

# APLICAÇÕES DE EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS À ENGENHARIA CIVIL

**Laís Sousa Leão**

Universidade Federal de Uberlândia

[laah.sama@gmail.com](mailto:laah.sama@gmail.com)

**Luciana Aparecida Alves**

Universidade Federal de Uberlândia

[lualves@famat.ufu.br](mailto:lualves@famat.ufu.br)

## RESUMO

Um dos desastres mais memoráveis da história da engenharia civil é a queda da ponte de Tacoma, ocorrida em novembro de 1940. A ponte não era dotada de um formato aerodinâmico, pois tinha sólidas vigas que dificultavam a passagem de ar e acarretavam a formação de vórtices, que se desprendiam periodicamente do tabuleiro da ponte provocando áreas tracionadas e comprimidas no mesmo. Inicialmente, ocorreu um instável movimento vertical, que depois converteu-se em torção e, por fim, culminou na ruína da ponte. Este artigo visa modelar qualitativamente o movimento vertical da ponte por meio do uso de equações diferenciais ordinárias, bem como explicar porque ele foi determinante para o surgimento do movimento de torção e, conseqüentemente, para a queda da ponte.

## ABSTRACT

One of the most memorable disasters of civil engineering history is the fall of the Tacoma bridge, which occurred in November 1940. The bridge was not equipped with an aerodynamic shape, since it had solid beams that hindered the air passage and entailed the formation of vortices which came off periodically of the bridge deck causing tensioned areas and compressed therein. Initially, it occurred an unstable vertical movement, which became in twisting motion and, ultimately, resulted in destruction of the bridge. This article aims to model qualitatively the bridge vertical motion through the use of ordinary differential equations and explain why he was crucial for the appearance of the twisting motion, and consequently the collapse of the bridge.

**Palavras-chave:** ponte de Tacoma, equações diferenciais ordinárias, movimento vertical, torção.

## 1 INTRODUÇÃO

Pontes são construções destinadas à continuação de uma via superando um obstáculo, que normalmente é um corpo d'água. Costumam ser obras de engenharia muito caras e o tipo a ser construído depende de vários fatores, tais como estética, custo de construção e manutenção, vibrações, deformações e tipo de esforço atuante. Um dos quesitos determinantes na análise estrutural de uma ponte é a estética, devido ao impacto visual causado no ambiente. Todavia, há outros de suma importância que devem ser considerados cuidadosamente, como o custo e a segurança, conforme [1]. Casos onde o custo

é supervalorizado em relação à segurança levam a desastres, como o caso da Ponte de Tacoma.

A ponte de Tacoma (Tacoma Narrows Bridge) foi construída para atender fins militares e econômicos. Sua inauguração foi no dia primeiro de julho de 1940 e, desde os primeiros dias de funcionamento, apresentou um estranho movimento, denominado galope, definido como vibrações aproximadamente perpendiculares à ação do vento ocasionadas principalmente pelo amortecimento dinâmico negativo, mas sem torção (veja [2]). A ponte já apresentava ondulações verticais com ventos de 5 km/h e, frequentemente, uma das extremidades do vão central deslocava-se em relação à outra, em um movimento onde a diferença de altura entre as duas extremidades variava de 60 cm a 1,5 m. Alguns esforços foram feitos para estabilizá-la, entretanto, em 07 de novembro de 1940, ela entrou em colapso devido ao desprendimento de vórtices causado pela velocidade crítica do vento e o conseqüente drapejamento de torção do tabuleiro (veja [3]).

## 2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS ORDINÁRIAS

**Definição 2.1:** Dada uma aplicação  $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida em cada ponto  $(t, x)$  de um aberto  $U$  de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{n+1}$ , diz-se que

$$x' = f(t, x)$$

é a **equação diferencial ordinária** em  $\mathbb{R}^n$  definida por  $f$ .

As equações diferenciais podem ser classificadas segundo tipo, ordem e linearidade, descritos a seguir:

### Tipo: Ordinárias ou Parciais

Em uma equação diferencial ordinária há apenas uma variável independente e aparecem na equação apenas derivadas simples. São exemplos de equações diferenciais ordinárias:

- $y'(x) = x + 5$ ,
- $\frac{dx}{dt} = tx^2$ .

Se a equação depende de várias variáveis independentes entre si e aparecem na equação derivadas parciais, então ela é uma *equação diferencial parcial*. São exemplos de equações diferenciais parciais:

- $\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{\partial u}{\partial t}(x, t)$ ,
- $x \frac{\partial u}{\partial x} - y \frac{\partial u}{\partial y} = \text{sen}(xy)$ .

### Ordem

A ordem de uma equação diferencial corresponde à ordem da mais alta derivada que nela aparece.

Por exemplo,  $y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t)$  é uma equação de segunda ordem, em que  $p(t)$  e  $q(t)$  são funções reais. Já  $y''' + 2(y'')^2 + y' = \cos x$  é uma equação de terceira ordem.

