

Aplicação do Método de Diferenças Finitas na Solução da Equação do Calor

Felipe A. Camargo

Pedro H. P. Vicari

Willian S. Melo

Analice C. Brandi

Faculdade de Ciências e Tecnologia, FCT/UNESP

Rua Roberto Simonsen, 305

19060-900, Presidente Prudente, SP

E-mail: felipealmeidacamargo@hotmail.com

phpvicari@gmail.com

willian_santosmelo@hotmail.com

analice@fct.unesp.br

RESUMO

As equações diferenciais parciais descrevem o comportamento de vários problemas físicos importantes aplicados na engenharia, por exemplo, a condução de calor. Esse fenômeno pode ser modelado matematicamente por uma equação parabólica de segunda ordem. A solução dessa equação pode ser obtida por métodos analíticos e numéricos, sendo, muitas vezes, as soluções analíticas impossíveis de serem obtidas. Nesses casos, é necessário o uso de métodos numéricos que forneçam soluções aproximadas para o problema, sendo imprescindível a definição de modelos computacionais que permitam a simulação dos processos físicos envolvidos, e que garantam um resultado eficaz [1].

Nesse contexto, este trabalho consiste em estudar o método de diferenças finitas explícito e implícito aplicado na equação de condução de calor unidimensional transiente, para diferentes condições iniciais e de contorno.

A equação de condução de calor unidimensional é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

em que T é a temperatura e α é o coeficiente de difusividade térmica do material. Neste trabalho é considerada uma barra delgada, como mostrada na figura abaixo, testada com diferentes condições iniciais e de contorno.



Figura 1: Barra delgada.

Para verificação do método numérico foram realizadas simulações numéricas com diferentes problemas, a partir da temperatura no estado inicial, com o objetivo de determinar a distribuição de temperatura na barra em vários instantes de tempo. Para isso, os métodos numéricos de diferenças finitas explícito, implícito e Crank-Nicolson foram utilizados para a resolução numérica do problema. Estes resultados numéricos obtidos foram comparados com resultados numéricos [2] e soluções analíticas existentes na literatura, analisando a convergência, a estabilidade, e principalmente, o tempo computacional gasto nas simulações numéricas.

Referências

- [1] CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE JR., M. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.
- [2] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinâmica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações*. São Paulo: Edusp, 2000.

Explorando a Dinâmica de uma Família de Dois Parâmetros

Marcelo Lopes Vieira

Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: marcelolv@famat.ufu.br

Victor Bell de Oliveira

Daniel de Oliveira Ferreira¹

Faculdade de Engenharia Elétrica, UFU.
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: victor_oliver_14@hotmail.com danieldeoliveira1995@gmail.com

RESUMO

Considere a família de equações diferenciais

$$x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b$$

que depende de dois parâmetros, a e b . O objetivo deste trabalho é explorar esta equação utilizando elementos básicos das equações diferenciais de primeira ordem, com o intuito de elaborar um retrato completo da dinâmica desta equação no plano bidimensional dos parâmetros a e b . Para efetuar este estudo nos valem de tópicos introdutórios do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias, estudo de raízes polinomiais e um dos grandes resultados da análise matemática, o Teorema de Rolle. Como resultados finais, além do retrato proposto, expomos também os retratos de fase da equação objeto de estudo, enquanto os parâmetros variam na vizinhança das bifurcações.

Referências

- [1] HIRSCH, Morris, SMALE, Stephen, DEVANEY, Robert L. Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos. ACADEMIC PRESS, INC. 2004, San Diego, California.
- [2] BOYCE, William, DiPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno. LTC. 2006, Rio de Janeiro.
- [3] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo. LTC. 1987, Rio de Janeiro.

¹Aluno de Iniciação Científica PIVIC/FAPEMIG

Métodos de resolução de EDP's de segunda ordem:

A equação da onda

Saulo Portes dos Reis

Universidade Estadual Paulista-Ilha Solteira
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: sauloorck@hotmail.com

RESUMO

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação na qual a incógnita é uma função, digamos, $u: \Omega \subset R^n \rightarrow R$, e que envolve as derivadas parciais dessa função. Obviamente consideramos que u é suficientemente diferenciável.

