehat{w}_2(t)||\} \tag{1}$$

onde $\widehat{w}_i(t) = \dfrac{w_i(t)}{||w_i(t)||}$ para $i \in \{1, 2\}$.

Nas mesmas condições, mas tomando p vetores de desvio da órbita em questão, onde $2 \leq p \leq 2N$, em vez de apenas dois, define-se a generalização do SALI. O Índice de Alinhamento Generalizado (GALI) de ordem p é definido como:

$$GALI_p(t) = ||\widehat{w}_1(t) \wedge \widehat{w}_2(t) \wedge \cdots \wedge \widehat{w}_p(t)|| \tag{2}$$

onde $\widehat{w}_i(t) = \dfrac{w_i(t)}{||w_i(t)||}$ para $i \in \{1, \cdots, p\}$ e $\wedge$ denota produto exterior.

Os valores SALI e GALI possuem comportamentos temporais específicos para movimentos ordenados ou caóticos, o que torna a distinção entre ordem e caos facilmente observável nestes sistemas. O objetivo neste trabalho será apresentar e demonstrar como SALI e GALI se comportam em ambos os casos: movimento ordenado e movimento caótico.

Futuramente, aplicaremos estes métodos para auxiliar no estudo de órbitas estelares imersas em potenciais gravitacionais, que evoluem com o tempo, de galáxias barradas, uma vez que, o movimento de uma partícula de teste em um modelo tridimensional de rotação de uma galáxia barrada é dado pelo Hamiltoniano:

$$H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z) + \Omega_b(xp_y - yp_x) \tag{3}$$

onde a barra roda em torno de z, x e y contém respectivamente os eixos maior e menor da barra galáctica, V é o potencial gravitacional e Ω_b representa a velocidade angular padrão da barra. Desse modo, a partir das condições iniciais, poderemos identificar se uma órbita estelar é ordenada ou caótica nestes potenciais gravitacionais.

Referências

[1] MANOS, T.; ATHANASSOULA, E. Regular and chaotic orbits in barred galaxies - I. Applying the SALI/GALI method to explore their distribution in several models. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, v. 000, n. 1, p. 1-15, 2011.

[2] SKOKOS, H.; BOUNTIS, T. Complex Hamiltonian Dynamics. *Springer*, New York, 2012.

*Graduado e Mestre em Matemática pela Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho"(UNESP). Bolsita CAPES de Doutorado em Física e Astronomia pela Universidade do Vale do Paraíba (UNIVAP), sob orientação do Dr. Irapuan Rodrigues de Oliveira Filho (UNIVAP, Brasil) e coorientação do Dr. Ivânio Puerari (INAOE, México).

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2: Uma Aplicação à Dinâmica Populacional

Nathali Vega Cabrera * **Rosana Sueli da Motta Jafelice**

Ana Maria Bertone
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: nathyvc232@gmail.com motta@ufu.br
anamaria@famat.ufu.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é modelar a população do Peru mediante o modelo de Montroll clássico com parâmetro fuzzy obtido via Sistema Baseado em Regras Fuzzy Tipo 2 (SBRF Tipo 2) [2]. As variáveis de entrada do SBRF Tipo 2 são a taxa de fertilidade e de crescimento econômico e a variável de saída é a taxa de crescimento populacional do país. A teoria de conjuntos fuzzy tipo 2 está sendo muito pesquisada nos últimos anos. Um dos motivos é uma característica dos conjuntos fuzzy tipo 2: a "mancha" de incerteza (FOU-Footprint of Uncertainty). A região do plano determinado pela FOU permite lidar com modelos incertos ou graduais onde as informações fornecidas por vários especialistas podem ser consideradas simultaneamente. Na evolução dos modelos da dinâmica populacional, podemos destacar o de Montroll (1971), que propôs um modelo geral de crescimento assintótico. Sendo $P = P_\lambda(t)$, o valor da população em um instante t; a taxa de crescimento da população $\lambda = \lambda(f, ce)$, um parâmetro do tipo 2 intervalar que depende das variáveis taxa de fertilidade, f, e taxa de crescimento econômico, ce. Neste estudo o modelo de Montroll é dado pela equação diferencial não linear,

$$\frac{dP}{dt} = \lambda P \left[1 - \left(\frac{P}{P_\infty}\right)^\alpha\right], \tag{1}$$

onde $\alpha = 0,1$ e $P_\infty = 53.587.774$ são obtidos pelo Método dos Quadrados Mínimos para os dados do censo do Peru de 1961 a 2013 [1].

O SBRF Tipo 2 é composto por cinco componentes: fuzzificador, inferência, base de regras, redutor do tipo 1 e defuzzificador. Para o redutor do tipo 1 utilizamos o método do centroide [4]. O cálculo deste centroide é obtido aplicando o algoritmo de Karnik-Mendel [3]. Este algoritmo fornece o intervalo fechado $[\lambda_L, \lambda_R]$, sendo λ_L e λ_R o mínimo e o máximo, respectivamente, dos centroides dos conjuntos fuzzy tipo 1 cuja função de pertinência está contida na FOU. A defuzzificação é dada por: $\widehat{\lambda} = \dfrac{\lambda_L + \lambda_R}{2}$.

Desta forma, obtemos $P_{\lambda_L}(t) \leq P_\lambda(t) \leq P_{\lambda_R}(t)$ onde $\widehat{\lambda} \in [\lambda_L, \lambda_R]$, sendo $P_{\widehat{\lambda}}(t)$ a curva que melhor se ajusta aos dados da população do Peru.

Referências

[1] CABRERA, N.V. Aplicação da Extensão de Zadeh para Conjuntos Fuzzy Tipo 2 Intervalar, *Dissertação de Mestrado em Matemática, Universidade Federal de Uberlândia*, 2014

[2] CASTILLO O.; MELIN P. *Type-2 fuzzy logic: Theory and Applications*, Springer, Heidelberg, Alemanha, 2008.

[3] KARNIK, N. N.; MENDEL, J.M. Introduction to Type-2 Fuzzy Logic Systems. Fuzzy Systems Proceedings, *IEEE World Congress on Computational Intelligence*, v. 2, Anchorage, AK, p. 915-920, 1998.

[4] MENDEL J.M.; WU H. New results about the centroid of an interval type-2 fuzzy set, including the centroid of a fuzzy granule, *Information Sciences* , v. 177, p. 360-377, 2007.

*Mestre em Matemática.