.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Análise de Estabilidade do Método de Diferenças Finitas Compactas de Sexta Ordem

Luciano P. da Silva **Analice C. Brandi** **Messias M. Junior**
Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP
Rua Roberto Simonsen 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: luc_cogo@ig.com.br analice@fct.unesp.br messias@fct.unesp.br

RESUMO

Para o estudo de estabilidade do esquema aqui apresentado, usa-se o critério de estabilidade de von Neumann e para simplificar, toma-se $F \equiv 0$ em

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^{n}}{0,5\,\delta t} = \alpha[(u_{xx}^{n+1/2})_{ij} + (u_{yy}^{n})_{ij}] + (F)_{ij}^{n+1/2}, \tag{1}$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{0,5\,\delta t} = \alpha[(u_{xx}^{n+1/2})_{ij} + (u_{yy}^{n+1})_{ij}] + (F)_{ij}^{n+1/2}, \tag{2}$$

e ainda u periódica tanto na direção x quanto em y. Para o esquema compacto de sexta ordem, conforme observado em [1], tem-se que:

$$|\xi| = \left|\frac{u_{ij}^{n+1}}{u_{ij}^{n+1/2}}\right| \left|\frac{u_{ij}^{n+1/2}}{u_{ij}^{n}}\right| =$$

$$\left|\frac{1+m_x\gamma x}{1-m_y\gamma y}\frac{1+m_y\gamma y}{1-m_x\gamma x}\right| \leq 1 \tag{3}$$

em que $\gamma_x \leq 0$ e $\gamma_y \leq 0$. Denotando $m_x = \frac{1}{2}\frac{\alpha\delta t}{(\delta x)^2}$, $m_y = \frac{1}{2}\frac{\alpha\delta t}{(\delta y)^2}$,

$$\gamma_x = \frac{-bsin^2(w_x) - 4asin^2(w_x/2)}{2\beta cos(w_x) + 1},$$

$$\gamma_y = \frac{-bsin^2(w_y) - 4asin^2(w_y/2)}{2\beta cos(w_y) + 1}. \tag{4}$$

É fácil verificar para o caso do esquema de sexta ordem com $\alpha = \frac{2}{11}$, $a = \frac{12}{11}$, $b = \frac{3}{11}$, $\gamma_x \leq 0$ e $\gamma_y \leq 0$, que o esquema analisado para as equações (1) e (2) é incondicionalmente estável, garantindo assim uma solução satisfatória, conforme observa-se no exemplo a seguir. Seja a equação

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + f(x,y,t) \tag{5}$$

em que $(x,y) \in \Omega \equiv (0,1)^2, 0 < t < 1$, onde as condições de fronteiras são dadas por $f = (16\pi^2 - 1)e^{-t}(sin(4*\pi x) + sin(4\pi y))$ e a solução exata por $u(x,y,t) = e^{-t}(sin(4*\pi x) + sin(4\pi y))$. Observe na Tabela 1 o máximo erro ocorrido na aproximação, usando uma malha uniforme e diferentes passos temporais. Os resultados nela contidos mostram a convergência do método.

Tabela 1: Máximo erro para $t = 1$ e malha uniforme $\delta x = \delta y = 1/50$.

Passo Temporal	Máximo Erro	Tempo de CPU(s)
1/10	$7.2469e-04$	0.9516
1/20	$3.1364e-04$	1.0140
1/40	$5.7551e-05$	1.0764
1/80	$1.4346e-05$	1.3104
1/160	$3.5438e-06$	2.1216

Referências

[1] Li J. and Chen Y.T. *Computational Partial Differential Equations Using Matlab*, volume I. Chapman and Hall Book, 2009.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Fluxo estocásticos que preservam medidas.

