

ESTUDO DA DINÂMICA DE UMA FAMÍLIA DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

Daniel de Oliveira Ferreira

Universidade Federal de Uberlândia
danieldeoliveira1995@gmail.com

Marcelo Lopes Vieira

Universidade Federal de Uberlândia
marcelulopis@yahoo.com.br

RESUMO

Este trabalho aborda o estudo completo da dinâmica de uma família de equações diferenciais autônomas conforme seus parâmetros variam. Explorando conceitos do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias, como a estabilidade e a instabilidade das soluções de equilíbrio, e analisando raízes polinomiais, são obtidos o plano dos parâmetros e o diagrama de bifurcação, caracterizando a dinâmica da EDO. Assim, este estudo introduz o importante estudo qualitativo de equações diferenciais, que muitas vezes se mostra mais viável que a solução analítica, devido à complexidade e à dependência das soluções de parâmetros, algo tão comum em modelagens contemporâneas.

ABSTRACT

This work develops a complete study of the dynamics of a family of autonomous differential equations when its parameters vary. In the exploration, using concepts of the qualitative theory of the ordinary differential equations, for example, non-equilibrium and equilibrium solutions, and with the analysis of polynomial roots, there was obtained the two-dimensional parameter plane and the bifurcation diagram for this ODE. So, this study introduce the important analysis of the qualitative behavior of the differential equations, that often is more efficient than solving them analytically, because of the complexity and of the solutions's dependence on parameters, what is very common in the modern modeling.

Palavras-chave: Equações diferenciais Autônomas, bifurcação e pontos de equilíbrio.

1 INTRODUÇÃO

Abordando tópicos introdutórios do estudo qualitativo das equações diferenciais ordinárias, este trabalho visa estudar a dinâmica da família de equações diferenciais:

$$x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b, \quad (1)$$

cujas soluções dependem diretamente dos parâmetros a e b . Além disso, esta família de equações é não-linear, de primeira ordem, separável e autônoma, isto é, a variável independente não aparece explicitamente na equação, podendo ser escrita na forma:

$$x' = f(x)$$

As EDO's autônomas modelam muitos fenômenos, como dinâmicas populacionais, decaimento radioativo e a troca de calor entre um corpo e o meio (pela lei de resfriamento de Newton). Além disso, a teoria clássica nos diz que um sistema não-autônomo pode ser escrito como um sistema autônomo.

Já que a EDO (1) é separável, num primeiro momento, a tentativa de resolvê-la analiticamente é pertinente. No entanto, separando-a temos:

$$\frac{dx}{ax - x^3 - b} = dt \Rightarrow t = \int \frac{dx}{ax - x^3 - b} + k \tag{2}$$

Em que k é uma constante. Por (2) vemos que a resolução de tal equação recai numa integração por frações parciais, que depende das raízes do polinômio $ax - x^3 - b$. A quantidade e o valor dessas raízes, por sua vez, dependem dos parâmetros a e b , o que inviabiliza a solução analítica. No caso particular $a = b = 0$, cujo campo de direções está representado na figura 1, obtemos:

$$t = \int \frac{dx}{-x^3} \Rightarrow x(t) = \pm \frac{1}{\sqrt{2(t-k)}} \tag{3}$$

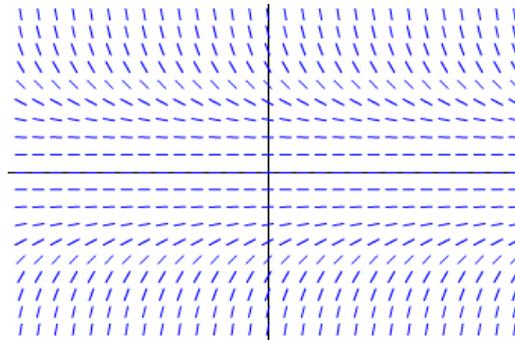


FIGURA 1: Campo de direções para a solução do caso particular $a = b = 0$

Para executar a análise dessa família de equações, um estudo de raízes polinomiais também é feito e a utilização do Teorema de Rolle se faz necessária. O estudo deste exemplo é interessante pelo fato de introduzir o caráter decisivo que os parâmetros têm em aplicações reais, além de algumas técnicas para compreender a dinâmica de equações diferenciais não-lineares. Analisando um parâmetro em função do outro e utilizando-se da teoria qualitativa das EDO's autônomas, é possível caracterizar a natureza dos pontos de equilíbrio desta equação. Ao final, construímos o plano dos parâmetros retratando a dinâmica da equação conforme os parâmetros variam, enfatizando os pontos críticos, a estabilidade e a quantidade destes pontos.