Uma equação diferencial é dita **linear** se tem a forma

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = Q, \quad (1)$$

onde  $P_0 \neq 0$  e  $P_1, P_2, \dots, P_n, Q$  são funções de  $x$  ou constantes.

Se  $Q = 0$ , (1) toma a forma

$$P_0 \frac{d^n y}{dx^n} + P_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + P_2 \frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \dots + P_{n-1} \frac{dy}{dx} + P_n y = 0, \quad (2)$$

e a equação diferencial é denominada **homogênea**.

Uma **solução** de uma EDO é uma função  $y(x)$  cujas derivadas satisfazem a equação. Não é garantido que tal função exista e, caso exista, normalmente ela não é única.

**Definição 2.2:** *Uma solução de uma equação diferencial ordinária no intervalo  $\alpha < t < \beta$  é uma função  $\varphi$  tal que  $\varphi', \varphi'', \varphi''', \dots, \varphi^n$  existam e satisfaçam*

$$\varphi^{(n)}(t) = f(t, \varphi(t), \varphi'(t), \dots, \varphi^{(n-1)}(t))$$

para todo  $t \in (\alpha, \beta)$ .

## 2.1 RESULTADOS E PROPRIEDADES DAS EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Neste trabalho, consideraremos equações lineares de segunda ordem da seguinte maneira

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \quad (3)$$

onde  $p$ ,  $q$  e  $g$  são funções contínuas em um intervalo aberto  $I$ . Levaremos em conta o teorema a seguir, denominado *teorema de existência e unicidade*, que garante a existência de solução em todo o intervalo.

**Teorema 2.3:** *Considere o problema de valor inicial*

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t) \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0 \end{cases} \quad (4)$$

onde  $p, q$  e  $g$  são contínuas em um intervalo aberto  $I$ . Então, existe exatamente uma única solução  $y = \varphi(t)$  desse problema e a solução existe em todo o intervalo  $I$ .

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [4], no capítulo Equações Lineares de Segunda Ordem.

Supondo que  $g(t) = 0$ , para todo  $t \in I$ , considere a equação linear homogênea associada à equação (3):

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0. \quad (5)$$

A proposição seguinte afirma que, para equações desse tipo, a combinação linear de soluções de (5) ainda é solução.

**Proposição 2.4:** *(Princípio da superposição) Se  $y_1$  e  $y_2$  são soluções da equação diferencial (5), então a combinação linear  $c_1 y_1 + c_2 y_2$  também é solução, quaisquer que sejam os valores das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , que devem ser constantes reais.*

### Demonstração

Para provar esse resultado, basta substituir  $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$  na equação (5). ■

Observe que, quando  $c_1$  ou  $c_2$  é igual a zero, tem-se um caso particular da Proposição 2.4, ou seja, qualquer múltiplo de uma solução da equação (5) também é solução. Além disso, esse resultado ainda diz que, começando com apenas duas soluções da equação (5), pode-se construir uma família duplamente infinita de soluções da referida equação. Se for necessário encontrar  $c_1$  e  $c_2$  de modo que a solução satisfaça as condições iniciais dadas em (4), ou seja,  $y(t_0) = y_0$  e  $y'(t_0) = y'_0$ , então  $c_1$  e  $c_2$  devem satisfazer

$$\begin{aligned} c_1 y_1(t_0) + c_2 y_2(t_0) &= y_0, \\ c_1 y'_1(t_0) + c_2 y'_2(t_0) &= y'_0. \end{aligned} \tag{6}$$

Resolvendo (6) para  $c_1$  e  $c_2$ , encontramos, em termos de determinantes,

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} y_0 & y_2(t_0) \\ y_1 & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_0 \\ y'_1(t_0) & y_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix}}. \tag{7}$$

Para que as fórmulas de  $c_1$  e  $c_2$  na equação(7) façam sentido, é preciso que os denominadores sejam diferentes de zero. Ou seja,

$$W = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y'_1(t_0) & y'_2(t_0) \end{vmatrix} = y_1(t_0)y'_2(t_0) - y'_1(t_0)y_2(t_0). \tag{8}$$

O determinante  $W$  é o *wronskiano* das soluções  $y_1$  e  $y_2$ . Algumas vezes é usada a notação completa  $W(y_1, y_2)(t_0)$  para a expressão à direita na equação (8), enfatizando desse modo o fato de que o wronskiano depende apenas das funções  $y_1$  e  $y_2$  e que é calculado no ponto  $t_0$ .

Com isto, temos claramente o seguinte resultado.

**Proposição 2.5:** *Suponha que  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções de (5) e que o wronskiano  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ , onde são dadas as condições iniciais enunciadas anteriormente por (4). Então, existe uma única escolha das constantes  $c_1$  e  $c_2$  para as quais  $y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$  satisfaz a equação diferencial (5) e as condições iniciais (4).*

Note que se  $W \neq 0$  para todos os valores de  $t$ , as funções  $y_1$  e  $y_2$  podem ser usadas para se construir soluções da equação diferencial dada junto com quaisquer condições iniciais prescritas para qualquer valor de  $t$ .

