.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

# Alguns Subgrupos Verbais com Condições de Finitude

**Jhone Caldeira***
Instituto de Matemática e Estatística, UFG
74001-970, Goiânia, GO
E-mail: jhone@ufg.br

## RESUMO

A solução por Zelmanov do Problema Restrito de Burnside (PRB) (premiada com a Medalha Fields) teve grande impacto no desenvolvimento de alguns temas da Teoria de Grupos. Os métodos envolvidos podem ser aplicados na resolução de outros problemas. Atualmente é bem conhecido que a solução do PRB é equivalente a:

**1 -** Um grupo residualmente finito de expoente $n$ é localmente finito.

**2 -** Um grupo residualmente nilpotente de expoente $n$ é localmente nilpotente.

Denotamos por $w(G)$ o subgrupo verbal de $G$ gerado por todos os $w$-valores e apresentamos os seguintes problemas:

**3 -** Sejam $n \geq 1$ natural e $w$ uma palavra. Seja $G$ um grupo residualmente finito satisfazendo a identidade $w^n \equiv 1$. O subgrupo verbal $w(G)$ é localmente finito?

**4 -** Sejam $n \geq 1$ natural e $w$ uma palavra. Seja $G$ um grupo residualmente nilpotente satisfazendo a identidade $w^n \equiv 1$. O subgrupo verbal $w(G)$ é localmente nilpotente?

De acordo com o PRB, a resposta para cada problema é afirmativa no caso $w(x) = x$. Na verdade, a resposta é afirmativa para qualquer palavra $w$ que não é do tipo comutador. Discutiremos os Problemas (3) e (4) para algumas palavras $w$.

# Referências

[1] CALDEIRA, J.; SHUMYATSKY, P. On Verbal Subgroups in Residually Finite Groups. *Bull. Austr. Math. Soc.*, v. 84, p. 159-170, 2012.

[2] CALDEIRA, J.; SHUMYATSKY, P. Engel Words and the Restricted Burnside Problem. *Monatsh. Math.*, v. 159, p. 397-405, 2010.

[3] CALDEIRA, J.; SHUMYATSKY, P. The Restricted Burnside Problem for Multilinear Commutators. *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, v. 146, p. 603-613, 2009.

[4] CALDEIRA, J.; SHUMYATSKY, P. Varieties of Groups and the Restricted Burnside Problem. *Ischia Group Theory, World Scientific*, p. 248-257, 2008.

[5] SHUMYATSKY, P. On varieties arising from the solution of the Restricted Burnside Problem. *J. Pure Appl. Alg.*, v. 171, p. 67-74, 2002.

[6] ZELMANOV, E. The solution of the Restricted Burnside Problem for groups of odd exponent. *Math. USSR Izvestija*, v. 36, p. 41-60, 1991.

*Este trabalho foi parcialmente financiado por CNPq e Capes.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

# Caracterização de curvas hiperelípticas com um dado divisor principal

**José Gilvan de Oliveira**
DMAT, PPGMAT, UFES
Av. Fernando Ferrari, 514
29075-910 , Vitória, ES
gilvan.oliveira@ufes.br jgilvanol@gmail.com

**Francisco L. R. Pimentel**
Departamento de Matemática, UFC
Bloco 914, Campus do Pici 60455-750, Fortaleza, CE
pimentel@mat.ufc.br

## RESUMO

Nas últimas décadas, diversos artigos de pesquisa foram publicados sobre o problema da realização de semigrupos numéricos em recobrimentos de curvas algébricas, como se verifica por exemplo em [1], [4] e nas suas referências.

Em [2], os autores explorararam a existência de um especial divisor principal, em certa curva algébrica hiperelíptica de gênero dois, para completar a até então conhecida descrição dos semigrupos numéricos que ocorrem em recobrimento duplo de curvas hiperelípticas de gênero dois.

No presente trabalho, generalizamos esse resultado para tal curva hiperelíptica de gênero qualquer e obtemos também uma caracterização dessa curva a partir da existência do mencionado divisor principal. Como aplicação desse resultado, seguindo a técnica usada em [2], exibimos explicitamente recobrimentos duplos com pontos ramificados realizando famílias de semigrupos numéricos como semigrupos de Weierstrass.