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

2.1 PONTO DE EQUILÍBRIO

Definição 2.1: *Seja $x' = f(x)$ uma equação diferencial autônoma, se $f(x_1) = 0$, então x_1 é um ponto de equilíbrio da equação, isto é, a solução $x_1(t)$ da equação será constante.*

Assim, nos interessa saber para que valores de x , $f(x) = 0$. Tais pontos, também chamados de pontos críticos de $f(x)$, para a família de equações objeto desse estudo, serão as raízes do polinômio de terceiro grau $ax - x^3 - b$. Se x_1 é um ponto crítico de uma equação diferencial autônoma, para classificá-lo, basta verificar a derivada primeira de $f_{a,b}(x)$:

Caso $f'(x_1) < 0$: então x_1 é um atrator;

Caso $f'(x_1) = 0$: então, a princípio, não se pode concluir nada (pode ser um ponto atrator, repulsor ou de sela);

Caso $f'(x_1) > 0$: então x_1 é um repulsor.

De modo intuitivo, um ponto de equilíbrio atrator é dito também estável, pois as soluções que iniciam próximas a essa solução estacionária permanecem próximas a ela. Por outro lado, um ponto crítico é repulsor ou instável, caso as soluções se afastem dessa solução de equilíbrio.

Essa classificação pode ser feita intuitivamente pela seguinte observação: se, no plano de fase $f(x)$ é decrescente ($f'(x) < 0$) no intervalo que contém x_1 , este ponto será um atrator pois para $x < x_1$, temos que $x' > 0$ (inclinação positiva de $x(t)$), e portanto, as soluções $x(t)$ crescem em direção à x_1 ; e para $x > x_1$, $x' < 0$, e as soluções $x(t)$ decrescem em direção à x_1 . De modo análogo, observa-se que se $f(x)$ é crescente ($f'(x) > 0$), o ponto x_1 será um repulsor pois para $x < x_1$, as soluções $x(t)$, com inclinações negativas, irão se afastar da solução constante x_1 , assim como as soluções $x(t)$, para $x > x_1$, com inclinações positivas. Uma solução de equilíbrio pode ser considerada instável pela esquerda e estável pela direita, ou vice-versa, sendo chamada neste caso, de ponto de sela. Tal fato acontece quando $f(x)$ é crescente por um lado e decrescente de outro, isto é, quando $f'(x)$ troca de sinal ao passar pelo ponto crítico x_1 .

2.2 TEOREMA DE ROLLE

Teorema 2.1: *Teorema de Rolle. Se uma função f é contínua em um intervalo $[a, b]$, diferenciável em (a, b) e $f(a) = f(b)$ então existe, no mínimo, um ponto c pertencente ao intervalo (a, b) tal que $f'(c) = 0$.*

Uma demonstração deste teorema pode ser encontrada no capítulo VII do livro [1]. Este importante teorema é fundamental para a análise da dinâmica da EDO $x' = ax - x^3 - b$, pois adiante, caso tenhamos dois pontos com imagens iguais, garantiremos a existência de um ponto x_m neste intervalo em que $f'(x_m) = 0$, o que implicará na classificação dos pontos críticos da EDO.

3 EXPLORANDO $f'(x)$: CLASSIFICANDO OS PONTOS CRÍTICOS

Para que a análise de $f_{a,b}(x)$ seja simplificada, isto é, para encontrar e classificar as soluções de equilíbrio, é interessante definir:

$$F(x) = f_{a,b}(x) + b = ax - x^3 \quad (4)$$

Assim, se $F(x_1) = b$, x_1 é um ponto crítico de $f_{a,b}(x)$, e portanto, solução de equilíbrio da família de equações em questão. Então para classificação dos pontos críticos, temos que:

$$F'(x) = f'(x) = a - 3x^2 \quad (5)$$

Isto é, $f'(x)$ é uma parábola com concavidade para baixo que depende apenas de a . Se $a < 0$, $f'(x)$ não tem raízes e é sempre menor que zero, Caso $a = 0$, $f'(x)$ tem uma raiz em $x = 0$ e para $x \neq 0$, $f'(x) < 0$. E se $a > 0$ $f'(x)$ tem duas raízes, $x_{m1} = -\sqrt{\frac{a}{3}}$ e $x_{m2} = \sqrt{\frac{a}{3}}$, de modo que $f'(x) > 0$ apenas para $x_{m1} < x < x_{m2}$ (figura 2).