**Teorema 2.6:** *Se  $y_1$  e  $y_2$  são duas soluções da equação (5) e existe um ponto  $t_0$  onde  $W \neq 0$ , então a família de soluções*

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$$

*com coeficientes arbitrários  $c_1$  e  $c_2$  inclui todas as soluções de (5).*

### Demonstração

Seja  $\varphi$  uma solução qualquer de (5). Para provar o teorema, é preciso mostrar que  $\varphi$  está incluída no conjunto de combinações  $c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$ , isto é, para alguma escolha das constantes  $c_1$  e  $c_2$ , a combinação linear é igual a  $\varphi$ .

Considere  $t_0$  o ponto onde o wronskiano de  $y_1$  e  $y_2$  é diferente de zero. Calcule  $\varphi$  e  $\varphi'$  nesse ponto e chame esses valores de  $y_0$  e  $y_1$ , respectivamente. Assim,

$$y_0 = \varphi(t_0), y_1 = \varphi'(t_0).$$

A seguir, considere o problema de valor inicial

$$\begin{cases} y'' + p(t)y' + q(t)y = g(t), \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y_1. \end{cases}$$

Observe que  $\varphi$  é, certamente, solução desse problema de valor inicial. Por outro lado, como  $W \neq 0$  em  $t_0$ , é possível, pela Proposição 2.5, escolher  $c_1$  e  $c_2$  tais que  $y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$  também seja uma solução. A unicidade garantida pela Proposição 2.5 garante que essas duas soluções do mesmo problema são iguais. Assim, para uma escolha apropriada de  $c_1$  e  $c_2$ ,

$$\varphi(t) = c_1y_1(t) + c_2y_2(t),$$

e, portanto,  $\varphi$  está incluída na família de funções  $c_1y_1 + c_2y_2$ . Finalmente, como  $\varphi$  é uma solução arbitrária de (5), segue que toda solução dessa equação está incluída nessa família. Isso completa a demonstração. ■

O Teorema 2.6 afirma que, enquanto  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ , a combinação linear  $c_1y_1 + c_2y_2$  contém todas as soluções de (5). Assim, chamamos

$$y = c_1y_1(t) + c_2y_2(t)$$

com coeficientes arbitrários, de *solução geral* de (5). As soluções  $y_1$  e  $y_2$ , com  $W(y_1, y_2)(t_0) \neq 0$ , formam um *conjunto fundamental de soluções* de (5).

**Teorema 2.7:** *Considere a equação diferencial (5), cujos coeficientes  $p$  e  $q$  são contínuos em algum intervalo aberto  $I$ . Escolha algum ponto  $t_0$  em  $I$ . Seja  $y_1$  a solução de (5) que satisfaz as condições iniciais*

$$y(t_0) = 1, y'(t_0) = 0$$

e,  $y_2$  a solução da equação (5) que satisfaz,

$$y(t_0) = 0, y'(t_0) = 1.$$

Então  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções.

### Demonstração

Observe que, em primeiro lugar, a existência das funções  $y_1$  e  $y_2$  é garantida pelo Teorema 2.3. Para mostrar que elas formam um conjunto fundamental de soluções, precisamos apenas calcular seu wronskiano em  $t_0$ :

$$W(y_1, y_2)(t_0) = \begin{vmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1'(t_0) & y_2'(t_0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1.$$

Como seu wronskiano não é nulo em  $t_0$ , as funções  $y_1$  e  $y_2$  formam, de fato, um conjunto fundamental de soluções, completando assim, a prova do teorema. ■

## 2.2 EQUAÇÕES LINEARES DE SEGUNDA ORDEM

Para o estudo do movimento da ponte de Tacoma, precisaremos apenas das equações diferenciais de segunda ordem. Assim, esta seção destina-se a analisar a solução dessas equações. Considere, então, a seguinte equação linear de segunda ordem:

$$P_0(t) \frac{d^2y}{dt^2} + P_1(t) \frac{dy}{dt} + P_2(t)y = Q(t). \quad (9)$$

Analisando o caso em que essa equação é homogênea, ou seja,  $Q(t) = 0$  e que as funções  $P_0$ ,  $P_1$  e  $P_2$  são constantes, (9) torna-se

$$ay'' + by' + cy = 0, \quad (10)$$

onde os coeficientes  $a, b$  e  $c$  são reais e arbitrários, com  $a \neq 0$ . Procurando uma solução exponencial para (10), suponha que ela seja da forma  $y = e^{rt}$ , onde  $r$  é um parâmetro a ser determinado. Segue então que  $y' = re^{rt}$  e  $y'' = r^2e^{rt}$ . Substituindo  $y, y'$  e  $y''$  em (10), obtém-se

$$(ar^2 + br + c)e^{rt} = 0.$$

Como  $e^{rt} \neq 0$ ,

$$ar^2 + br + c = 0. \quad (11)$$

A equação (11) é chamada de *equação característica* da equação diferencial (10). Como (11) é uma equação de segundo grau com coeficientes reais, ela tem duas raízes que podem ser reais e distintas, reais e iguais ou complexas conjugadas. Vamos proceder à análise de cada caso.

