.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

O Teorema do Homomorfismo para R-módulos

Francielle R. de Castro Coelho **Guilherme H. B. Santos***
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: francielle@famat.ufu.br guilherme-hbs@hotmail.com

RESUMO

A Topologia Algébrica é um ramo da Matemática no qual as áreas Topologia e Álgebra estão fortemente ligadas. Neste ramo, utiliza-se a Álgebra para resolver problemas de Topologia e, às vezes, também se utiliza Topologia para resolver problemas de Álgebra. Uma teoria que é a base para a Topologia Algébrica é a Álgebra Homológica na qual se estuda, principalmente, a teoria de homologia e cohomologia de um modo geral. Além disso, nesta teoria, estão inseridos os conceitos de Módulos sobre um anel R, Módulos quociente, Homomorfismos de módulos, Complexos de (co)cadeias e Sequências exatas. Neste contexto, está inserida a sequência exata longa em homologia, a qual é muito importante para o cálculo da homologia singular de um espaço topológico.

Um conjunto não vazio M é um *R-módulo à esquerda* (R é um anel com unidade 1) se M é um grupo abeliano em relação a uma operação que indicaremos por $+$, e está definida uma lei de composição externa que a cada par $(\alpha, m) \in R \times M$ associa um elemento $\alpha m \in M$ e tal que, para todos $\alpha_1, \alpha_2 \in R$ e todos m_1 e $m_2 \in M$, se verifica:

i) $\alpha_1(\alpha_2 m_1) = (\alpha_1\alpha_2)m_1$

ii) $\alpha_1(m_1 + m_2) = \alpha_1 m_1 + \alpha_1 m_2$

iii) $(\alpha_1 + \alpha_2)m_1 = \alpha_1 m_1 + \alpha_2 m_1$

iv) $1m_1 = m_1$.

Dados dois R-módulos M e N, uma aplicação $f : M \longrightarrow N$ diz-se um *R-homomorfismo* se para todos $m_1, m_2 \in M$ e todo $r \in R$, se verifica:

i) $f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2)$

ii) $f(rm_1) = r.f(m_1)$.

O principal objetivo deste trabalho é provar o Teorema do Homomorfismo para R-Módulos. Mais especificamente, provaremos que se M e N são R-módulos e $f : M \to N$ é um R-homomorfismo, então $\dfrac{M}{Ker(f)}$ é isomorfo a $Im(f)$.

Referências

[1] HU, SZE - TSEN. *Introduction to Homological Algebra.* San Francisco: Holden - Day, 1968.

[2] POLCINO MILIES, F. C. *Anéis e Módulos.* São Paulo: Instituto de Matemática e Estatística da Universidade de São Paulo, 1972.

[3] ROTMAN, J.J. *Homological Algebra.* New York: Van Nostrand, 1970.

*Aluno do curso de Matemática da UFU

Relações entre limite generalizado e limite usual

José Henrique S. Braz* **Marcelo G. O. Vieira**
Faculdade de Ciências Integradas do Pontal (FACIP/UFU)
Rua 20, nº 1600
38304-402, Ituiutaba, MG
E-mail: josehenrique@mat.pontal.ufu.br mgov@pontal.ufu.br

RESUMO

Sejam (X, d_X) e (Y, d_Y) espaços métricos e $f\colon X \to Y$ uma aplicação. Um limite usual da forma $L = \lim_{x\to a} f(x)$ significa dizer que $f(x)$ fica suficientemente próximo de L quando x fica suficientemente próximo de a. Note que $x = id(x)$, onde id denota a aplicação identidade em X. Portanto, o limite anterior pode ser escrito como $L = \lim_{id(x)\to a} f(x)$.

Uma pergunta natural é: será que podemos substituir a aplicação id por uma outra aplicação g na notação de limite usual e este símbolo ainda possuir um sentido matemático pertinente? Esta última pergunta motivou Vieira e Braz a formalizarem um limite generalizado para aplicações, o qual foi apresentado em [2].

Considere X um conjunto não-vazio, (Y, d_Y) e (Z, d_Z) espaços métricos, $f\colon X \to Y$ e $g\colon X \to Z$ duas aplicações e z um ponto de acumulação da imagem $g(x)$. Dizemos que o ponto $y \in Y$ é o *limite generalizado* de $f(x)$ quando $g(x)$ tende a z se, e somente se, para todo $\varepsilon > 0$ dado, existe $\delta > 0$ tal que $d_Y(f(x), y) < \varepsilon$, sempre que $0 < d_Z(g(x), z) < \delta$. O limite acima, se existir, será denotado por

$$\overset{g}{\lim_{g(x)\to z}} f(x) = y.$$

Tendo em vista essa definição, algumas propriedades dos limites usuais foram preservadas no contexto de limites generalizados, como por exemplo, a unicidade do limite e a caracterização do limite através de sequências, dentre outros resultados, os quais podem ser vistos em [1] e [2].