Diego S. Ledesma
Departamento de Matemática, UNICAMP
Rua Sérgio Buarque de Holanda, 651
13083-859, Campinas, SP
E-mail: dledesma@ime.unicamp.br

Fabiano B. da Silva
Departamento de Matemática, UNESP
Av. Eng. Luiz Edmundo Carrijo Coube, 14-01
17033-360, Bauru, SP
E-mail: fabiano@fc.unesp.br

RESUMO

Considere o fluxo estocástico φ_t gerado pela equação diferencial estocástica de Stratonovich na variedade M:

$$\begin{aligned} dx_t &= \sum_{i=0}^{m} X_i(x_t) \circ dB_t^i \\ x_0 &= x. \end{aligned} \tag{1}$$

onde $B_t^0 = t$, $(B^1, \ldots, B^m)$ é um movimento browniano em $\mathbb{R}^m$ construído num espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Neste trabalho apresentaremos, via Fórmula de Itô, condições nos campos de vetores para que o fluxo φ_t preserve uma medida de Lebesgue associada a uma forma volume. Posteriormente, usaremos a mesma técnica para determinar em que condições o fluxo estocástico preserva uma medida de probabilidade numa variedade homogênea.

Referências

[1] Elworthy, K. D. *Stochastic Differential Equations on Manifolds.* London Math. Society (Lecture Notes Series 70) Cambridge University Press 1982

[2] Garnett, L. *Foliation, The ergodic theorem and Brownian motion.* Journal of Functional Analysis 51, (1983)pp. 285-311

[3] Ikeda, N. and Watanabe, S. *Stochastic differential equations and diffusion processes.* Second edition. North-Holland Mathematical Library, 24.

[4] Kliemann, W. *Recurrence and invariant measures for degenerate diffusions.* Ann. Probab. 15 (1987), no. 2, 690-707.

[5] Kunita, H. *Stochastic flows and stochastic differential equations*, Cambridge University Press, 1988.

[6] de Rham, G. *Differentiable manifolds. Forms, currents, harmonic forms.* Springer-Verlag, Berlin, 1984.

Invariantes de Darboux do Sistema de Chen com uma Quádrica Invariante

Alisson de Carvalho Reinol*
Instituto de Biociências, Letras e Ciências Exatas, IBILCE - UNESP
Rua Cristóvão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: alisson_carv@hotmail.com

Marcelo Messias
Faculdade de Ciências e Tecnologia, FCT - UNESP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: marcelo@fct.unesp.br

RESUMO

O sistema de Chen é a família de equações diferenciais polinomiais quadráticas dadas por

$$\dot{x} = \alpha(y - x), \quad \dot{y} = (\gamma - \alpha)x - xz + \gamma y, \quad \dot{z} = xy - \beta z, \tag{1}$$

onde α, β e γ são parâmetros reais. O sistema (1) foi estudado pela primeira vez em [1] e, escolhendo adequadamente os valores dos parâmetros, este tipo de sistema apresenta comportamento caótico. Em [3] foi provado o seguinte resultado:

Proposição 1 *Se $\alpha \neq 0$, então o sistema (1) tem as superfícies algébricas invariantes $F_i = F_i(x, y, z) = 0$, para $i = 1, ..., 6$, dadas como segue:*
(a) Se $\beta = 2\alpha$, então $F_1 = x^2 - 2\alpha z$.
(b) Se $\alpha = -\beta = \gamma$, então $F_2 = y^2 + z^2$.
(c) Se $\alpha = \beta = -\gamma$, então $F_3 = 2x^2 + y^2 + z^2$.
(d) Se $3\alpha + \gamma = 0$ ou $\beta = 0$, então $F_4 = x^4 + (4/3)\gamma x^2 z - (4/9)\gamma^2 y^2 - (8/9)\gamma^2 xy - (16/9)\gamma^2 x^2$.
(e) Se $\alpha + \gamma = 0$ ou $\beta = 4\alpha$, então $F_5 = x^4 + 4\gamma x^2 z - 4\gamma^2 y^2 + 8\gamma^2 xy + 8\gamma^2 x^2 + 48\gamma^3 z$.
(f) Se $\beta = \gamma = 0$, então $F_6 = y^2 + z^2 + 2\alpha z$.

