.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Aplicação do Método de Diferenças Finitas na Solução da Equação do Calor

Felipe A. Camargo **Pedro H. P. Vicari** **Willian S. Melo**

Analice C. Brandi

Faculdade de Ciências e Tecnologia, FCT/UNESP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: felipealmeidacamargo@hotmail.com phpvicari@gmail.com willian_santosmelo@hotmail.com
analice@fct.unesp.br

RESUMO

As equações diferenciais parciais descrevem o comportamento de vários problemas físicos importantes aplicados na engenharia, por exemplo, a condução de calor. Esse fenômeno pode ser modelado matematicamente por uma equação parabólica de segunda ordem. A solução dessa equação pode ser obtida por métodos analíticos e numéricos, sendo, muitas vezes, as soluções analíticas impossíveis de serem obtidas. Nesses casos, é necessário o uso de métodos numéricos que forneçam soluções aproximadas para o problema, sendo imprescindível a definição de modelos computacionais que permitam a simulação dos processos físicos envolvidos, e que garantam um resultado eficaz [1].

Nesse contexto, este trabalho consiste em estudar o método de diferenças finitas explícito e implícito aplicado na equação de condução de calor unidimensional transiente, para diferentes condições iniciais e de contorno.

A equação de condução de calor unidimensional é dada por

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 T}{\partial x^2},$$

em que T é a temperatura e α é o coeficiente de difusividade térmica do material. Neste trabalho é considerada uma barra delgada, como mostrada na figura abaixo, testada com diferentes condições iniciais e de contorno.

Figura 1: Barra delgada.

Para verificação do método numérico foram realizadas simulações numéricas com diferentes problemas, a partir da temperatura no estado inicial, com o objetivo de determinar a distribuição de temperatura na barra em vários instantes de tempo. Para isso, os métodos numéricos de diferenças finitas explícito, implícito e Crank-Nicolson foram utilizados para a resolução numérica do problema. Estes resultados numéricos obtidos foram comparados com resultados numéricos [2] e soluções analíticas existentes na literatura, analisando a convergência, a estabilidade, e principalmente, o tempo computacional gasto nas simulações numéricas.

Referências

[1] CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE JR., M. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas.* Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] FORTUNA, A. O. *Técnicas Computacionais para Dinânica dos Fluidos: Conceitos Básicos e Aplicações.* São Paulo: Edusp, 2000.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Explorando a Dinâmica de uma Família de Dois Parâmetros

Marcelo Lopes Vieira
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: marcelolv@.famat.ufu.br

Victor Bell de Oliveira **Daniel de Oliveira Ferreira**[1]
Faculdade de Engenharia Elétrica, UFU.
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: victor_oliver_14@hotmail.com danieldeoliveira1995@gmail.com

RESUMO

Considere a família de equações diferenciais

$$x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b$$

que depende de dois parâmetros, a e b. O objetivo deste trabalho é explorar esta equação utilizando elementos básicos das equações diferenciais de primeira ordem, com o intuito de elaborar um retrato completo da dinâmica desta equação no plano bidimensional dos parâmetros a e b. Para efetuar este estudo nos valemos de tópicos introdutórios do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias, estudo de raízes polinomiais e um dos grandes resultados da análise matemática, o Teorema de Rolle. Como resultados finais, além do retrato proposto, expomos também os retratos de fase da equação objeto de estudo, enquanto os parâmetros variam na vizinhança das bifurcações.

Referências

[1] HIRSCH, Morris, SMALE, Stephen, DEVANEY, Robert L. Differential Equations, Dynamical Systems and Introduction to Chaos. ACADEMIC PRESS, INC. 2004, San Diego, California.

[2] BOYCE, William, DiPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno. LTC. 2006, Rio de Janeiro.

[3] GUIDORIZZI, Hamilton L. Um Curso de Cálculo. LTC. 1987, Rio de Janeiro.

[1] Aluno de Iniciação Científica PIVIC/FAPEMIG

Métodos de resolução de EDP’s de segunda ordem: A equação da onda

Saulo Portes dos Reis
Universidade Estadual Paulista-Ilha Solteira
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: sauloorck@hotmail.com

RESUMO

Uma Equação Diferencial Parcial (EDP) é uma equação na qual a incógnita é uma função, digamos, $u: \Omega \subset R^n \to R$, e que envolve as derivadas parciais dessa função. Obviamente consideramos que u é suficientemente diferenciável.