### Raízes Reais

Suponha que as raízes da equação característica (11) sejam reais, distintas e denotadas por  $r_1$  e  $r_2$ . Então,

$$y_1(t) = e^{r_1 t}, \quad y_2(t) = e^{r_2 t}$$

são soluções da equação (11). Portanto, pela Proposição 2.4, segue que a combinação linear das mesmas também é solução. Assim,

$$y = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} \quad (12)$$

é uma solução de (11). Agora, para encontrar as constantes  $c_1$  e  $c_2$ , avaliemos (12) nas condições iniciais

$$y(t_0) = y_0, \quad y'(t_0) = y'_0.$$

Fazendo  $t = t_0$  e  $y = y_0$  em (12), tem-se que

$$c_1 e^{r_1 t_0} + c_2 e^{r_2 t_0} = y_0. \quad (13)$$

Analogamente, fazendo  $t = t_0$  e  $y' = y'_0$  em  $y' = c_1 r_1 e^{r_1 t} + c_2 r_2 e^{r_2 t}$ , obtém-se que

$$c_1 r_1 e^{r_1 t_0} + c_2 r_2 e^{r_2 t_0} = y'_0. \quad (14)$$

Resolvendo simultaneamente (13) e (14) para  $c_1$  e  $c_2$ , encontra-se

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{y'_0 - y_0 r_2}{r_1 - r_2} e^{-r_1 t_0}, \\ c_2 &= \frac{y_0 r_1 - y'_0}{r_1 - r_2} e^{-r_2 t_0}. \end{aligned} \quad (15)$$

Como  $r_1 - r_2 \neq 0$ , as equações em (15) sempre fazem sentido. Independentemente dos valores de  $t_0, y_0$  e  $y'_0$  dados, sempre é possível determinar  $c_1$  e  $c_2$  de modo que as condições iniciais sejam atendidas e, pelo teorema da existência e unicidade, há apenas uma escolha possível de  $c_1$  e  $c_2$  para cada conjunto dado de condições iniciais. Com os valores de  $c_1$  e  $c_2$  dados por (15), a expressão (12) é a solução do problema de valor inicial

$$\begin{cases} ay'' + by' + cy = 0 \\ y(t_0) = y_0, y'(t_0) = y'_0. \end{cases}$$

### Raízes complexas

Suponha agora que  $\Delta = b^2 - 4ac$  seja negativo. Então, as raízes da equação (11) são números complexos conjugados, que serão denotadas por

$$r_1 = \lambda + i\mu, r_2 = \lambda - i\mu, \quad (16)$$

onde  $\lambda$  e  $\mu$  são números reais. As expressões correspondentes para  $y$  são

$$y_1(t) = \exp[(\lambda + i\mu)t], y_2(t) = \exp[(\lambda - i\mu)t]. \quad (17)$$

Para que as expressões descritas em (17) façam sentido, é preciso definir a função exponencial complexa. É interessante que a definição se reduza à função exponencial real habitual quando o expoente for real.

Lembrando que o cálculo da série de Taylor para  $e^t$  em torno de  $t = 0$  é dado por

$$e^t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!}, t \in \mathbb{R}. \quad (18)$$

Supondo que  $t$  pode ser substituída por  $it$  na equação (18), obtém-se

$$e^{it} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n t^{2n}}{2n!} + i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} t^{2n-1}}{(2n-1)!}, \quad (19)$$

onde a soma foi separada em duas partes, real e imaginária, usando o fato que  $i^{2n} = (-1)^n$  e  $i^{2n+1} = (-1)^n i$ , para  $n \geq 0$ , onde  $n$  é um número natural. A primeira série na equação (19) é a série de Taylor para  $(\cos t)$  em torno de  $t = 0$  e a outra é a série de Taylor para  $\sin t$  em torno de  $t = 0$ . Portanto,

$$e^{it} = \cos t + i \sin t. \quad (20)$$

A equação (20) é conhecida como **fórmula de Euler**. Mesmo que a dedução da equação (20) esteja baseada na hipótese não verificada de que a série (18) pode ser usada para números complexos da mesma forma que para números reais da variável independente, a equação (20) será adotada como definição de  $e^{it}$ .

No nosso caso, deseja-se estender a definição de exponencial complexa para expoentes complexos arbitrários da forma  $(\lambda + i\mu)t$ . Como é interessante que as propriedades usuais da função exponencial continuem válidas para expoentes complexos, então deseja-se que  $e^{(\lambda+i\mu)t}$  satisfaça

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} e^{i\mu t}. \quad (21)$$

Usando a equação (20), obtém-se

$$e^{(\lambda+i\mu)t} = e^{\lambda t} (\cos \mu t + i \sin \mu t) = e^{\lambda t} \cos \mu t + i e^{\lambda t} \sin \mu t \quad (22)$$

Com as definições (20) e (22), afirmamos que as regras de exponenciação são válidas para a função exponencial complexa e que a fórmula de diferenciação

$$\frac{d}{dt}(e^{rt}) = r e^{rt}$$

é válida para valores complexos de  $r$ .

