UM POUCO SOBRE A SABEDORIA DA TEORIA INGÊNUA DOS CONJUNTOS

Gabriel Faria Pinheiro
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
gabrielfariapinheiro@hotmail.com

Fábio José Bertoloto
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
betoloto@famat.ufu.br

RESUMO

Neste trabalho veremos que, a partir da teoria básica dos conjuntos, podemos demonstrar resultados importantes da mesma, como o Teorema de Cantor-Bernstein-Schöeder e as equivalências entre o Axioma da Escolha, o Princípio da Boa Ordenação e o Lema de Zorn. Além disto, veremos alguns exemplos do uso do Axioma da Escolha em matemática.

ABSTRACT

In this paper, we will see that, from the basic set theory, we can demonstrate important results of it, such as the Cantor-Bernstein-Schöeder Theorem and the equivalences of the Axiom of Choice, the Well-Ordering Principle and the Zorn's Lemma. In addition, we will show some examples of use of Axiom of Choice in mathematics.

Palavras-chave: Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, Enumerabilidade, Axioma da Escolha, Princípio da Boa Ordenação, Lema de Zorn.

1 INTRODUÇÃO

Desde o começo de nossa vida escolar fazemos estudos sobre os conjuntos. Conjuntos de frutas, conjuntos de letras, conjuntos de números, dos números pares, ímpares, e assim vamos aumentando a complexidade com o passar do tempo. Aprendemos a fazer diagramas e ter uma visão mais “prática"do que é um conjunto e o que são seus elementos. Aprendemos a denotar conjuntos por letras maiúsculas, além de passarmos a conhecer subconjuntos, uniões e coleções, interseções e outras propriedades. Cada vez mais nos aprofundamos sobre o assunto, mas sempre teremos conceitos simples e de fácil entendimento por detrás dos resultados que depois seguem desta fase inicial.

Nosso texto se baseia nisso. Utilizaremos muito sobre a teoria ingênua dos conjuntos e algumas aplicações da mesma. Responderemos dúvidas que, talvez, venham em nossa mente, como ‘Qual conjunto é maior, o conjunto dos números inteiros ou o dos naturais?’. Ou ainda, ‘existe um infinito maior que o outro?’, ou até mesmo, ‘Qual o menor dos infinitos?’.

Um fato interessante a ser destacado sobre este texto é que as ferramentas utilizadas nunca ultrapassam a barreira da teoria ingênua dos conjuntos: coleção, estar contido, pertencer, função e relações de ordem. Todos estes são conceitos estudados até, no máximo, o primeiro período de um curso regular de matemática.

Porém, manuseando estes conceitos de maneira ‘sábia’, resultados bem mais profundos e importantes podem ser obtidos.

Aqui dividimos o texto da seguinte maneira: na Seção 2 apresentamos e demonstramos o Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, incluindo na mesma, aplicações de tal resultado; na Seção 3, apresentamos o Axioma da Escolha, o Princípio da Boa Ordenação e o Lema de Zorn, cujas primeiras formulações datam de 1904 por Ernst Zermelo. Mostramos que os mesmos são equivalentes, com demonstrações nem sempre de fácil compreensão, mas sempre utilizando o básico da Teoria dos Conjuntos. Terminamos esta seção demonstrando algumas aplicações do Axioma da Escolha, dentre elas, destacamos duas definições equivalentes da função contínua e a existência de base para espaços vetoriais.

2 O TEOREMA DE CANTOR-BERNSTEIN-SCHRÖEDER

Um dos fundadores da Teoria dos Conjuntos foi o alemão Georg Cantor (1845-1918). Neste texto, veremos que, segundo Cantor, dois conjuntos têm o mesmo número de elementos se existe uma bijeção entre eles. Caso isto ocorra, dizemos que os conjuntos são chamados *equipotentes* ou *equivalentes* ou, ainda, que têm a mesma *cardinalidade*. Cantor provou que a menor cardinalidade (ou menor número cardinal - denominado $\aleph_0$) possível para um conjunto infinito é a dos naturais. Neste caso, dizemos que o conjunto é *enumerável*. Cantor demonstrou ainda que, dado um conjunto qualquer, é sempre possível construir outro conjunto 'maior' ainda, ou seja, cuja cardinalidade é maior que a do conjunto dado.