Diversos fenômenos físicos são modelados por EDP's, as equações de Maxwell para o eletromagnetismo são um exemplo. Podemos ainda citar: equação da onda, equação de Shrodinger da mecânica quântica, a equação de Navier- Stokes para fluidos, a equação do calor dentre outros. Dessa forma o estudo do métodos de resolução de EDP's é de extrema importância.

Ao apresentar a definição de EDP uma questão se faz pertinente: o que é a solução de uma EDP? Qualquer função u que satisfaça a equação pode ser considerada uma solução?

A noção de que a solução de uma EDP é uma função que satisfaça a equação é muito vaga, uma vez que para uma mesma EDP podemos ter infinitas soluções.

Uma EDP em geral descreve um fenômeno físico, no caso da equação da onda podemos associa-la ao deslocamento vertical de uma corda de um violino. Sendo assim é natural que a EDP relacionada a esse fenômeno tenha apenas uma solução (pois só existe uma posição para a corda do violino em um determinado instante), no entanto, a equação de onda apresenta infinitas soluções. Sendo assim precisamos explicitar com clareza o que entenderemos por uma solução de uma EDP.

Outro fator de extrema relevância é que grande partes das EDP's são obtidas através de medidas físicas e portanto estão sujeitas a erros, sendo assim a solução de uma EDP deve ser "estável", no sentido que pequenas mudanças nas "condições iniciais" do problema não podem conduzir a grandes mudanças na solução.

Sendo assim o presente trabalho tem por objetivo discutir e apresentar a solução geral da equação da onda e discutir sob que condições essa solução é única. Construímos a solução por meio de curvas característica e outra por meio de "intuição" física.

Referências

Valéria Lório. *EDP, Um curso de graduação*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

Modelo cinemático de simulação de enchentes com base em solução numérica de equações diferenciais parciais

Luciana A. Alves

Faculdade de Matemática, UFU

Av. João Naves de Ávila, 2121

38408-100, Uberlândia, MG

E-mail: lualves@famat.ufu.br

Lais Sousa Leão*

Faculdade de Engenharia Civil, UFU

laisousaleao@outlook.com

RESUMO

Este trabalho constitui-se de um modelo numérico unidimensional para simulação de enchentes em rios com base na resolução de equações diferenciais parciais. Para isso, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas: as ondas são consideradas como de grande porte, originadas por enchentes causadas por chuvas muito intensas e propagando-se de montante para jusante. Além disso, como a dimensão longitudinal é muitas vezes maior que a transversal, pode-se construir um modelo unidimensional com base apenas na variação da velocidade média do escoamento.

Chamando de x a coordenada ao longo do rio e de t a variável tempo, tem-se $U(x, t)$ como a função que retorna a velocidade média e $h(x, t)$ é a função que descreve a lâmina d'água, ambas na seção transversal do rio. Usualmente, em hidráulica, trabalha-se com a área molhada da seção, $S(x, t)$ e com a vazão, $Q(x, t)$, que é a taxa de variação de volume ao longo do tempo.

É possível provar que, para uma seção transversal qualquer, partindo do princípio de conservação de massa (demonstrado em [1]), chega-se a

$$S_t(x, t) = -Q_x(x, t) \quad (1)$$

ou seja, a vazão diminui à medida que se avança em direção à foz do rio. Logo, a altura da lâmina d'água aumenta, pois, para a mesma seção, entra mais água do que sai [2].