As funções  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , dadas por(17), com o significado expresso pela equação (22), são soluções de (10) quando as raízes da equação característica são números complexos  $\lambda \pm i\mu$ . As soluções dadas por  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$  são funções com valores complexos e são preferíveis soluções com valores reais, uma vez que a própria equação diferencial possui apenas valores reais. Dessa forma, pode-se usar o Teorema 2.4 para encontrá-las. Fazendo a soma e a diferença de  $y_1(t)$  e  $y_2(t)$ , temos

$$\begin{aligned} y_1(t) + y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) + e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) = 2e^{\lambda t}(\cos \mu t), \\ y_1(t) - y_2(t) &= e^{\lambda t}(\cos \mu t + i \operatorname{sen} \mu t) - e^{\lambda t}(\cos \mu t - i \operatorname{sen} \mu t) = 2ie^{\lambda t}(\operatorname{sen} \mu t). \end{aligned}$$

Desprezando os fatores constantes 2 e  $2i$ , obtem-se um par de soluções reais

$$u(t) = e^{\lambda t}(\cos \mu t), v(t) = e^{\lambda t}(\operatorname{sen} \mu t).$$

Note que  $u$  e  $v$  são simplesmente as partes real e imaginária, respectivamente, de  $y_1$  e  $y_2$ . Observe ainda que  $W(u, v)(t) = \mu e^{2\lambda t}$ , ou seja, desde que  $\mu \neq 0$ , o wronskiano  $W$  não é nulo, de modo que  $u$  e  $v$  formam um conjunto fundamental de soluções. Se  $\mu = 0$ , as raízes são reais e iguais, portanto a discussão dessa seção não se aplica a esse caso. Em consequência, se as raízes da equação característica são números complexos  $\lambda \pm i\mu$ , com  $\mu \neq 0$ , então a solução geral da equação (10) é

$$y = c_1 e^{\lambda t} \cos \mu t + c_2 e^{\lambda t} \operatorname{sen} \mu t, \quad (23)$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes arbitrárias.

### Raízes repetidas

Será analisada a possibilidade das duas raízes,  $r_1$  e  $r_2$ , serem iguais, que ocorre quando o discriminante  $\Delta = b^2 - 4ac = 0$ . Então, segue da fórmula de Bhaskara que

$$r_1 = r_2 = -\frac{b}{2a}. \quad (24)$$

Ambas as raízes geram a mesma solução da equação (10), a saber,

$$y_1(t) = \exp\left(-\frac{bt}{2a}\right), \quad (25)$$

e, neste caso, não é fácil encontrar diretamente uma segunda solução. O método mostrado nessa seção é o descoberto por D'Alembert no século XVIII e usaremos o fato de que, se  $y_1(t)$  é uma solução de (10), então  $cy_1(t)$  também o é para qualquer constante  $c$ . Essa observação será generalizada substituindo-se  $c$  por  $v(t)$  e depois determinando  $v(t)$  de modo que o produto  $v(t)y_1(t)$  seja solução da equação (10).

Suponha que

$$y = v(t)y_1(t) = v(t)e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (26)$$

e, substituindo na equação (10) para determinar  $v(t)$ , tem-se

$$y' = e^{-\frac{bt}{2a}} \left( v'(t) - \frac{b}{2a} v(t) \right) \quad (27)$$

e

$$y'' = e^{-\frac{bt}{2a}} \left( v''(t) - \frac{b}{a} v'(t) + \frac{b^2}{4a^2} v(t) \right). \quad (28)$$



Substituindo na equação (10),

$$\left[ a \left( v''(t) - \frac{b}{a} v'(t) + \frac{b^2}{4a^2} v(t) \right) + b \left( v'(t) - \frac{b}{2a} v(t) \right) + cv(t) \right] e^{-\frac{bt}{2a}} = 0. \quad (29)$$

Como  $ce^{-\frac{bt}{2a}}$  nunca se anula, pode-se desconsiderá-la; ao reorganizar os termos restantes, obtem-se

$$av''(t) + \left( \frac{b^2}{4a} - \frac{b^2}{2a} + c \right) v(t) = 0. \quad (30)$$

Como a parcela envolvendo  $v'(t)$  é nula e o coeficiente de  $v(t)$ ,  $c - \frac{b^2}{4a}$  também é zero, (30) se reduz a

$$v''(t) = 0,$$

logo,

$$v(t) = c_1 t + c_2.$$

Portanto, de (26) tem-se

$$y = c_1 t e^{-\frac{bt}{2a}} + c_2 e^{-\frac{bt}{2a}} \quad (31)$$

Note que  $y$  é uma combinação linear de duas soluções

$$y_1(t) = e^{-\frac{bt}{2a}}, y_2(t) = t e^{-\frac{bt}{2a}}. \quad (32)$$

O wronskiano dessas duas soluções é

$$W(y_1, y_2)(t) = e^{-\frac{bt}{a}}. \quad (33)$$

Como  $W(y_1, y_2)(t)$  nunca se anula, as soluções  $y_1$  e  $y_2$  dadas por (32) formam um conjunto fundamental de soluções. Além disso, (31) é a solução geral de (10) quando as raízes da equação característica são iguais.