Veremos alguns exemplos de conjuntos enumeráveis e exemplos de conjuntos com a cardinalidade $\mathfrak{c}$, que é denominada cardinalidade *potência do contínuo*. Alguns textos na literatura, utilizam $\mathfrak{c} = \aleph_1$, seguindo a Hipótese do Contínuo enunciada por Cantor: *Não existe conjunto A que tenha cardinalidade maior que $\aleph_0$ e menor que $\mathfrak{c}$.* Na verdade, tal fato não pode ser "desprovado" e nem "provado", segundo os axiomas da Teoria dos Conjuntos tradicional (Zermelo-Fraenkel), com resultados obtidos por Kurt Gödel (1938) e Paul Cohen (1963), respectivamente.

Utilizaremos aqui fortemente, para obtenção dos resultados, o Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, assim chamado em homenagem a Georg Cantor, Felix Bernstein e Ernst Schröeder, que estabelece, para dois conjuntos A e B, o seguinte: se existem funções injetoras $f\colon A \to B$ e $g\colon B \to A$, então existe uma função bijetora $h\colon A \to B$. Em termos da cardinalidade dos dois conjuntos, isso significa que se a cardinalidade de A é menor que a de B e vice-versa, então os dois conjuntos têm a mesma cardinalidade. Essa é, obviamente, uma propriedade muito útil para a ordenação de números cardinais.

O que estudamos nesta seção foi motivado, em grande parte, pelos textos de Alencar e Abud [1], e Ávila [6].

2.1 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA

Para o que segue, vamos precisar das seguintes notações para um dado conjunto X:

1. Se $A \subset X$, então A' representa $X - A$, ou seja, o complementar de A em relação a X.
2. $\mathcal{P}(X)$ representa o conjunto das partes de X.
3. $|X|$ indica a cardinalidade do conjunto X. Dizemos ainda que $|X|$ é o número cardinal de X.

Vejamos o enunciado do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder.

Teorema 2.1: (Cantor-Bernstein-Schröeder) Sejam conjuntos X e Y tais que existam funções injetoras $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow X$. Então $|X| = |Y|$, ou seja, X e Y são equipotentes.

Para a demonstração, precisaremos, antes, do seguinte lema:

Lema 2.1: Sejam conjuntos X e Y tais que existam funções $f\colon X \longrightarrow Y$ e $g\colon Y \longrightarrow X$. Então, existe um conjunto $D \subset X$ tal que $g(f(D)') = D'$.

Demonstração. Consideremos a função $\mu\colon \mathcal{P}(X) \longrightarrow \mathcal{P}(X)$ dada por $\mu(E) = g(f(E)')'$, $\forall E \subset X$. Esta função é claramente bem definida e também é uma função crescente em termos de inclusão de conjuntos, isto é:

$$E \subseteq F \text{ implica em } \mu(E) \subseteq \mu(F).$$

De fato: $E \subseteq F$ resulta em $f(E) \subseteq f(F)$, pois f é uma função. Tomando o complementar, temos $f(F)' \subseteq f(E)'$. Como g é função, $g(f(F)') \subseteq g(f(E)')$. Mais uma vez, tomando o complementar, resulta que $g(f(E)')' \subseteq g(f(F)')'$. Daí, obtemos que $\mu(E) \subseteq \mu(F)$. Vamos considerar uma família dada por $\mathfrak{D} = \{E \in \mathcal{P}(X) : E \subseteq \mu(E)\}$. Claro que $\emptyset \in \mathfrak{D}$. Seja $D = \cup\{E \subseteq X : E \in \mathfrak{D}\}$. Podemos observar que: $E \in \mathfrak{D}$ implica em $E \subseteq D$, por definição. Disto, segue diretamente que $E \subseteq \mu(E) \subseteq \mu(D)$ implica em $\cup\{E \subseteq X : E \in \mathfrak{D}\} \subset \mu(D)$, resultando ao final que $D \subset \mu(D)$. Portanto, $\mu(D) \subseteq \mu(\mu(D))$ e $\mu(D) \in \mathfrak{D}$. Disto, $\mu(D) \subset D$ e, obtemos $\mu(D) = D$. Assim, $\mu(D) = g(f(D)')'$ implica em $D = g(f(D)')'$. Tomando o complementar, resulta em $D' = (g(f(D)')')'$, ou ainda $D' = g(f(D)')$, concluindo o desejado. □

Finalmente, a demonstração do Teorema 2.1:

Demonstração. (*Teorema 2.1*) Para provar o teorema basta mostrar que existe uma função $h : X \to Y$ sobrejetora. Seja D o conjunto que existe pelo Lema 2.1. Vimos que $g(f(D)') = D'$. Logo, podemos considerar a inversa de g, g^{-1}, da seguinte maneira: $g^{-1}\colon D' \longrightarrow f(D)'$. Note que não estamos afirmando que g é inversível como um todo, mas g^{-1} existe quando restrita a D' com contradomínio $f(D)'$. E é isto que utilizaremos a seguir. Considere o conjunto D do mesmo lema e a função $h\colon X \longrightarrow Y$ definida por

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in D \\ g^{-1}(x) & \text{se } x \in D' \end{cases}$$

Quando restrita a D ou a D', é claro que h é injetora, pois f e g^{-1} o são. Notemos ainda que, pelo Lema 2.1, h está bem definida, pois $D' \subset g(Y)$. Verifiquemos agora que h é, de fato, injetora. Suponhamos que existam $x \in D$ e $y \in D'$ tais que $h(x) = h(y)$, ou seja, $f(x) = g^{-1}(y)$. Pelo Lema 2.1, $D' = g(f(D)')$ implica em $y = g(z)$, para algum $z \in f(D)'$. Disto, $f(x) = g^{-1}(g(z)) = z \in f(D)$, pois $x \in D$, o que é um absurdo, fazendo com que h seja injetora.

Provemos agora que h é sobrejetora. Seja $y \in Y$. Assim, teremos duas possibilidades:

(i) Se $g(y) \in D$, pelo lema anterior, $g(y) \in g(f(D'))'$ implica em $g(y) \notin g(f(D)')$, obtendo $y \notin f(D)'$ e, ainda, $y \in f(D)$, ou seja, $y = f(x)$, para algum $x \in D$. Portanto, $y = h(x)$.

(ii) Se $g(y) \notin D$, então $g(y) = x \in D'$. Como $x \notin D$, $h(x) = g^{-1}(x) = g^{-1}(g(y)) = y$. Portanto, $y = h(x)$.

Logo, h é sobrejetora. □

2.2 ENUMERABILIDADE

Para vermos algumas aplicações do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, precisamos de compreender um pouco melhor o menor dos infinitos. De fato, uma pergunta que pode surgir é a seguinte: qual é o " 'menor' dos infinitos?" Ou, "qual é o menor número cardinal?" Já comentamos que a menor cardinalidade possível é a dos naturais. No exemplo abaixo, veremos mais alguns casos de conjuntos enumeráveis. Vamos sempre considerar $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$.

Exemplo 2.1: O conjunto dos números pares, ímpares e primos têm o mesmo "tamanho" (isto é, cardinalidade) dos naturais. Na verdade, sendo eles subconjuntos infinitos dos naturais, eles podem ser englobados num resultado mais geral, que é o Teorema 2.2 abaixo.

Teorema 2.2: Se $A \subseteq \mathbb{N}$ então A é um conjunto finito ou, se tiver um número infinito de elementos, então $|A| = |\mathbb{N}|$.

Demonstração. Tomemos A um conjunto com um número infinito de elementos. Seja a função

$$\begin{array}{rccl} f\colon & A & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & k & \mapsto & f(k) = |\{s \in A : s < k\}|. \end{array}$$

Mostraremos que f é bijetora.

(I) f é injetora: Sejam $a_1, a_2 \in A$, tais que $a_1 \neq a_2$. Consideremos $a_1 < a_2$. Claro que $|\{s \in A : s < a_1 < a_2\}| < |\{s \in A : s < a_2\}|$, pois aqui estamos trabalhando com conjuntos finitos e $\{s \in A : s < a_1 < a_2\} \subsetneq \{s \in A : s < a_2\}$ (note que para cada $k \in \mathbb{N}$, $f(k)$ é a cardinalidade de um conjunto com um número finito de elementos). Ou seja, $f(a_1) < f(a_2)$.