E além disso, $f'(x)$ indica que temos duas situações distintas para $F(x)$: caso $a > 0$ teremos um ponto de máximo e um de mínimo local, e caso $a \leq 0$, não teremos nenhum ponto de máximo ou mínimo. Pois observamos que se $a > 0$, $f'(x)$ tem duas raízes, que são justamente os pontos de máximo e mínimo de $F(x)$ e marcam a mudança de comportamento dos pontos críticos e caso $a \leq 0$ não há nenhum ponto de máximo ou mínimo, pois a única raiz de $f'(x)$ para $a=0$ é um ponto de sela. Assim temos:

Se $a < 0$: Qualquer ponto crítico de $f_{a,b}(x)$ é um atrator, pois $f'(x) < 0$. E como não há nenhum ponto de máximo ou mínimo neste caso, haverá uma única interseção de $y = F(x)$ com a reta $y = b$ (figura 3), ou seja, uma única solução de equilíbrio, e como já analisado, esta será estável.

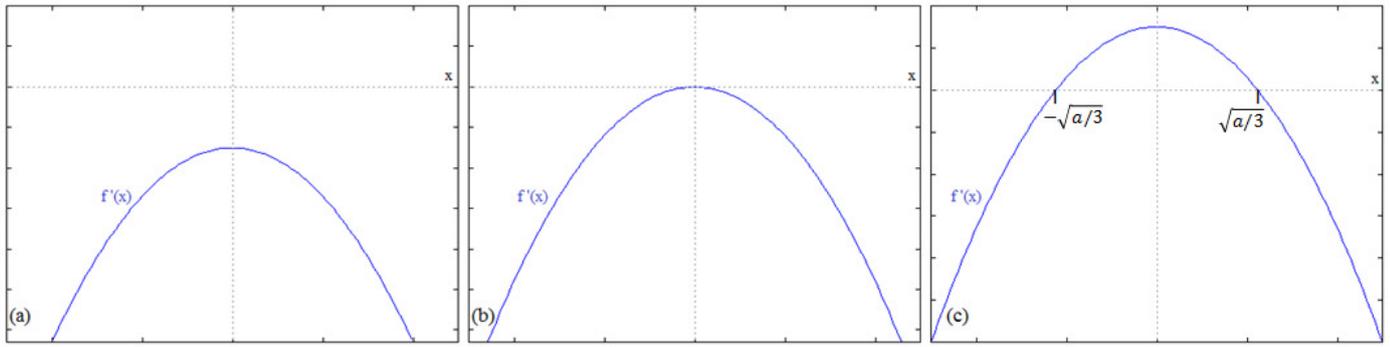


FIGURA 2: (a) $f'(x)$ caso $a < 0$, (b) caso $a = 0$ e (c) caso $a > 0$

Se $a = 0$: Para todos os pontos $x \neq 0$ temos que $f'(x) < 0$ e portanto qualquer ponto crítico nessas condições é um atrator. A princípio não há como classificar um ponto crítico em $x = 0$ para $a = 0$, pois $f'(0) = 0$, no entanto, como $f'(x) < 0$ para todos os outros valores de x , isto é, $f_{a,b}(x)$ permanece decrescente pela esquerda e pela direita, um ponto crítico neste caso seria um atrator. E como o caso anterior, haverá uma única interseção de $y = F(x)$ com a reta $y = b$, solução de equilíbrio estável dada analiticamente por $x = \sqrt[3]{-b}$. Isto está de acordo com a solução para o caso particular $a = b = 0$ encontrada na equação (3) e representada pelo campo de direções da figura 1, que contém uma solução estável em zero.