Diversos fenômeno físicos são modelados por EDP's, as equações de Maxwell para o eletromagnetismo são um exemplo. Podemos ainda citar: equação da onda, equação de Shrodinger da mecânica quântica, a equação de Navier- Stokes para fluidos, a equação do calor dentre outros. Dessa forma o estudo do métodos de resolução de EDP’s é de extrema importância.

Ao apresentar a definição de EDP uma questão se faz pertinente: o que é a solução de uma EDP? Qualquer função u que satisfaça a equação pode ser considerada uma solução?

A noção de que a solução de uma EDP é uma função que satisfaça a equação é muito vaga, uma vez que para uma mesma EDP podemos ter infinitas soluções.

Uma EDP em geral descreve um fenômeno físico, no caso da equação da onda podemos associa-la ao deslocamento vertical de uma corda de um violino. Sendo assim é natural que a EDP relacionada a esse fenômeno tenha apenas uma solução (pois só existe uma posição para a corda do violino em um determinado instante), no entanto, a equação de onda apresenta infinitas soluções. Sendo assim precisamos explicitar com clareza o que entenderemos por uma solução de uma EDP.

Outro fator de extrema relevância é que grande partes das EDP's são obtidas através de medidas físicas e portanto estão sujeitas a erros, sendo assim a solução de uma EDP deve ser ``estável'', no sentido que pequenas mudanças nas ``condições iniciais'' do problema não podem conduzir a grandes mudanças na solução.

Sendo assim o presente trabalho tem por objetivo discutir e apresentar a solução geral da equação da onda e discutir sob que condições essa solução é única. Construirmos a solução por meio de curvas característica e outra por meio de “intuição” física.

Referências

Valéria Iório. *EDP, Um curso de graduação*. Coleção Matemática Universitária, IMPA, Rio de Janeiro, 2012.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Modelo cinemático de simulação de enchentes com base em solução numérica de equações diferenciais parciais

Luciana A. Alves — Faculdade de Matemática, UFU

Lais Sousa Leão* — Faculdade de Engenharia Civil, UFU

Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG

E-mail: lualves@.famat.ufu.br   laisousaleao@outlook.com

RESUMO

Este trabalho constitui-se de um modelo numérico unidimensional para simulação de enchentes em rios com base na resolução de equações diferenciais parciais. Para isso, algumas hipóteses simplificadoras foram adotadas: as ondas são consideradas como de grande porte, originadas por enchentes causadas por chuvas muito intensas e propagando-se de montante para jusante. Além disso, como a dimensão longitudinal é muitas vezes maior que a transversal, pode-se construir um modelo unidimensional com base apenas na variação da velocidade média do escoamento.

Chamando de x a coordenada ao longo do rio e de t a variável tempo, tem-se $U(x,t)$ como a função que retorna a velocidade média e $h(x,t)$ é a função que descreve a lâmina d'água, ambas na seção transversal do rio. Usualmente, em hidráulica, trabalha-se com a área molhada da seção, $S(x,t)$ e com a vazão, $Q(x,t)$, que é a taxa de variação de volume ao longo do tempo.

É possível provar que, para uma seção transversal qualquer, partindo do princípio de conservação de massa (demonstrado em [1]), chega-se a

$$S_t(x,t) = -Q_x(x,t) \tag{1}$$

ou seja, a vazão diminui à medida que se avança em direção à foz do rio. Logo, a altura da lâmina d'água aumenta, pois, para a mesma seção, entra mais água do que sai [2].

Para complementar a equação (1) usa-se a lei hidrológica da seção, onde ao longo dos anos faz-se um levantamento da altura da água e da velocidade média em uma seção transversal arbitrária ao longo do tempo. Os dados são registrados em gráficos com valores de vazão Q em função da área molhada S. Para o modelo, foi adotada a lei hidrológica $Q = \dfrac{S^2}{2}$. Assim, a equação de Burgers do modelo é dada por

$$S_t(x,t) + \frac{1}{2}\left(S^2(x,t)\right)_x = S_t(x,t) + SS_x(x,t) = 0$$

e que pode ser resolvida por um método numérico de diferenças finitas discretizando a derivada $Q_x = \left(\dfrac{S^2}{2}\right)_x$ e escrevendo o esquema numérico de primeira ordem como

$$S_j^{n+1} = S_j^n - \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(\left(S_j^n\right)^2 - \left(\left(S_{j-1}^n\right)^2\right)\right).$$

Supondo como condição inicial $S(x,0) = 0,3$, tem-se um esquema conservativo que informa a posição correta do salto hidráulico da onda de enchente.