Em [2] são dadas as formas normais de todos os sistemas diferenciais polinomiais em $\mathbb{R}^3$ que possuam uma quádrica como superfície algébrica invariante e, dentre estes sistemas, também são caracterizados aqueles que têm um invariante de Darboux construido a partir da equação da quádrica invariante e são dadas equações explícitas para os invariantes de Darboux. Um invariante de Darboux nos fornece informação sobre os conjuntos α- e ω-limite (conjuntos dos pontos onde as órbitas "nascem" e "morrem", respectivamente) das órbitas do sistema diferencial polinomial.

Neste trabalho, aplicamos os resultados obtidos em [2] para determinar os invariantes de Darboux do sistema (1) quando este apresenta uma quádrica invariante, ou seja, nos casos (a), (b), (c) e (f) da Proposição 1. Assim, obtemos as seguintes equações para os invariantes de Darboux: (a) $I = (z^2 - x)^{1/2\alpha} e^t$, (b) $I = (x^2 + y^2)e^{-2\alpha t}$, (c) $I = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/\alpha} e^t$ e (f) não tem invariante de Darboux.

Referências

[1] CHEN, G.; UETA, T. Yet another chaotic attractor. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 9, 1465–1466, 1999.

[2] LLIBRE, J.; MESSIAS, M.; REINOL, A.C.; Normal Forms for Polynomial Differential Systems in $\mathbb{R}^3$ Having an Invariant Quadric and a Darboux Invariant. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 25, 1550015–1–16, 2015.

[3] LLIBRE, J.; MESSIAS, M.; SILVA, P.R. Global dynamics in the Poincaré ball of the Chen system having invariant algebraic surfaces. *Int. J. Bifurcation and Chaos* 22, 1250154–1–17, 2012.

*Bolsista de Doutorado FAPESP

Sistemas de Equações de Schrödinger não lineares com Acoplamento Subcrítico

Claudiney Goulart
Coordenação do Curso de Matemática-UFG
Regional Jataí
E-mail: claudineygoulart@hotmail.com

Elves Alves de Barros e Silva
Departamento de Matemática-UnB
E-mail: elves@mat.unb.br

RESUMO

Neste trabalho estabelecemos a existência e multiplicidade de soluções positivas para a seguinte classe de sistemas de equações de Schrödinger não lineares

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda_1 u &= |u|^{p-2}u + \frac{2\beta\alpha}{\alpha+\mu}|u|^{\alpha-2}u|v|^{\mu}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N, \\ -\Delta v + \lambda_2 v &= |v|^{q-2}v + \frac{2\beta\mu}{\alpha+\mu}|v|^{\mu-2}v|u|^{\alpha}, \quad \text{em} \quad \mathbb{R}^N. \end{cases} \tag{0.1}$$

Existência de solução positiva de menor energia também será estabelecida. Para estabelecer tais resultados utilizamos métodos variacionais, mais especificamente, consideramos o funcional associado restrito à variedade de nehari e aplicamos argumentos de minimização locais e globais combinada com métodos minimax. Os argumentos utilizados são baseados principalmente em [1, 3].

Como um dos principais resultados sobre existência de solução podemos citar:

Teorema 0.1 *Existem $\beta_0, \beta_1 > 0$ tais que o Sistema (0.1) possui uma solução positiva para todo $\beta \in [0, \beta_0)$ e uma solução positiva de menor energia para todo $\beta \in (\beta_1, +\infty)$.*

No caso de multiciplicidade de solução mostramos (entre outros) o seguinte resultado:

Teorema 0.2 *Suponha que o acoplamento seja sublinear em relação a uma das variáveis. Então, existe $\beta_0 > 0$ tal que o Sistema (0.1) possui pelo menos duas soluções positivas para todo $\beta \in [0, \beta_0)$.*

Referências

[1] AMBROSETTI, A.; COLORADO, E. Bound and ground states of coupled nonlinear Schrödinger equations, C. R. Math. Acad. Sci. Paris 342, 453-458, 2006.