(II) f é sobrejetora: Utilizaremos o Princípio de Indução Finita, com a propriedade

$$P(n) = \text{“existe } k \in A \text{ tal que } f(k) = n \in \mathbb{N}\text{”}.$$

Vale $P(0)$ bastando tomar k como o mínimo de A. Suponhamos que vale $P(n)$ e provemos $P(n+1)$. Seja $k \in A$ tal que $f(k) = n$. Considere $C = \{r \in A : k < r\}$. Então $C \neq \emptyset$, pois A é infinito. Seja t um mínimo de C, ou seja, $t \leq r$ para todo $r \in C$, e $T = \{s \in A : s < t\}$. Então $T = \{s \in A : s < k\} \cup \{k\}$ e, portanto, $f(t) = f(k) + 1 = n + 1$, o que prova, a partir de (I), que f é bijetora. □

Portanto, a pergunta colocada no início desta subseção está respondida. De fato, é provado pelo Teorema 2.2 que $\aleph_0$ é o menor número cardinal. Uma outra pergunta pode ser feita: podem haver conjuntos que contenham os naturais propriamente, mas ainda enumeráveis? São bem conhecidos os casos enunciados no exemplo abaixo:

Exemplo 2.2: Os inteiros, denotados por $\mathbb{Z}$, e os racionais, denotados por $\mathbb{Q}$, são enumeráveis.

No caso dos inteiros, temos, como pode ser facilmente verificado, a seguinte bijeção:

$$\begin{array}{rccl} h\colon & \mathbb{Z} & \longrightarrow & \mathbb{N} \\ & n & \longmapsto & h(n) = \begin{cases} 2n & \text{se } n \geq 0 \\ 2(-n-1)+1 & \text{se } n < 0 \end{cases} \end{array}$$

Quanto ao caso dos racionais, como pode ser visto em Sagher [5], uma bijeção $f\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$ pode ser dada por:

$$f(0) = 0, f(1) = 1 \text{ e } f\left(\frac{m}{n}\right) = p_1^{2e_1} \dots p_k^{2e_k} q_1^{2f_1 - 1} \dots q_l^{2f_l - 1},$$

em que m e n são relativamente primos e $m = p_1^{e_1} \dots p_k^{e_k}$ e $n = q_1^{f_1} \dots q_l^{f_l}$, $n \neq 0$, são as decomposições em fatores primos, sendo existente e única tal decomposição, segundo o Teorema Fundamental da Aritmética.

Quando partimos para infinitos “maiores” que $\aleph_0$, nem sempre é fácil criarmos bijeções entre conjuntos com esta propriedade. Porém, é mais fácil criarmos funções injetoras entre tais conjuntos. É aqui que se destaca a utilidade do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, como veremos na subseção seguinte.

2.3 APLICAÇÕES DO TEOREMA

Agora, vamos exibir conjuntos com outra cardinalidade: a cardinalidade $\mathfrak{c}$ (potência do contínuo). Esta é a cardinalidade do conjunto dos números reais e também dos intervalos da reta. De fato, os intervalos da reta parecem ter “tamanhos” diferentes, se forem intervalos de comprimentos diferentes. Na verdade, não é isto o que acontece. Todos os intervalos, não degenerados, têm o mesmo “tamanho” em termos de quantidade de elementos: são equipotentes e, além disto, não enumeráveis, tendo todos a mesma cardinalidade de $\mathbb{R}$. Antes de aplicarmos o teorema propriamente dito, veremos alguns fatos. Vamos precisar de algumas noções, como seguem nas definições subsequentes.

Definição 2.1: Um *numeral* é um símbolo ou grupo de símbolos que representa um número. Um *sistema de numeração (ou sistema numeral)* é um sistema em que um conjunto de números são representados por numerais de uma forma consistente.

Por exemplo, pode ser visto como o contexto que permite ao numeral "11" ser interpretado como o numeral romano para dois, o numeral binário para três ou o numeral decimal para onze.

Definição 2.2: Um *sistema de numeração associado à base* α, em que $\alpha \in \mathbb{N}^*$, é um sistema de numeração tal que cada número é representado pelo seguinte numeral: $(a_1 \dots a_n)_\alpha$, em que $0 \leq a_j \leq \alpha - 1$, para $1 \leq j \leq n$.

Como exemplos mais comuns, citamos o sistema de numeração decimal (base $\alpha =$10), que faz parte de nossa cultura, e o sistema de numeração binário (base $\alpha =$2) que é muito utilizado em computação.

Exemplo 2.3: O intervalo $(0, 1)$ não é enumerável.