Há exemplos de aplicações f em que seu limite generalizado com respeito a uma aplicação g existe, mas o limite no sentido usual não existe. Logo, a existência de um limite generalizado de uma aplicação f não implica na existência do limite usual da mesma, o que leva a concluir que os dois conceitos são distintos.

O objetivo do presente trabalho é apresentar relações que permitam associar a existência de limites generalizados à existência de limites usuais, e vice-versa.

Uma interessante relação obtida neste trabalho é que existindo o limite generalizado de uma aplicação f com respeito a uma aplicação g, uma condição suficiente para que exista o limite usual desta aplicação f é que a aplicação g seja contínua. Outra relação igualmente interessante é que existindo o limite usual de uma aplicação f, uma condição suficiente para a existência do limite generalizado de f com respeito a uma aplicação g é que a aplicação g seja aberta e injetora.

Referências

[1] BRAZ, J. H. S; VIEIRA, M. G. O. **Limites generalizados de funções**. Disponível em: <http://www.semap.facip.ufu.br/sites/semap.facip.ufu.br/files/Anexos/Bookpage/10-jose-semap-2014.pdf>. Acesso em: 19 fev. 2015.

[2] BRAZ, J. H. S.; VIEIRA, M. G. O. **Tipos de Integrabilidade**. 2014. 117 p. Trabalho de Conclusão de Curso - Universidade Federal de Uberlândia, Ituiutaba-MG.

*Bolsista MEC/SESu

Sobre Certas Condições de Finitude para um Grupo G

Jéssica C. R. Rodrigues da Costa * Maria Gorete C. Andrade†
IBILCE - UNESP
Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: jessica.rossinati@gmail.com gorete@ibilce.unesp.br

RESUMO

Dado um grupo G podemos definir algebricamente, através de resoluções projetivas, os grupos de (co)homologia de G. A definição dos grupos de (co)homologia de G nos permite escolher uma resolução projetiva F arbitrária de $\mathbb{Z}$ sobre $\mathbb{Z}G$. Desde que tenhamos liberdade de escolha, é razoável tentarmos trabalhar com F sendo tão "pequena" quanto possível, e assim somos levados ao conceito de dimensão cohomológica de um grupo G. Neste trabalho apresentamos, baseados em [1], certas condições de finitude que podem ser impostas sobre um grupo G a fim de garantir que a (co)homologia tenha propriedades boas. Apresentamos também o conceito de grupo de dualidade de Poincaré, o qual teve origem na teoria de variedades compactas orientáveis, e algumas computações da (co)homologia desses grupos.

Referências

[1] BROWN, K.S. *Cohomology of Groups*, New York, Springer-Verlag, 1982.

[2] HU, S.T. *Introduction to Homological Algebra*, San Francisco, Holden-Day, 1968.

*Aluna de Mestrado - Bolsista FAPESP - Processo n^o 2013/23980-0
†orientadora

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Teorema do Ponto Fixo de Banach e a Existência e Unicidade de um Sistema de Equações Diferenciais Ordinárias

Karina T. Gonçalves[1]

Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Campus de Presidente Prudente (SP)
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900 - Presidente Prudente, SP
Email: karina_lmf@hotmail.com

Marcos T. de Oliveira Pimenta

Faculdade de Ciências e Tecnologia,
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" - UNESP, Campus de Presidente Prudente (SP)
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900 - Presidente Prudente, SP
Email: pimenta@fct.unesp.br

RESUMO

O intuito deste estudo é mostrar uma versão do Teorema do Ponto Fixo de Banach, bem como uma aplicação deste a questões de existência e unicidade de soluções para um sistema de equações diferenciais ordinárias.

Pelo Teorema de Banach sobre pontos fixos de contrações, toda contração $f: M \to M$ definida no espaço métrico completo M tem um único ponto fixo, de fato, se escolhermos um ponto qualquer $x_0 \in M$ e definirrmos $x_1 = f(x_0), x_2 = f(x_1), ..., x_{n+1} = f(x_n), ...$ a sequência (x_n) converge em M e $a = \lim x_n$ é o único ponto fixo de *f*.

Como aplicação, provaremos o teorema de Picard. Este enuncia que dado $f: U \to \mathbb{R}^N$, onde U é um aberto contido em $\mathbb{R}^{N+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$, uma aplicação contínua e localmente lipschitziana na segunda variável x, onde o par (t, x) é um elemento de *U*, com $t \in \mathbb{R}$ e $x \in \mathbb{R}^N$, então o problema de valor inicial

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases}$$

possue apenas uma solução em uma vizinhança do ponto (t_0, x_0).

Referências

[2] LIMA, E.L. *Espaços Métricos*. 5.ed. Rio de Janeiro : IMPA, 2013.

[2] WALLACE, A. *An Introduction to Algebraic Topology*. N. York, 1957.

---

[1]Bolsista de Iniciação Científica FAPESP