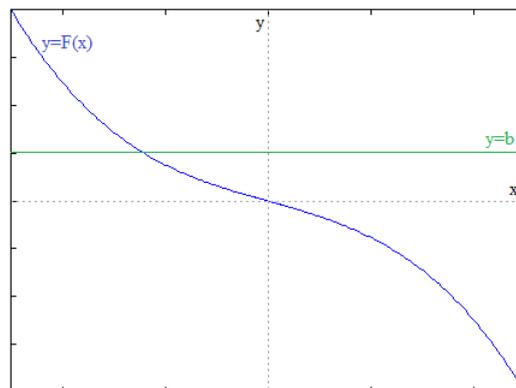


FIGURA 3: $F(x)$ para $a \leq 0$

Se $a > 0$: o ponto crítico x_1 será atrator se $x_1 < -\sqrt{\frac{a}{3}}$ ou $x_1 > +\sqrt{\frac{a}{3}}$, pois neste caso $f'(x) < 0$. Analogamente, x_1 será um repulsor se $-\sqrt{\frac{a}{3}} < x_1 < \sqrt{\frac{a}{3}}$, já que $f'(x) > 0$, neste intervalo. Caso $x_1 = -\sqrt{\frac{a}{3}}$, então ele será um ponto de sela, atrator à esquerda e repulsor pela direita, pois $f'(x) < 0$ para $x < x_1$ (esquerda) e $f'(x) > 0$ para $x > x_1$ (direita). De modo semelhante, se $x_1 = \sqrt{\frac{a}{3}}$ então x_1 é um ponto de sela, mas desta vez este é repulsor para $x < x_1$ e atrator para $x > x_1$.

No caso específico $a = 1$ e $b = 0$, cujo campo de direções é mostrado na figura 4, temos três pontos críticos: dois atratores em $x = -1$ e $x = 1$ e um repulsor em $x = 0$ (que são as raízes da equação $F(x) = x - x^3$). Isto está em conformidade com as condições acima, já que para $x = -1$ temos que $x_1 = -1 < -\sqrt{\frac{1}{3}}$, e analogamente para $x = 1$, verificamos a condição $1 > \sqrt{\frac{1}{3}}$. Para $x = 0$, observamos que $-\sqrt{\frac{1}{3}} < 0 < \sqrt{\frac{1}{3}}$, o que confirma a natureza de repulsor deste ponto crítico.

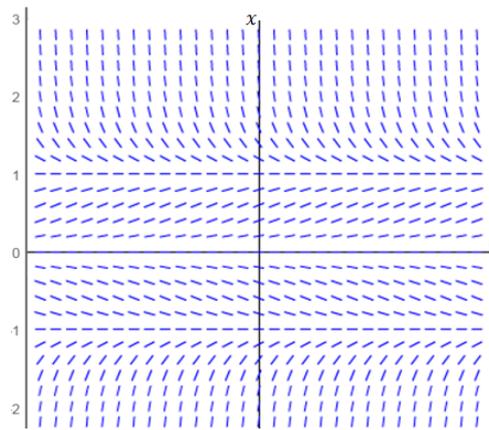


FIGURA 4: Campo de direções para a solução do caso particular $a = 1$ e $b = 0$

4 ANALISANDO O PARÂMETRO b EM FUNÇÃO DE $a > 0$

Devido a complexidade do caso $a > 0$, uma análise especial é necessária. Neste caso, poderá haver uma, duas ou três interseções de $y = F(x)$ com a reta $y = b$, já que b assume qualquer valor real, possibilidades representadas na figura 5.