Agora, voltemos ao caso não homogêneo da equação (9). A solução geral de qualquer equação não homogênea de segunda ordem pode ser obtida a partir de duas soluções linearmente independentes da sua parte homogênea.

**Teorema 2.8:** *Considerando a equação (9) e supondo que  $P_1, P_2, P_3$  e  $Q$  sejam funções contínuas, tem-se que qualquer solução  $y$  desta equação é da forma*

$$y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) + \varphi(t),$$

onde  $c_1$  e  $c_2$  são constantes,  $y_1$  e  $y_2$  formam um conjunto fundamental de soluções para a parte homogênea e  $\varphi$  é uma solução particular de (9).

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [4], no capítulo Equações Lineares de Segunda Ordem.

Há diversos métodos para se obter a solução particular da equação não homogênea. O descrito aqui é o método dos coeficientes indeterminados. Tal método só funciona para as funções  $Q$  da equação (9) que assumem a forma constante, polinomial, exponencial, seno, cosseno ou soma e produto destas funções. Para obter a solução basta seguir duas regras:

1. Se  $Q(t)$  possui forma pertencente à coluna da esquerda da tabela ou se pode ser obtida por meio de soma e produto, a solução particular da forma correspondente está na coluna da direita da tabela.

TABELA 1: Esquema de soluções para o método dos coeficientes indeterminados

$r(t)$	Solução a experimentar
$\alpha e^{\beta t}$	$\alpha e^{\beta t}$
$\alpha \cos \omega t + \beta \operatorname{sen} \omega t$	$a \cos \omega t + b \operatorname{sen} \omega t$
$\alpha (\neq 0)$	<b>a</b>
$\alpha + \beta t$	$a + bt$
$\alpha + \beta t + \gamma t^2$	$a + bt + ct^2$
$\alpha + \beta t + \gamma t^2 + \delta t^3$	$a + bt + ct^2 + dt^3$
$\vdots$	$\vdots$

2. Se  $Q(t)$  contém termos que duplicam qualquer solução da equação homogênea, então cada um de tais termos deve ser multiplicado por  $t^n$ ,  $n$  é o menor número natural que elimina a duplicação.

**Exemplo 2.9:** Resolva o problema de valor inicial  $x'' = -x + 2t + 6 \cos t$ ;  $x(0) = 0$ ;  $x'(0) = 1$ .

**Solução:** A equação homogênea correspondente é  $x'' + x = 0$  e a solução geral é  $c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t$ . Logo, de acordo com a tabela,  $r(t) = 2t + 6 \cos t$ . Todavia, a solução da equação homogênea já inclui  $\cos t$ , então é preciso analisar uma solução particular da forma

$$\varphi(t) = at \cos t + bt \operatorname{sen} t + c + d,$$

onde  $a, b, c, d$  são constantes a ser determinadas. Substituindo  $\varphi(t)$  e  $\varphi''(t) = (2b - at) \cos t - (2a + bt) \operatorname{sen} t$  na equação dada, obtém-se

$$c + (d - 2)t + 2(b - 3) \cos t - 2a \operatorname{sen} t = 0,$$

que resolvida retorna  $a = 0, b = 3, c = 0, d = 2$ . Assim, uma solução particular é dada por  $\varphi(t) = 2t + 3t \operatorname{sen} t$  e sua solução geral é dada por

$$x(t) = c_1 \cos t + c_2 \operatorname{sen} t + 2t + 3t \operatorname{sen} t.$$

A solução  $\phi$  do problema de valor inicial é dada usando as condições iniciais e obtendo-se  $1 = x(0) = c_1$  e  $1 = x'(0) = c_2 + 2$ . Daí,  $c_1 = 1, c_2 = -1$  e

$$\phi(t) = \cos t + (3t - 1) \operatorname{sen} t + 2t.$$

### 3 OSCILADORES HARMÔNICOS

Alguns tipos de osciladores harmônicos podem ser modelados por equações diferenciais de segunda ordem. Existem dois casos a serem analisados: *osciladores amortecidos por uma forma de resistência* e *osciladores não amortecidos que sofrem perturbações de forças externas periódicas*. Para o caso de osciladores amortecidos, considere um sistema massa-mola na posição de equilíbrio sem um peso e depois com um bloco pendurado na extremidade da mola, como mostra a figura a seguir:

O diagrama de corpo livre do bloco indica que, compensando a força peso do bloco há a força restauradora da mola e uma força de atrito. Sendo  $k > 0$  a constante elástica da mola, temos que equilibrando as forças na vertical, concluímos que

$$\sum y = 0 \Rightarrow -ky + mg = 0 \Rightarrow k = \frac{mg}{y}. \tag{34}$$

Assim, encontramos a constante elástica da mola  $k$ .