Para complementar a equação (1) usa-se a lei hidrológica da seção, onde ao longo dos anos faz-se um levantamento da altura da água e da velocidade média em uma seção transversal arbitrária ao longo do tempo. Os dados são registrados em gráficos com valores de vazão Q em função da área molhada S . Para o modelo, foi adotada a lei hidrológica $Q = \frac{S^2}{2}$. Assim, a equação de Burgers do modelo é dada por

$$S_t(x, t) + \frac{1}{2} (S^2(x, t))_x = S_t(x, t) + SS_x(x, t) = 0$$

e que pode ser resolvida por um método numérico de diferenças finitas discretizando a derivada $Q_x = \left(\frac{S^2}{2}\right)_x$ e escrevendo o esquema numérico de primeira ordem como

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left((S_j^n)^2 - (S_{j-1}^n)^2 \right).$$

Supondo como condição inicial $S(x, 0) = 0,3$, tem-se um esquema conservativo que informa a posição correta do salto hidráulico da onda de enchente.

Referências

- [1] MUNSON, B.; YOUNG, D.; OKIISHI, T. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.
- [2] NACHBIN, A.; TABAK, E. Equações diferenciais em modelagem matemática computacional. *21º Colóquio Brasileiro de Matemática*, p. 66-79, 1997.

O mecanismo Lotka-Volterra de reações químicas oscilantes

José Roberto Nogueira Mailde da Silva Ozório¹

Universidade Estadual Paulista, FCT - UNESP

Rua Roberto Simonsen, 305

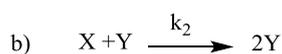
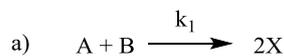
19060-000, Presidente Prudente, SP

Email: jrnog@fct.unesp.br

mailde.s.ozorio@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho será apresentado um modelo análogo ao modelo de presa-predador de Lotka-Volterra, o mecanismo de Lotka-Volterra de reações oscilantes, que foi desenvolvido para descrever o comportamento oscilatório de reações químicas. Para reagentes e produtos químicos hipotéticos, o mecanismo de Lotka-Volterra pode ser representado como segue:

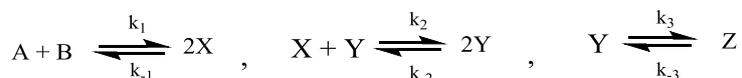


Onde A , B , X , Y e Z são substâncias químicas. Neste mecanismo todas as etapas são irreversíveis, as etapas (a) e (b) são autocatalíticas e a concentração de A se mantém constante, ou seja $[A] = A_0$. A partir do mecanismo obtêm-se o seguinte sistema de equação:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1 A_0 [X] - k_2 [X][Y] \quad (1)$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2 [X][Y] - k_3 [Y] \quad (2)$$

Se todas as etapas do mecanismo de Lotka-Volterra forem reversíveis ocorre, simplesmente, relaxação exponencial e não oscilação.



Os exemplos de reações químicas oscilantes que se conhecem até hoje, como as reações de Belousov-Zhabotinsky, possuem mecanismos diferentes do mecanismo de Lotka-Volterra.

Referências

- [1] STEINFELD, J. I; FRANCISCO, J. S; Hase, W.L, Chemical Kinetics and Dynamics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey. 1989.
- [2] ATKINS, P.W.; DE PAULA, J. Físico-Química, 7ª ed., Livros Técnicos e Científicos Editora SA, vol 3, 2004.
- [3] BOYCE, W.E.; DIPRIMA, R.C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, Livros Técnicos e Científicos Editora SA., 1997.

¹Bolsista de Iniciação Científica FAPESP

O Teorema de Poincaré – Bendixson,

Aline de Melo Machado*

Curso de Matemática

Instituto de Ciências Exatas - ICEX

Universidade Federal Fluminense - UFF

Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783

27213-145, Volta Redonda, RJ

E-mail: alinedemelo.m@gmail.com

RESUMO

Estudamos e provamos o Teorema de Poincaré–Bendixson no plano, mostrando algumas aplicações. Este importante teorema permite classificar e conhecer como se comportam assintoticamente os fluxos dos campos X de classe C^1 do plano sem singularidades (ou com um número finito de singularidades). A conclusão mais relevante deste teorema é que sob certas condições de diferenciabilidade, não existem sistemas dinâmicos caóticos no plano.