De fato, considere $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow (0, 1)$ dada por $f(n) = a_n$, para todo $n \in \mathbb{N}$ uma função qualquer. Vejamos que nenhuma tal função pode ser sobrejetora. De fato, $a_n = 0, x_1x_2 \dots x_n \dots$ em que $x_1, \dots, x_n$ compõe a decomposição decimal de a_n ocorrendo, portanto $x_n \in \{0, 1, \dots, 9\}$. Temos o seguinte, para cada elemento da imagem de f:

$$\begin{aligned} &a_1 = 0, a_1^1 a_2^1 \dots \\ &a_2 = 0, a_1^2 a_2^2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

Tome $y = 0, y_1y_2 \dots$, em que $y_n \neq a_n^n$ e $y_n \neq 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claro que $y \in (0, 1)$, mas $y \notin f(\mathbb{N})$. Logo, não há bijeção entre $(0, 1)$ e $\mathbb{N}$. Portanto, $(0, 1)$ não é enumerável.

Exemplo 2.4: Qualquer intervalo da forma (a, b) é não enumerável, para $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Neste caso basta considerar a função $g\colon (0, 1) \longrightarrow (a, b)$ dada por $g(t) = a + t(b - a)$, para todo $t \in (0, 1)$.

Para verificar que os intervalos citados, anteriormente, e os intervalos não-degenerados têm a mesma cardinalidade dos reais, vamos precisar do Teorema 2.1, como veremos nos exemplos seguintes:

Exemplo 2.5: $|\mathbb{R}| = |(-1, 1)|$.

Considere a inclusão $i\colon (-1, 1) \longrightarrow \mathbb{R}$ e a função $h\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-1, 1)$ dada por $h(x) = \dfrac{x}{|x| + 1}$. É claro que as duas funções são injetoras. Logo, usando o Teorema 2.1 segue que $|\mathbb{R}| = |(-1, 1)|$.

Vejamos que qualquer intervalo não degenerado limitado (fechado, aberto ou semiaberto), tem o mesmo "tamanho" do conjunto dos números reais.

Exemplo 2.6: Com base nos itens abaixo e no Exemplo 2.4, concluímos que para quaisquer $a, b \in \mathbb{R}$, com $a < b$, vale $|[a, b]| = |(a, b]| = |[a, b)| = |(a, b)|$.

(i) $|[0, 1)| = |(0, 1)|$. De fato, considere a função bijetora $h\colon [0, 1) \longrightarrow (0, 1)$ dada por

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+1}, & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ com } n \geq 2 \\ x, & \text{se } x \notin \left\{\frac{1}{n}; n \geq 2\right\} \cup \{0\} \end{cases}.$$

(ii) $|(0,1]| = |(0,1)|$. Considere a função bijetora $g\colon (0,1] \longrightarrow (0,1)$ dada por

$$g(x) = \begin{cases} \frac{1}{n+1}, & \text{se } x = \frac{1}{n}, \text{ com } n \geq 1 \\ x, & \text{se } x \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 1\} \end{cases}.$$

(iii) $|[0,1]| = |(0,1)|$. Considere a função bijetora $l\colon [0,1] \longrightarrow (0,1)$ dada por

$$l(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x = 0 \\ \frac{1}{n+2}, & \text{se } x = \frac{1}{n} \text{ com } n \geq 1 \\ x, & \text{se } x \notin \{\frac{1}{n}; n \geq 1\} \cup \{0\} \end{cases}.$$

Exemplo 2.7: Para todo $a \in \mathbb{R}$, $|(a,\infty)| = |[a,\infty)| = |(-\infty,a)| = |(-\infty,a]| = |\mathbb{R}|$.

1. Considere as funções $f\colon [a,\infty) \longrightarrow (a,\infty)$ dada por $f(x) = x+1$, para todo $x \geq a$ e $i\colon (a,\infty) \longrightarrow [a,\infty)$ a função inclusão. As duas são injetoras. Basta aplicar o Teorema 2.1 e temos que $|(a,\infty)| = |[a,\infty)|$.

2. Analogamente, basta aplicar o Teorema 2.1 considerando as funções injetoras $f\colon (-\infty,a] \longrightarrow (-\infty,a)$ dada por $f(x) = x-1$, se $x \leq a$ e $i\colon (-\infty,a) \longrightarrow (-\infty,a]$ a função inclusão. Basta aplicar o Teorema 2.1.

3. Considere a função $h_1\colon \mathbb{R} \longrightarrow (a,\infty)$ dada por $h_1(x) = a + 2^x$ e a inclusão $i_1\colon (a,\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$. São injetoras e, pelo Teorema 2.1, $|\mathbb{R}| = |(a,\infty)|$. Considere, também, a função $h_2\colon \mathbb{R} \longrightarrow (-\infty,a)$ dada por $h_2(x) = a - 2^x$ e a inclusão $i_2\colon (-\infty,a) \longrightarrow \mathbb{R}$. Por serem injetoras, com mais uma aplicação do Teorema 2.1, temos $|\mathbb{R}| = |(-\infty,a)|$.