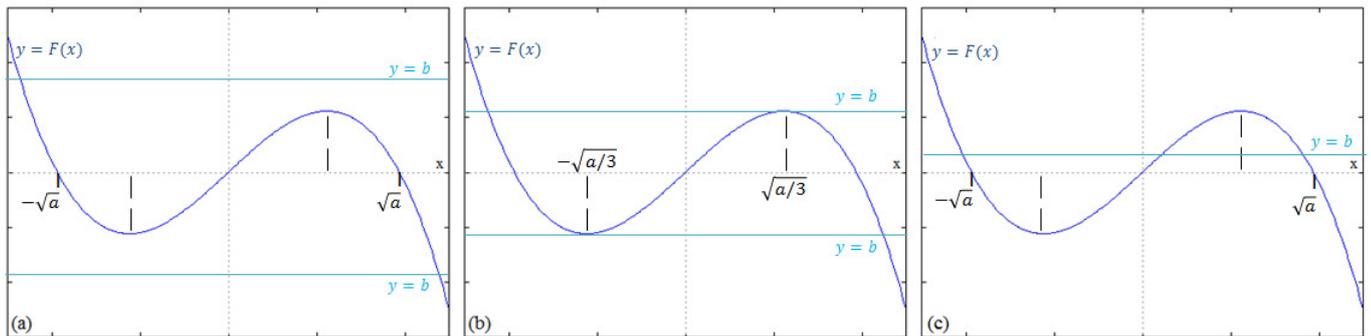


FIGURA 5: Interseções entre $y = b$ e $F(x)$ para $a > 0$ sob condições do (a) item 1., (b) item 2. e (c) item 3.

Então caso $a > 0$ temos:

1. **Se** $b < F(-\sqrt{\frac{a}{3}})$ **ou** $b > F(\sqrt{\frac{a}{3}})$, ou seja, se $|b| > 2(\frac{a}{3})^{\frac{3}{2}}$, também haverá um único ponto atrator, isto é, uma solução de equilíbrio estável.
2. **Se** $b = F(\pm\sqrt{\frac{a}{3}})$ haverá dois pontos críticos: um atrator e um de sela. O sinal, isto é, o fato de $y = b$ interceptar $F(x)$ no ponto de mínimo ou de máximo influenciará apenas na natureza do ponto de sela e se este será um valor de x menor ou maior que o ponto atrator. Caso $b = F(\sqrt{\frac{a}{3}}) = 2(\frac{a}{3})^{\frac{3}{2}}$, então o ponto de sela $x = \sqrt{\frac{a}{3}}$, que é o ponto de máximo será uma solução instável a esquerda (para valores de x menores que este ponto) e estável a direita, e o ponto atrator será $-2(\frac{a}{3})^{\frac{1}{2}}$ (valor obtido fatorando $f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b$, sabendo que $f_{a,b}$ é divisível por $(1 - \sqrt{\frac{a}{3}})$). Por outro lado caso $b = F(-\sqrt{\frac{a}{3}}) = -2(\frac{a}{3})^{\frac{3}{2}}$, o ponto de sela $x = -2(\frac{a}{3})^{\frac{3}{2}}$ será estável pela esquerda e instável pela direita, e o ponto atrator será $2(\frac{a}{3})^{\frac{1}{2}}$.
3. **Se** $F(-\sqrt{\frac{a}{3}}) < b < F(\sqrt{\frac{a}{3}})$, ou seja, se $|b| < 2(\frac{a}{3})^{\frac{3}{2}}$, haverá três pontos críticos x_1, x_2 e x_3 pois $b = F(x_1) = F(x_2) = F(x_3)$, pelo Teorema de Rolle percebemos que existe um ponto $x_{i,i+1}$ entre x_i e x_{i+1} tal que $F(x_{i,i+1}) = f(x_{i,i+1}) = 0$, com $i = 1, 2$. Temos que

$x_{1,2} = -\sqrt{\frac{a}{3}}$ e $x_{2,3} = \sqrt{\frac{a}{3}}$. E sem perda de generalidade:

$$x_1 < -\sqrt{\frac{a}{3}} < x_2 < \sqrt{\frac{a}{3}} < x_3.$$

Então x_1 e x_3 são atratores e x_2 é um repulsor. Para $b = 0$, por exemplo, $x = \pm\sqrt{a}$ são as soluções estáveis e $x = 0$ é a solução instável da EDO.

5 CONCLUSÕES

É possível representar a análise feita da dinâmica da EDO quando os parâmetros variam através do plano dos parâmetros a e b ilustrado na figura 6, que mostra as regiões de estabilidade e instabilidade, isto é, os valores dos parâmetros para os quais as soluções de equilíbrio da EDO são atratoras ou repulsoras, e quantas soluções de equilíbrio a EDO tem.