Referências

[1] MUNSON, B.; YOUNG, D.; OKIISHI, T. *Fundamentos da mecânica dos fluidos*. São Paulo: Edgard Blücher, 2004.

[2] NACHBIN, A.; TABAK, E. Equações diferenciais em modelagem matemática computacional. *21° Colóquio Brasileiro de Matemática*, p. 66-79, 1997.

*Bolsista de Iniciação Científica PROMAT/CPEPG

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

O mecanismo Lotka-Volterra de reações químicas oscilantes

José Roberto Nogueira **Mailde da Silva Ozório**[1]

Universidade Estadual Paulista, FCT - UNESP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-000, Presidente Prudente , SP

Email: jrnog@fct.unesp.br maildes.ozorio@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho será apresentado um modelo análogo ao modelo de presa-predador de Lotka-Volterra, o mecanismo de Lotka-Volterra de reações oscilantes, que foi desenvolvido para descrever o comportamento oscilatório de reações químicas. Para reagentes e produtos químicos hipotéticos, o mecanismo de Lotka-Volterra pode ser representado como segue:

a) $A + B \xrightarrow{k_1} 2X$

b) $X + Y \xrightarrow{k_2} 2Y$

c) $Y \xrightarrow{k_3} Z$

Onde *A, B, X, Y* e *Z* são substâncias químicas. Neste mecanismo todas as etapas são irreversíveis, as etapas (a) e (b) são autocatalíticas e a concentração de *A* se mantém constante, ou seja $[A] = A_0$. A partir do mecanismo obtêm-se o seguinte sistema de equação:

$$\frac{d[X]}{dt} = k_1 A_o [X] - k_2 [X][Y] \tag{1}$$

$$\frac{d[Y]}{dt} = k_2 [X][Y] - k_3 [Y] \tag{2}$$

Se todas as etapas do mecanismo de Lotka-Volterra forem reversíveis ocorre, simplesmente, relaxação exponencial e não oscilação.

$$A + B \underset{k_{-1}}{\overset{k_1}{\rightleftharpoons}} 2X \quad , \quad X + Y \underset{k_{-2}}{\overset{k_2}{\rightleftharpoons}} 2Y \quad , \quad Y \underset{k_{-3}}{\overset{k_3}{\rightleftharpoons}} Z$$

Os exemplos de reações químicas oscilantes que se conhecem até hoje, como as reações de Belousov-Zhabotinsky, possuem mecanismos diferentes do mecanismo de Lotka-Volterra.

Referências

[1] STEINFELD, J. I; FRANCISCO, J. S; Hase, W.L, Chemical Kinetics and Dynamics, Prentice Hall, Englewood Cliffs, NeW Jersey. 1989.

[2] ATKINS, P.W.; DE PAULA, J. Físico-Química, 7ª ed., Livros Técnicos e Científicos Editora SA, vol 3, 2004.

[3] BOYCE , W.E.; DIPRIMA, R.C.,.Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valor de Contorno, Livros Técnicos e Científicos Editora SA., 1997.

[1]Bolsista de Iniciação Científica FAPESP

O Teorema de Poincaré – Bendixson,

Aline de Melo Machado*
Curso de Matematica
Instituto de Ciências Exatas - ICEx
Universidade Federal Fluminense - UFF
Rua Desembargador Ellis Hermydio Figueira, 783
27213-145, Volta Redonda, RJ
E-mail: alinedemelo.m@gmail.com

RESUMO

Estudamos e provamos o Teorema de Poincaré–Bendixson no plano, mostrando algumas aplicações. Este importante teorema permite classificar e conhecer como se comportam assintoticamente os fluxos dos campos X de classe C^1 do plano sem singularidades (ou com um número finito de singularidades). A conclusão mais relevante deste teorema é que sob certas condições de diferenciabilidade, não existem sistemas dinâmicos caóticos no plano.

Referências

[1] BENDIXSON, I. Sur les courbes définies par des équations différentielles. *Acta Mathematica,* 24, p.1-88, 1901.

[2] BURGER, M.; HACKL, B.; RING, W. Incorporating topological derivatives into level set methods. *Journal of Computational Physics*, v. 194, n. 1, p. 344-362, 2004.