[2] AMBROSETTI, A; COLORADO, E. Standing waves of some coupled nonlinear Schrödinger equations in $\mathbb{R}^N$, J. Lond. Math. Soc. 2, 67-82, 2007.

[3] MAIA, L. A.; MONTEFUSCO E.; PELLACI, B. Positive solutions for a weakly coupled nonlinear Schrödinger system, J. Differ. Equ. 229, 743-767, 2006.

SBM Sociedade Brasileira de Matemática
.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Solução Numérica de Equações Diferenciais Parciais Elípticas via Método de Diferenças Finitas Exponencial

Ellen S. Gervazoni* **Analice C. Brandi**
Faculdade de Ciências e Tecnologia, FCT/UNESP
Rua Roberto Simonsen, 305
19060-900, Presidente Prudente, SP
E-mail: ellengerva@gmail.com analice@fct.unesp.br

RESUMO

As equações diferenciais parciais são muito importantes na engenharia, pois através dessas equações pode-se modelar diversos problemas e, assim, determinar o estado futuro com base na variação dos valores presentes. Porém, a resolução de uma equação diferencial parcial pode ser complexa, dificultando, ou até mesmo impossibilitando, a obtenção das soluções exatas pelos métodos analíticos existentes. O avanço computacional e a crescente necessidade de se obter soluções de problemas cada vez mais complexos impulsionaram a aplicação de métodos numéricos. O método mais antigo e popular para a solução numérica de equações diferenciais parciais é o método de diferenças finitas [1].

Este trabalho apresenta o estudo, a comparação e a implementação do método de diferenças finitas exponencial de quarta ordem [2] para a solução da equação diferencial parcial elíptica de segunda ordem.

Considerando a equação elíptica de segunda ordem:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x,y)$$

na região quadrada $\Omega = \{(x,y) : a \leq x \leq b,\ a \leq y \leq b\}$, com condição de contorno dada por $u(x,y) = g(x,y)$ em $\partial\Omega$, em que $\partial\Omega$ é o contorno do domínio Ω.

O desenvolvimento e a análise do método de diferenças finitas exponencial é baseado em nove pontos de células compactas, Séries de Taylor, Série de Mac Lauren e Expansão Exponencial. Após as discretizações necessárias e suas devidas substituições, o método de diferenças finitas exponencial é dado da seguinte forma:

$$4(u_{i+1,j}+u_{i-1,j}+u_{i,j+1}+u_{i,j-1}) + (u_{i+1,j+1}+u_{i-1,j+1}+u_{i+1,j-1}+u_{i-1,j-1}) - 20u_{ij} = 6h^2 f_{ij} e^{(\frac{h^2\nabla^2 f_{ij}}{12 f_{ij}})},$$

em que h representa o espaçamento nas direções x e y, e o laplaciano é aproximado por diferenças finitas de segunda ordem como visto abaixo:

$$h^2\nabla^2 f_{ij} = f_{i+1,j} + f_{i-1,j} - 4f_{ij} + f_{i,j+1} + f_{i,j-1}.$$

Para verificação do método numérico foram realizadas simulações numéricas com diferentes problemas com o objetivo de testar a eficácia do método analisado. Estes resultados foram comparados com resultados numéricos da literatura [2] e resultados numéricos utilizando o método de diferenças finitas de nove pontos.

Referências

[1] CUMINATO, J.A.; MENEGUETTE JR., M. *Discretização de Equações Diferenciais Parciais: Técnicas de Diferenças Finitas*. Rio de Janeiro: SBM, 2013.

[2] PANDEY., P.K. A higher accuracy exponential finite difference method for the numerical solution of second order elliptic partial differential equations. *Journal of Mathematical and Computational Science*, v. 3, n. 5, p. 1325-1334, 2013.

*Bolsista de Mestrado Capes