.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

Cardinalidade: Conjuntos finitos, infinitos, enumeráveis e não-enumeráveis

Gabriel F. da Silva[1]
Faculdade de Engenharia - UNESP – Ilha Solteira
R. Couto Magalhães ,339 - 16920-000, Castilho - SP
Email: gabriel_ferreiradasilva@hotmail.com

RESUMO

O conjunto dos números naturais, é exibido pelos axiomas de Peano como "números ordinais", isto é, cada objeto ocupa um determinado lugar e possui ordem. Mas os números naturais também podem ser considerados "números cardinais", isto é, como resposta a uma operação de contagem, como quantos elementos possui este conjunto?

Assim o conjunto dos números naturais é usado para saber o número de elementos de um conjunto finito, ou seja, sendo, um conjunto X chama-se finito quando é vazio e possui 0 elementos ou quando existe, para algum $n \in N$ uma bijeção $\varphi: I_n \to X$ e dizemos que possui n elementos ou que sua cardinalidade $|X| = n$. Um conjunto X é infinito quando não é vazio e além disso seja qual for, não existe bijeção, por exemplo o conjunto dos naturais N. Neste caso a cardinalidade é denotada por : $\aleph_0 < \aleph_1 < \aleph_2 < \cdots$, e a cardinalidade dos naturais é $\aleph_0$.

Deste modo podemos concluir que dois conjuntos A e B tem a mesma cardinalidade se existe uma bijeção entre eles. Um conjunto X é dito enumerável, quando é finito ou quando existe uma bijeção $\varphi: N \to X$ e possui número cardinal $\aleph_0$. Um conjunto Y é dito não enumerável quando não existe uma bijeção $\rho: N \to Y$ por exemplo, os reais R tem cardinalidade maior que a dos naturais.

Exemplo1: O conjunto dos Inteiros tem a mesma cardinalidade que a dos Naturais.

Demonstração: Precisamos mostrar que é bijetora a função $\varphi: Z \to N$ definida como:

$\varphi(n) = \begin{cases} 2n-1, & se\ n > 0 \\ -2n, & se\ n \leq 0 \end{cases}$. Ou seja que é injetora e sobrejetora.

Assim se $m \neq n > 0$ temos que $2m-1 \neq 2n-1$ ou seja $\varphi(m) \neq \varphi(n)$ e de forma análoga para $m \neq n \leq 0$, portanto φ é injetora. Para cada $p \in N$, p é par ou impar, se for par pode ser escrito como $-2n$ com $n \leq 0 \in Z$, se for impar pode ser escrito como $2n-1$ com $n > 0 \in Z$, assim $p = \varphi(n)$ para todo $p \in N$, portanto φ é sobrejetora. Podemos concluir então que $|N| = |Z| = \aleph_0$.

Exemplo2: O conjunto $P(N)$ (partes de N) possui cardinalidade maior que a dos Naturais.

Demonstração: Considerando o conjunto $\{0,1\}$ a função $\sigma: P(N) \to F(N;\{0,1\})$ é bijetora, pois para cada $X \in P(N)$, associamos a função $\sigma_X: N \to \{0,1\}$ definida por $\sigma_X(x) = 1$ se $x \in X$ e $\sigma_X(x) = 0$ se $x \notin X$. A relação $X \to \sigma_X$ é uma bijeção de $P(N)$ sobre $F(N;\{0,1\})$. Como $\{0,1\}$ tem dois elementos nenhuma função $\varphi: N \to F(N\{0,1\})$ é sobrejetiva, mas existe uma função injetiva evidente $f: N \to P(N)$ definida por $f(x) = \{x\}$,sendo assim $|N| < |P(N)|$. ■

Referências

[1] FERREIRA, J. A Construção dos Números. Rio de Janeiro: SBM, 2011.
[2] LIMA, E. L. Curso de análise; v.1. Rio de Janeiro: Associação Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada, 2013.