## Referências

[1] Komeda, J. Double Coverings of Curves and Non-Weierstrass Semigroups. *Communications in Algebra*, v. 41, n. 1, p. 312-324, 2013.

[2] Oliveira, G.; Pimentel, F. L. R. On Weierstrass Semigroups of Double Covering of Genus Two Curves. *Semigroup Forum*, v. 77, p. 152-162, 2008.

[3] Oliveira, G.; Pimentel, F. L. R. On Weierstrass Semigroups of Double Coverings of Hyperelliptic Curves. *Semigroup Forum* Aceito em 2014.

[4] Oliveira, G.; Torres, F.; Villanueva, J. On the Weight of Numerical Semigroups. *J. Pure Appl. Algebra*, v. 214, n. 11, p. 1955-1961, 2010.

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

# Códigos do Tipo Reed-Muller em Interseções Completas

**Cirilo Gonçalves Júnior**
Centro Federal de Educação Tecnológica de Minas Gerais
Rua Santa Rita, 900
35790-000, Curvelo, MG
E-mail: cirilo@curvelo.cefetmg.br

**Cícero Carvalho***
Faculdade de Matemática, UFU
Av. João Naves de Ávila, 2121
38408-100, Uberlândia, MG
E-mail: cicero@ufu.br

## RESUMO

Este é um trabalho na área de teoria de códigos, um campo de pesquisa com aplicações em diversas áreas do conhecimento: matemática, computação, estatística, engenharia elétrica entre outras. Queremos apresentar resultados sobre a dimensão de códigos de avaliação tipo Reed-Muller definidos sobre uma interseção completa.

Sejam $K$ um corpo finito com $q$ elementos, $A = K[x_0, x_1, \ldots, x_n] = \oplus_{j \geq 0} A_j$ o anel de polinômios nas variáveis $x_0, x_1, \ldots, x_n$ sobre o corpo $K$, com a graduação usual. Seja $\mathcal{X} = \{P_1, \ldots, P_m\}$ um subconjunto de espaço projetivo $\mathbb{P}^n(K)$ (ver [1]),

$$I_{\mathcal{X}} := \{f \in A \ \mid \ f(P_i) = 0, \forall i = 1, \ldots, m\} = \bigoplus_{j \geq 0} I_{\mathcal{X},j}$$

o ideal gerado pelos polinômios homogêneos que se anulam em $\mathcal{X}$ e o anel quociente $R_{\mathcal{X}} := A/I_{\mathcal{X}} = \oplus_{j \geq 0} R_{\mathcal{X},j} = \oplus_{j \geq 0} A_j / I_{\mathcal{X},j}$. Primeiramente obtemos resultados referentes ao anel $R_{\mathcal{X}}$ e ao seu módulo canônico $\omega_{\mathcal{X}}$ (ver [2]). Com isso, calculamos função de Hilbert $H_{\mathcal{X}}(j) := \dim_k R_{\mathcal{X},j}$ e a série de Hilbert $F_{\mathcal{X}}(t) = \sum_{j=0}^{\infty} H_{\mathcal{X}}(j) t^j$ de $R_{\mathcal{X}}$. Assim, construímos o código avaliação do tipo Reed-Muller de ordem $j$, denotado por $C_{\mathcal{X}}(j)$, que é a imagem do homomorfismo

$$\begin{array}{rcl} ev_j : A_j & \longrightarrow & K^m \\ f & \longmapsto & (f(P_1), \ldots, f(P_m)). \end{array}$$

Observamos que $\mathcal{X} = \{P_1, \ldots, P_m\} \subseteq \mathbb{P}^n(K)$ é uma interseção completa, ou seja, existem $f_1, \ldots, f_n \in A$ tais que $I_{\mathcal{X}} = \langle f_1, \ldots, f_n \rangle$, onde $f_i$ não é divisor de zero em $A/\langle f_1, \ldots, f_{i-1} \rangle$ para todo $i = 1, \ldots, n$. Obtemos a dimensão e o comprimento desse código como sendo $dim_K C_{\mathcal{X}}(j) = H_{\mathcal{X}}(j)$ e $|\mathcal{X}|$, respectivamente. Além disso usamos o módulo canônico $\omega_{\mathcal{X}}$ para determinarmos o código dual para o código $C_{\mathcal{X}}(a_{\mathcal{X}})$, onde $a_{\mathcal{X}}$ é o $a$-invariante de $R_{\mathcal{X}}$ (ver [3] e [2]).