Considerando que essa definição pode ser estendida para qualquer material que obedeça à Lei de Hooke, considere as seguintes afirmações:

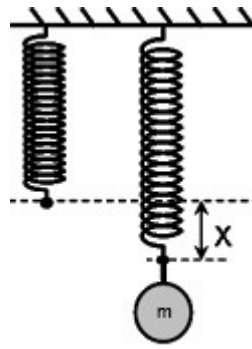


FIGURA 1: Sistema massa-mola. Fonte: [5].

I Se  $y < 0$ , a situação está abaixo do equilíbrio;

II Se  $y > 0$ , a situação está acima do equilíbrio;

III A força de resistência devido ao atrito interno é proporcional à velocidade do movimento, ou seja,  $F_a = -vy'$ ,  $v > 0$ , é o coeficiente de amortecimento.

Assim,

$$\begin{aligned} F_{\text{peso}} &= F_{\text{restauradora}} + F_{\text{atrito}} \\ ma &= -ky - vy'. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{k}{m}y - \frac{v}{m}\frac{dy}{dt} \quad (35)$$

é a equação do movimento de um oscilador amortecido.

As raízes de (35) são dadas por  $r_{1,2} = \frac{v}{2m} \left( -1 \pm \sqrt{\Delta} \right)$ , onde  $\Delta = 1 - \frac{4km}{v^2}$ .

Há três casos a serem analisados:

- $\Delta > 0$ : o coeficiente de amortecimento é grande e o movimento é denominado *sobreamortecido*. A solução geral é expressa por

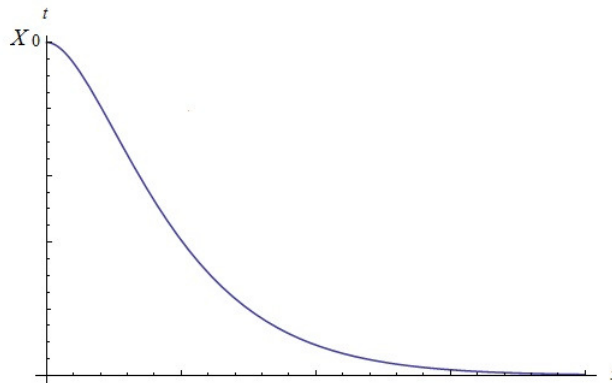
$$y(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t},$$

e como  $-1 \pm \sqrt{\Delta} < 0$  (pois  $0 < \Delta < 1$ ),  $r_1$  e  $r_2$  são negativas e, assim,  $y \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

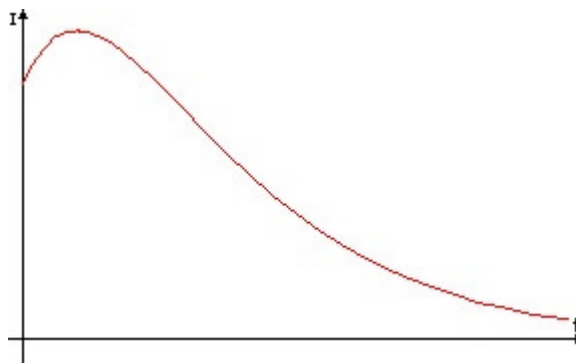
- $\Delta = 0$ : nesse caso, o movimento é denominado *criticamente amortecido* e  $v^2 = 4km$ . As raízes são  $r_1 = r_2 = \frac{v}{2m}$  e a solução geral é dada por

$$y(t) = (c_1 + c_2 t) \exp\left(\frac{-vt}{2m}\right),$$

uma função não periódica que tende a zero quando  $t \rightarrow \infty$  (sem oscilações).



**FIGURA 2:** Gráfico do movimento de um oscilador sobreamortecido. Fonte: <http://fis26-maxwell.blogspot.com.br/2013/04/questao-faca-o-grafico-da-expressao-da.html>



**FIGURA 3:** Gráfico do movimento de um oscilador criticamente amortecido. Fonte: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Circuito\\_RLC#mediaviewer/File:RLC\\_-\\_serial\\_-\\_Critical\\_Damping.PNG](http://pt.wikipedia.org/wiki/Circuito_RLC#mediaviewer/File:RLC_-_serial_-_Critical_Damping.PNG)

- $\Delta < 0$ : nesse caso, o movimento é denominado *subamortecido*. As raízes são dadas por  $r_{1,2} = \left( \frac{-v \pm i\sqrt{4km - v^2}}{2m} \right)$  e a solução geral é

$$y(t) = \exp\left(\frac{-vt}{2m}\right) \left( c_1 \operatorname{sen} \frac{\sqrt{4km - v^2}}{2m} t + c_2 \cos \frac{\sqrt{4km - v^2}}{2m} t \right),$$

ou seja, o movimento não é periódico, mas é oscilatório e,  $x \rightarrow 0$  quando  $t \rightarrow \infty$ .