[1]Bolsista de Iniciação Científica PICME/CNPq

SBM Sociedade Brasileira de Matemática
.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

RIEMANN X LEBESGUE

Fábio Mendes Ramos **Valdomiro Rocha** **Walisson Marques do Nascimento**

Instituto Federal do Norte de Minas, IFNMG
Fazenda Varginha Km 02 Rod.Salinas/Taiobeiras
39560-000, Salinas, MG
Email: fabio.ramos@ifnmg.edu.br valdomiro.rocha@ ifnmg.edu.br walisson.marques@hotmail.com

RESUMO

Esse No século XIX, o rigor matemático tentou colocar o cálculo em bases solidas. A integral de Riemann é um exemplo de sucesso destas tentativas pois fornece o resultado esperado para muitos problemas que eram conhecidos e outros que surgiam. Porém, a integral de Riemann não interage bem com operação de limite de sequências de funções. Existe situações em que isso é importante, por exemplo, no estudo da série de Fourier. A integral de Lebesgue é possível interpretar os limites no interior da integral. Pois a integral de Lebesgue é, num paralelo com séries, "absolutamente convergente", enquanto a integral de Riemann e "condicionalmente convergente". Como a integral de Lebesgue estende para uma classe maior de funções a integral de Riemann, e permite definir integrais sobre espaços mais gerais que o R^n. Faremos uma comparação entre a integral de Riemann com a de Lebesgue, visando ao fim, dar um exemplo de uma função que é Lebesgue integrável, mas não é Riemann integrável. Segundo Cabal (2013) existem algumas dificuldades com a integral de Riemann e comparação informal com a integral de Lebesgue como: (*i*) a Troca do limite com a integral. As condições que permitem mostrar que:

$$\lim_{n\to+\infty}\int f_n(x)dx = \int \lim_{n\to+\infty} f_n(x)dx$$

não são fáceis na integral de Riemann. Geralmente, exigimos a convergência uniforme da sequência (f_n) para que o resultado se verifique. (*ii*) Ausência da convergência monótona. Exemplo: Considere $[0,1]\cap\mathbb{Q} = \{a_1, a_2, \dots, a_n, \dots\} \subset \mathbb{Q}$ e $A_n = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$. Defina $f_n\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ por

$$f_n(x) = \mathcal{X}_{A_n}(x) = \begin{cases} 1, & x \in A_n \\ 0, & x \in [0,1] - A_n. \end{cases}$$

Notamos que $f_n \le f_{n+1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$ e $f_n \longrightarrow \mathcal{X}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$, pontualmente. As funções f_n são iguais a zero em todos os pontos, exceto num conjunto finito de pontos. Portanto, sua integral de Riemann é zero. Mas $\mathcal{X}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}$ não é integrável a Riemann. (*iii*) Numa comparação informal entre as duas integrais, imagine que desejamos saber o volume de uma montanha, sabendo a função de sua altura h. Na *integral de Riemann* dividimos a base da montanha numa malha de 1 metro quadrado e medimos a altura h da montanha no centro de cada quadrado. O volume em do solido com base em casa quadrado da malha, e aproximadamente 1x1xh. Portanto o volume total da montanha e (aproximadamente) igual a soma desse volumes. Neste caso, estamos *particionando o domínio*. Na *integral de Lebesgue* desenhamos um mapa de contorno da montanha com altura h (em metros) entre as curvas de nível. O volume contido entre duas curvas de nível é, aproximadamente, igual a área vezes a altura h da curva de nível. Portanto, o volume total é (aproximadamente) igual a soma desses volumes. Nesse caso, estamos particionando a *imagem*. **Riemann x Lebesgue** Exemplo de uma Função Lebesgue integrável que não é Riemann Integravel, A função $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$f(x) = \mathcal{X}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [0,1]\cap\mathbb{Q} \\ 0, & x \in [0,1]\cap(\mathbb{R}-\mathbb{Q}). \end{cases}$$

É Lebesgue integrável com

$$\int f d\mu = \int \mathcal{X}_{[0,1]\cap\mathbb{Q}} d\mu = \mu([0,1]\cap\mathbb{Q} = 0.$$

Mas *f* não é Riemann integrável, pois *f* é descontínua em todos os pontos de [0,1] que tem medida de Lebesgue positiva.

Referências

[1] CABRAL, Marco A. P. **Introdução à Teoria da Medida e Integral de Lebesgue**. 1ª ed., UFRJ, RJ, 2013.

[2] FERNANDEZ, P. J. **Medida e Integração**, 2ª ed., Impa, RJ, 2002.