## Referências

[1] COX, D.; LITTLE, J.; O'SHEA D. *Ideals, Varieties, e Algorithms*, second ed; Springer; Berlim, 1997.

[2] DUURSMA, I.; RENTERÍA, C.; TAPIA-RECILLAS, H. *Reed Muller codes on Complete Intersections*, Applicable Algebra in Engineering, Communication and Computing, AAECC, Springer, 11(2001), 455-462.

[3] RENTERÍA, C.; TAPIA-RECILLAS, H. *Linear codes associated to the ideal of points in $P^d$ and its canonical module.* Commun. Algebra 24, 1083-1090 (1996).

*Parcialmente financiado pelo CNPq proc. 480477/2013-2

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

# Demonstrações Algébricas para Teoremas de Existência e Unicidade de Poliedros com Faces Prescritas

**João Alves Silva Júnior**[1]
Departamento de Matemática, UFPE
Av. Jornalista Aníbal Fernandes, sn
50740-560, Recife, PE
Email: jasj@dmat.ufpe.br

## RESUMO

No final do século XIX, utilizando ferramentas da análise (derivadas, método dos multiplicadores de Lagrange, etc.), Minkowski [3] provou o seguinte

**Teorema**: Se $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_m$ são vetores unitários não coplanares e $F_1, \dots, F_m$ são números positivos tais que $\sum_{i=1}^{m} F_i \boldsymbol{n}_i = \boldsymbol{0}$, então existe um poliedro convexo fechado com faces tendo vetores normais exteriores $\boldsymbol{n}_1, \dots, \boldsymbol{n}_m$ e áreas $F_1, \dots, F_m$.

Ver [1, Section 7.2].

Outros resultados conhecidos (baseados primariamente em [2]) garantem que o poliedro convexo referido acima é único a menos de translação [1, p. 288, Theorem 1].

Desenvolvemos uma demonstração algébrica elementar do "teorema de Cauchy- Minkowski" (existência e unicidade de poliedros com faces prescritas) restrito ao caso $m = 4$ (tetraedros). Nossa abordagem se baseia na seguinte observação: se $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}$ são vetores em $\mathbb{R}^3$, com $\det(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) > 0$, então existem únicos $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in \mathbb{R}^3$, tais que $\det(\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w}) > 0$ e

$$\begin{cases} \boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \boldsymbol{a} \\ \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{w} = \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{w} \times \boldsymbol{u} = \boldsymbol{c}. \end{cases}$$

Procuramos agora generalizar nosso método de prova para outros poliedros. A ideia que temos em mente estabelece uma dualidade entre os vértices e os vetores das faces ($F_1\boldsymbol{n}_1, \dots, F_n\boldsymbol{n}_n$, na notação utilizada acima) de um poliedro.

## Referências

[1] ALEXANDROV, A. D.; DAIRBEKOV, N.S.; KUTATELADZE, S.S.; SOSSINSKY A.B. *Convex Polyhedra.* Berlin: Springer, 2005.

[2] CAUCHY, A. Sur les polygones et polyédres. Second Memoir. *J. École Polytechn*, v. 9, p. 87-99, 1813.

[3] MINKOWSKI, H.: Allgemeine Lehrsätze über konvexe Polyeder. *Nachr. Ges.Wiss. Göttingen, v.* 1897, p. 198-219, 1897.

[1]Bolsista de Doutorado/CNPq

Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

# Novos resultados de teoria dos números e aplicações*

**Antonio Aparecido de Andrade**
Inst. de Bioc., Letras e Ciências Exatas, UNESP
Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto, SP
E-mail: andrade@ibilce.unesp.br

**Agnaldo José Ferrari**
Faculdade de Ciências, UNESP
Av. Luiz E. C. Coube, 14-01
17033-360, Bauru, SP
E-mail: ferrari@fc.unesp.br

**Grasiele Cristiane Jorge**
Instituto de Ciências e Tecnologia, UNIFESP
Rua Talim, 330
12231-280, São José dos Campos, SP
E-mail: grasiele.jorge@unifesp.br