[3] HARTMAN, P. *Ordinary Differential Equations.* John Wiley & Sons, 1964.

[4] HIRSCH, M. W., SMALE, S. *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra.* Academic-Press, Inc., 1974.

[5] PERKO, L. *Differential Equations and Dynamical Systems.* Springer-Verlag, New York, 3rd edition, 2001.

[6] POINCARÉ, H. Memoire sur les courbes définíes par une équation différentielle. *Journal Mathématique Pures et Appliquées*, 7, p. 375-422, 1881.

*Bolsista de Iniciação Científica FAPERJ

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Sobre Circuitos Elétricos e Sistemas Mecânicos

Marcelo Lopes Vieira
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: marcelolv@.famat.ufu.br

Paulo Victor Simões Costa[1]
Faculdade de Engenharia Elétrica, UFU.
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: paulochimba@hotmail.com

RESUMO

Na engenharia, as equações diferenciais ordinárias são necessárias para o desenvolvimento nos diversos ramos desta área do conhecimento. Os circuitos elétricos muitas vezes são governados por equações diferencias, desde as mais simples até os modelos matemáticos não lineares mais complexos. O objetivo central do trabalho é estudar de maneira qualitativa e quantitativa um circuito *RCL*, dado pela equação

$$L\ddot{I} + R\dot{I} + \frac{1}{C}I = E_0\omega cos(\omega t),$$

obtida se valendo da Segunda Lei de Kirchhoff. Além deste objetivo principal, buscamos uma comparação entre as duas abordagens, além de explorar a analogia da construção deste modelo com um sistema mecânico dado, de modo a trabalhar numa equação diferencial ordinária de segunda ordem genérica e que modele os dois casos.

Referências

[1] KREYSZIG, E. Advanced Engineering Mathematics. John Wiley and Sons, Inc. 1962, New York.

[2] BOYCE, William, DiPRIMA, Richard C. Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno. LTC. 2006, Rio de Janeiro.

[1]Aluno de Iniciação Científica PIVIC/FAPEMIG

Unicidade de Solução em Problemas Elípticos

Valdair Bonfim **<u>Ueslei Ferreira Costa</u>**

Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila,2121
38408-100, Uberlândia, MG
Email: valdair@ufu.br uesleiferreiramg@hotmail.com

RESUMO

A teoria das equações diferenciais parciais elípticas incluem, dentre outras, a equação de Poisson $\Delta u = f(x)$, para x em um aberto $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$. Quando $f \equiv 0$, esta equação é conhecida como equação de Laplace. As soluções desta equação são chamadas *funções harmônicas*. São muitas as situações físicas de interesse na qual aparecem as funções harmônicas. Por exemplo, as temperaturas de equilíbrio em problemas de condução de calor são funções harmônicas. A velocidade de um fluido incompressível irrotacional também é harmônica. Campos elétricos e gravitacionais, livres da ação de cargas ou massas, respectivamente, também satisfazem à equação de Laplace. Em alguns casos pretende-se achar solução da equação de Poisson ou de Laplace com condições de contorno do tipo Dirichlet, onde a solução u deve assumir valores prescritos na fronteira $\partial\Omega$, ou seja, $u_{|\partial\Omega} = g \in C(\partial\Omega)$. Em outros casos, o objetivo é encontrar solução u cuja derivada normal assume valores dados a priori em $\partial\Omega$, ou seja, $\frac{\partial u}{\partial \vec{n}}_{|\partial\Omega} = h \in C(\partial\Omega)$. Nosso objetivo consiste em estudar a questão da unicidade para problemas desse tipo. Para isso, as ferramentas serão o Teorema da Divergência e duas importantes consequências deste, conhecidas como Primeira e Segunda Identidades de Green. Como etapa futura deste trabalho, que está sendo desenvolvido em um projeto de iniciação científica, pretende-se estudar tópicos de Teoria da Medida com vistas às soluções no sentido de Sobolev.

Referências

[1] JÚNIOR, R. I. & IÓRIO, V. M., *Equações Diferenciais Parciais: Uma Introdução,* Projeto Euclides, Editora IMPA, 1988.

[2] JOHN, F., *Partial Differential Equations,* Springer-Verlag, 1980.

[3] FERNANDEZ, P. J., *Medida e Integração,* Projeto Euclides, Editora IMPA, 1976.