Superfícies com Curvatura Gaussiana Negativa

Róbson L. Santos[1]
Instituto de Matemática e Estatística, UFG
Caixa postal 131
74001-970, Goiânia, GO
Email: robsonlousa@hotmail.com

Romildo S. Pina
Instituto de Matemática e Estatística, UFG
Caixa postal 131
74001-970, Goiânia, GO
Email: romildo@ufg.com

RESUMO

O trabalho que pretende ser apresentado em forma de pôster no III Colóquio de Matemática da Região Sudeste é fruto do projeto de Iniciação Científica PIBIC/CNPq realizado durante agosto de 2014 até o presente momento, com término em julho de 2015. O projeto consiste no estudo das principais propriedades das superfícies no espaço, com foco principal nas superfícies que possuem curvatura gaussiana negativa, para tanto, foi preciso um estudo prévio de curvas no plano e no espaço, estudo este realizado durante o desenvolvimento do projeto para o Programa Jovens Talentos para a Ciência ocorrido no período de agosto de 2013 a julho de 2014, ambos sob orientação do Dr. Romildo da Silva Pina.

Superfícies, sumariamente, podem ser entendidas como o plano cortado, deformado, curvado e remendado, sendo o próprio plano uma superfície. Por necessidade de uma formalização, é definido o conceito de Superfícies Regulares como sendo um subconjunto S de $\mathbb{R}^3$ que para cada ponto de S existe uma vizinhança e uma aplicação diferenciável, homeomófica, que possui diferencial injetiva para todo ponto de um aberto de $\mathbb{R}^2$ sobre esta vizinhança contida em $\mathbb{R}^3$.

São estas superfícies que vêm sendo estudadas no desenvolvimento do projeto, para assim chegar ao conceito de Curvatura Gaussiana e finalmente definir Superfícies com Curvatura Gaussiana Negativa, principal objeto deste estudo.

Referências

[1] CARMO, M. P. Geometria diferencial de curvas e superficies. 5° ed. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2012.

[2] TENENBLAT, K. Introdução à geometria diferencial. 2° ed. São Paulo: Edgard Blucher, 2008.

[1]Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq.

Teorema de Bolzano-Weierstrass

Gilson Teixeira Pereira[1]
Universidade Federal do Amapá, Unifap
Rod. Juscelino Kubitschek, KM-02 Jardim Marco Zero Macapá – AP
68903-419 Macapá, AP
gilsonmatematic@hotmail.com

Sérgio Barbosa de Miranda
Universidade Federal do Amapá, Unifap
Rod. Juscelino Kubitschek, KM-02 Jardim Marco Zero Macapá – AP
68903-419 Macapá, AP
Email: smiranda@unifap.br

RESUMO

A Análise Real é o ramo da análise matemática que lida com o conjunto dos números reais e as funcões reais de uma de uma variável real. Surgiu da necessidade de prever provas rigorosas às ideias intuitivas do cálculo, tais como, limite, continuidade, derivadas e integrais. No entanto, para tais provas ou demostrações, faz-se necessário a compreensão de alguns resultados bastante usuais que nos auxiliam em diversas justificativas. Nesse sentido, este é um trabalho que tem como objetivo enunciar um importantes resultados vistos quando se faz o estudo da análise matemática, seguido de sua demostração, o chamado Torema de Bolzano-Weierstrass, o qual afirma que, toda sequência limitada de números reais possui subsequência convergente. É um resutado que está presente em inúmeros problemas no campo de cálculo matemático, principalmente, no que tange, ao estudo sequências e séries númericas e, sequências e séries de funções, dentre outros tópcos da Análise Real. Entretanto, afim de compreendermos melhor o Torema de Bolzano-Beierstrass, iniciaremos com algumas definicões, tais como, a definição de sequência, subsequência, sequência limitada, monótona e convergência e divergência de uma sequência de números reais. A partir das quais, estabeleceremos as condições necessárias para que o teorema proposto possa ser útil em suas diversas aplicações. E, finalizaremos com a exibição e solucão de problemas envolvendo as hipóteses do resultado trabalhado.

Referências

[1] ÁVILA, G. S. S. *Introdução a Análise Matemática*. 2. ed. São Paulo,1999.

[2] FIGUEIREDO. D. G. *Análise* 1. 2. ed. São Paulo. Livros Técnicos e Cientificos,1975.

[3] LIMA, E L. *Análise Real*, volume 1. 11. ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA.

Rio de Janeiro, 2012.

[4] LIMA, E L . *Análise Real*, volume 1. 12. ed. Coleção Matemática Universitária, IMPA. Rio de Janeiro: Associação Nacional de Matemática Pura e Aplicada. 2010.

[5] MOREIRA. C. N. *Curso de Análise Real*. Volume 2. 1. ed. Rio de Janeiro. UFRG, 2008.

[1] Bolsista de Iniciação Científica PIBIC/CNPq