**Robson Ricardo de Araujo**
Inst. de Bioc., Letras e Ciências Exatas, UNESP
Rua Cristovão Colombo, 2265
15054-000, São José do Rio Preto - SP
E-mail: dearaujorobsonricardo@gmail.com

**RESUMO**

Seja $\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{K}$ uma extensão abeliana de corpos de grau $n$, ou seja, $\mathbb{K}$ é um corpo de números abeliano de grau $n$. Assim, o corpo $\mathbb{K}$ pode ser visto como um espaço vetorial de dimensão $n$ sobre $\mathbb{Q}$. Pelo Teorema de Kronecker-Weber, segue que existe um inteiro positivo $n \in \mathbb{N}$ tal que $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{Q}(\xi_n)$, onde $\xi_n$ é uma raiz $n$-ésima da unidade. Deste modo, existe um inteiro positivo $n$ mínimo, chamado condutor, que satisfaça tal condição. Sejam $\xi = \xi_n$, onde $n = 2, 4, p^r, 2p^r$, $\mathbb{L} = \mathbb{Q}(\xi)$ e $G = Gal(\mathbb{L} : \mathbb{Q})$. O anel de inteiros algébricos $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$, onde $\mathbb{K} \subseteq \mathbb{L}$, é conhecido para os corpos abelianos. Assim, explorando o fato de $G$ ser um grupo cíclico, logo abeliano, o objetivo é encontrar subcorpos de $\mathbb{L}$ juntamente com seu anel de inteiros algébricos e aplicações nas construções de reticulados com densidade de centro ótima.

Um dos problemas cláassicos do empacotamento esférico consiste em encontrar um arranjo de esferas idênticas no espaço euclidiano de modo que a fração do espaço coberto pelas esferas seja a maior possível. Este fato é uma versão do 18º Problema de Hilbert - 1900. Usando técnicas de teoria dos números obtemos soluções de como encontrar reticulados densos no espaço euclidiano. Um dos métodos que apresenta boas características é através do homomorfismo canônico (ou Minkowski). Desse modo, com o objetivo de construir reticulados que sejam eficientes para transmissão de sinais sobre os canais gaussiano e com desvanecimento do tipo Rayleigh, neste trabalho construímos versões rotacionadas com diversidade máxima dos reticulados mais densos conhecidos em algumas dimensões pares.

## Referências

[1] L.C. Washington, *Introduction to Ciclotomic Fields*, Springer-Verlag, New York, 1982.

[2] P. Samuel, *Algebraic theory of numbers*, Hermann, Paris, 1970.

[3] P. Ribenboin, *Classical theory of algebraic numbers*, Springer Verlag, New York, 2001.

[4] H.-W Leopoldt, *Über die Hauptordnung der ganzen Elemente eines abelschen Zahlkörpers*, J. reine angew. Math. 201 (1959), 119-149.

[5] G. Lettl, *The ring of integers of an abelian number field*, J. reine angew. Math. 404 (1990), 162-170.

[6] S.T.A. Shah and T. Nakahara, *Monogenesis of the rings of integers in certain imaginary abelian fields*, Nagoya Math. J. Vol. 168 (2002), 85-92.

*Apoio Fapesp 2013/25977-7 e 2014/14449-2

.Anais do III Colóquio de Matemática da Região Sudeste
.Uberlândia - 13 a 17 de abril de 2015
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

# Pro-p Completions of Poincaré Duality Groups

**Igor dos Santos Lima**
Unidade Acadêmica Especial - Instituto de Matemática e Tecnologia - IMTec, UFG
Av. Dr. Lamartine Pinto de Avelar 1120, St. Universitário
75704-020, Catalão - GO
Email: igor.matematico@gmail.com

## RESUMO

This is a joint work with D.H. Kochloukova (University of Campinas, Brazil) and J.A. Hillman (University of Sydney, Australia) publicated in the Israel Journal of Mathematics (2014). We consider some suficient conditions for the pro-p completion of an orientable Poincaré duality group of dimension $n \leq 3$ to be a virtually pro-p Poincaré duality group of dimension at most $n \leq 2$.

## Referências

[1] HILLMAN, J.; KOCHLOUKOVA, D.; LIMA, I. Pro-p completions of Poincaré duality groups. *Israel Journal of Mathematics*, v. 200, p. 1-17, 2014.