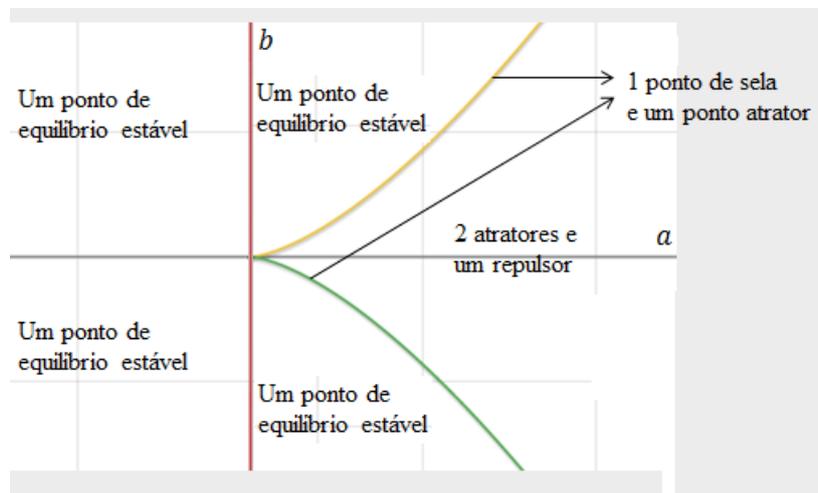


FIGURA 6: Plano dos parâmetros a e b e a estabilidade das soluções de equilíbrio da EDO

Outra representação importante obtida é o diagrama de bifurcação que mostra a localização das soluções de equilíbrio, como um conjunto de campo de direções obtidos variando b e considerando $a \leq 0$ ou $a > 0$ onde setas apontam para soluções de equilíbrio estáveis e afastam-se de instáveis (figura 7).

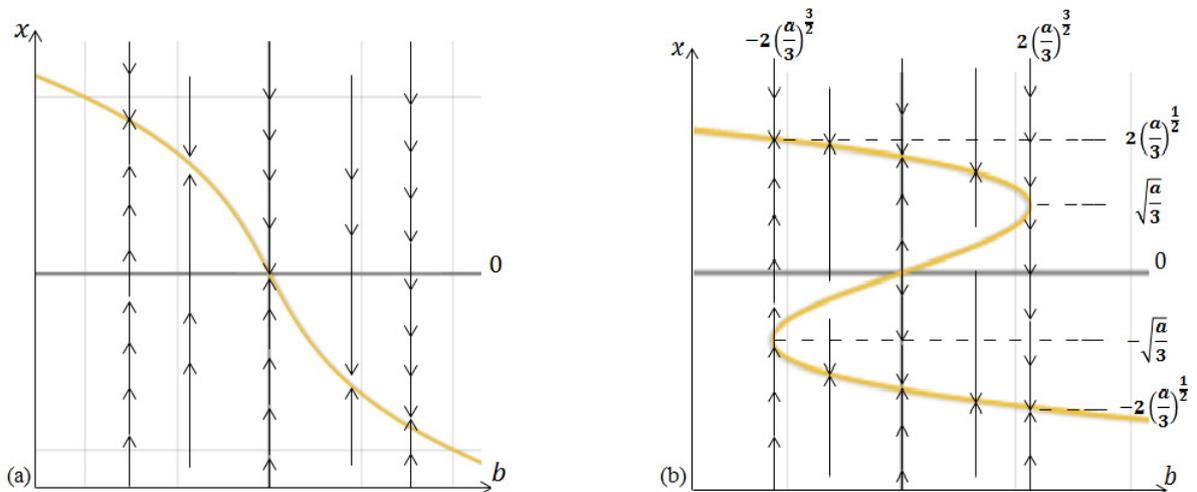


FIGURA 7: Diagrama de bifurcação para (a) $a \leq 0$ e (b) $a > 0$

Com estas representações toda o estudo é resumido e traduz de maneira satisfatória a dinâmica da família de equações $x' = f_{a,b}(x) = ax - x^3 - b$. Além disso, o conhecimento adquirido ao explorar essa EDO, traz importantes ferramentas e técnicas usadas para resolução qualitativa de EDO's mais complexas e aplicações muito importantes nas mais variadas áreas, em que geralmente, há muitos parâmetros influenciando na dinâmica dessas equações e as soluções quantitativas são extremamente complexas, veja por exemplo a referência [2].

REFERÊNCIAS

- [1] E. L. Lima, *Curso de Análise*. IMPA, 2004.
- [2] W. E. Boyce and R. C. DiPrima, *Equações Diferenciais Ordinárias e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, 2006.
- [3] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo*. LTC, 1987.
- [4] M. W. Hirsch, S. Smale, and R. L. Devaney, *Dynamical Systems and Introduction to Chaos*. Academic Press, 2004.