Referências

- [1] BENDIXSON, I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica*, 24, p.1-88, 1901.
- [2] BURGER, M.; HACKL, B.; RING, W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, v. 194, n. 1, p. 344-362, 2004.
- [3] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations*. John Wiley & Sons, 1964.
- [4] HIRSCH, M. W., SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*. Academic-Press, Inc., 1974.
- [5] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2001.
- [6] POINCARÉ, H. Memoire sur les courbes définies par une équation différentielle. *Journal Mathématique Pures et Appliquées*, 7, p. 375-422, 1881.

Sobre Circuitos Elétricos e Sistemas Mecânicos

Marcelo Lopes Vieira

Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: marcelolv@famat.ufu.br

Paulo Victor Simões Costa¹

Faculdade de Engenharia Elétrica, UFU.
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: paulochimba@hotmail.com

RESUMO

Na engenharia, as equações diferenciais ordinárias são necessárias para o desenvolvimento nos diversos ramos desta área do conhecimento. Os circuitos elétricos muitas vezes são governados por equações diferenciais, desde as mais simples até os modelos matemáticos não lineares mais complexos. O objetivo central do trabalho é estudar de maneira qualitativa e quantitativa um circuito RCL , dado pela equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = E_0\omega\cos(\omega t),$$

obtida se valendo da Segunda Lei de Kirchhoff. Além deste objetivo principal, buscamos uma comparação entre as duas abordagens, além de explorar a analogia da construção deste modelo com um sistema mecânico dado, de modo a trabalhar numa equação diferencial ordinária de segunda ordem genérica e que modele os dois casos.

Referências

- [1] KREYSZIG, E. Advanced Engineering Mathematics. John Wiley and Sons, Inc. 1962, New York.
- [2] BOYCE, William, DiPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno. LTC. 2006, Rio de Janeiro.

¹Aluno de Iniciação Científica PIVIC/FAPEMIG

Unicidade de Solução em Problemas Elípticos

Valdair Bonfim

Ueslei Ferreira Costa

Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG

Email: valdair@ufu.br

uesleiferreiramg@hotmail.com

RESUMO

A teoria das equações diferenciais parciais elípticas incluem, dentre outras, a equação de Poisson $\Delta u = f(x)$, para x em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Quando $f \equiv 0$, esta equação é conhecida como equação de Laplace. As soluções desta equação são chamadas *funções harmônicas*. São muitas as situações físicas de interesse na qual aparecem as funções harmônicas. Por exemplo, as temperaturas de equilíbrio em problemas de condução de calor são funções harmônicas. A velocidade de um fluido incompressível irrotacional também é harmônica. Campos elétricos e gravitacionais, livres da ação de cargas ou massas, respectivamente, também satisfazem à equação de Laplace. Em alguns casos pretende-se achar solução da equação de Poisson ou de Laplace com condições de contorno do tipo Dirichlet, onde a solução u deve assumir valores prescritos na fronteira $\partial\Omega$, ou seja, $u|_{\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$. Em outros casos, o objetivo é encontrar solução u cuja derivada normal assume valores dados a priori em $\partial\Omega$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}|_{\partial\Omega} = h \in C(\partial\Omega)$. Nosso objetivo consiste em estudar a questão da unicidade para problemas desse tipo. Para isso, as ferramentas serão o Teorema da Divergência e duas importantes consequências deste, conhecidas como Primeira e Segunda Identidades de Green. Como etapa futura deste trabalho, que está sendo desenvolvido em um projeto de iniciação científica, pretende-se estudar tópicos de Teoria da Medida com vistas às soluções no sentido de Sobolev.

Referências

- [1] JÚNIOR, R. I. & IÓRIO, V. M., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução*, Projeto Euclides, Editora IMPA, 1988.
- [2] JOHN, F., *Partial Differential Equations*, Springer-Verlag, 1980.
- [3] FERNANDEZ, P. J., *Medida e Integração*, Projeto Euclides, Editora IMPA, 1976.