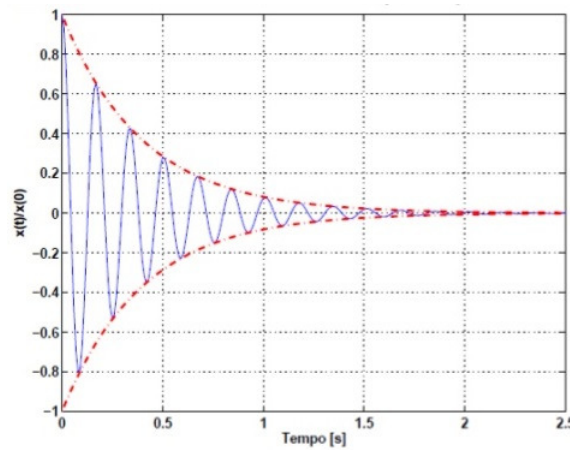
### 3.1 APLICAÇÃO: MOVIMENTO VERTICAL DA PONTE DE TACOMA

O modelo do movimento vertical da ponte de Tacoma é uma variação de (??), dado por

$$\frac{d^2y}{dt^2} = -b \frac{dy}{dt} - cy + w(t), \tag{36}$$

onde

- $w$ : função que modela a força do vento;
- $b > 0$ : coeficiente de amortecimento;
- $c = \begin{cases} \delta + g, & y < 0 \\ g, & y > 0 \end{cases}$  : medida da resistência dos cabos (note que se  $x < 0$ , a ponte está acima do equilíbrio, logo os cabos não estão tracionados e não possuem resistência).



**FIGURA 4:** Gráfico do movimento de um oscilador subamortecido. Fonte: <http://image.slidesharecdn.com/4-sistemascomumgraudeliberdade-111222061007-phpapp01/95/4-sistemas-com-um-grau-de-liberdade-11-728.jpg?cb=1324556512>

A equação obtida no modelo é homogênea, linear e de ordem 2. Dessa forma, tal equação pode ser resolvida analiticamente. A solução é dada por

$$y(t) = e^{-\frac{bt}{2}} (c_1 \text{sen}(\beta t) + c_2 \text{cos}(\beta t))$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \frac{\sqrt{|b^2 - 4(\delta + g)|}}{2}, & x < 0 \\ \frac{\sqrt{|b^2 - 4g|}}{2}, & x \geq 0. \end{cases} \tag{37}$$

A forma da solução assemelha-se a uma soma de cossenos. Assim, para facilitar a análise do sinal de  $y$  em relação a  $t$ , pode-se reescrever (37) como

$$y(t) = Ae^{-\frac{bt}{2}} \text{cos}(\beta t - \gamma) \tag{38}$$

onde  $A = \sqrt{c_1^2 + c_2^2}$  e  $\text{tg}\gamma = \frac{c_1}{c_2}$ . Assim, basta analisar o sinal de  $\text{cos}(\beta t - \gamma)$  para obter o sinal de  $y$ . Como o movimento da ponte é vertical e o eixo de referência é o tabuleiro, temos que quando a ponte está em equilíbrio,  $-\frac{\pi}{2} \leq \text{cos}(\beta t - \gamma) \leq \frac{3\pi}{2}$ .

Não é lógico afirmar que  $w(t)$  é uma função constante, pois cada rajada de vento incide sobre a ponte com ângulo, intensidade e duração diferentes, modificando os coeficientes da equação do modelo. Assim, não é possível determinar exatamente a amplitude das oscilações do tabuleiro da ponte a cada rajada.

## 4 CONCLUSÃO

Com base nos resultados acima, é possível concluir que, embora o modelo não permita descrever de forma quantitativa a amplitude das oscilações, é evidente que a cada rajada a ponte oscila até que volte ao repouso. Se há ventos fortes e contínuos, tais como os registrados no Estreito de Tacoma no dia da queda da ponte (61,14 km/h registrados às 7:30 h e 67,58 km/h às 9:30 h, segundo [6], a amplitude das oscilações aumenta de forma significativa e irregular, podendo provocar a ruptura de um dos elementos de sustentação da ponte. No caso de Tacoma, a flexão excessiva fez um dos cabos do vão central se romper, desestabilizando o movimento vertical e possibilitando a conversão em torção, até causar a queda da ponte.

## REFERÊNCIAS

- [1] M. Debs and T. Takeya, “Introdução às pontes de concreto.” <http://goo.gl/EIDhK8>. Acesso em: 19 abr 2014.
- [2] E. Kreis, *ANA-Psp: um Sistema Computacional para Análise Aeroelástica de Pontes Suspensas por Modelos Matemáticos Reduzidos*. PhD thesis, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, São Paulo, 2008.
- [3] W. S. D. of Transportation, “Lessons from the failure of a great machine.” <http://goo.gl/6GSrGx>. Acesso em: 18 mar 2014.
- [4] W. Boyce and R. Diprima, *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. LTC, 1998.
- [5] “Sistema massa-mola.” <http://goo.gl/7M3Zpy>. Acesso em: 19 jul 2014.
- [6] W. S. D. of Transportation, “Gallopig gertie collapses november 7, 1940.” <http://goo.gl/Fvt1U>. Acesso em 14 mar 2014.