De 1), 2) e 3), temos o que é enunciado no exemplo.

No próximo exemplo conheceremos um outro conjunto com a cardinalidade dos reais.

Exemplo 2.8: Dado um conjunto X, denotamos por 2^X o conjunto das funções $f\colon X \longrightarrow \{0,1\}$. Vamos mostrar que $|2^{\mathbb{N}}| = |\mathbb{R}|$. Para isto, basta mostrar que $|2^{\mathbb{N}}| = |(0,1)|$, pois $|(0,1)| = |\mathbb{R}|$. Vamos utilizar a Definição 2.2. Considere, então:

$$\begin{aligned} F\colon \; 2^{\mathbb{N}} &\longrightarrow (0,1) \\ f &\longmapsto F(f) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(n)}{10^{n+1}} = 0, f(0)f(1)f(2)... \end{aligned}$$

em que $F(f)$ é a expansão decimal de um elemento do intervalo $(0,1)$. Como $f(j) \in \{0,1\}, \forall j \in \mathbb{N}$, é fácil deduzir que F é injetora, e $2^{\mathbb{N}}$ está em bijeção com um subconjunto de $(0,1)$, em símbolos $2^{\mathbb{N}} \hookrightarrow (0,1)$.

Agora vamos definir $G\colon (0,1) \longrightarrow 2^{\mathbb{N}}$ injetora. Antes, lembramos que é válido o seguinte resultado: dado $x \in (0,1)$, x possui uma única expansão infinita em base binária, isto é, $x = 0, x_1x_2 \ldots x_n \ldots$, com $\{n \in \mathbb{N}^*\colon x_n \neq 0\}$ infinito (podemos encontrar este resultado em Oliveira [4]).

Fazemos $G(x) = f_x\colon \mathbb{N} \longrightarrow \{0,1\}$, definida por $f_x(n) = x_{n+1}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Pelo resultado anterior, G é injetora e $(0,1) \hookrightarrow 2^{\mathbb{N}}$. Pelo teorema de Cantor-Bernstein-Schröder, $|(0,1)| = |2^{\mathbb{N}}|$.

Denotamos $|2^{\mathbb{N}}|$ por $|2|^{|\mathbb{N}|} = 2^{\aleph_0}$. Assim, temos que $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Na Subseção 3.3.4 veremos mais alguns exemplos de aplicação do Teorema de Cantor-Bernstein-Schöeder.

3 O AXIOMA DA ESCOLHA: ALGUMAS EQUIVALÊNCIAS E APLICAÇÕES

3.1 PRELIMINARES

No texto que segue, detalharemos os tópicos relacionados ao Axioma da Escolha, o Princípio da Boa Ordenação e o Lema de Zorn. Após termos esses conceitos em mente, mostraremos que os mesmos são equivalentes.

3.1.1 AXIOMA DA ESCOLHA - AE

Para enunciar este axioma precisamos, antes, dos conceitos de "Sistema de Conjuntos" e de "Função Escolha".

1. *Sistema de Conjuntos*: S é um sistema de conjuntos (ou uma coleção de conjuntos) quando queremos enfatizar que os elementos de S são conjuntos.

2. *Função Escolha:* Uma função g definida em um sistema de conjuntos S é uma função escolha para S se $g(X) \in X$ para todo conjunto não-vazio $X \in S$

Enunciado 3.1: (Axioma da Escolha) Existe uma função escolha para cada sistema de conjuntos.

Exemplo 3.1: Considere o conjunto $B = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ e seus subconjuntos $A_1 = \{1, 2, 3\}$, $A_2 = \{1, 3, 4\}$ e $A_3 = \{2, 5\}$. Sejam as funções f e g do sistema de conjuntos $\{A_1, A_2, A_3\}$ em B dadas por:

$$f(A_1) = 3,\ f(A_2) = 2 \text{ e } f(A_3) = 5.$$

e

$$g(A_1) = 2,\ g(A_2) = 4 \text{ e } g(A_3) = 2.$$

Fica claro que f não é uma função escolha, pois $f(A_2) = 2 \notin A_2$. Por outro lado, g é uma função escolha, pois $g(A_1) \in A_1$, $g(A_2) \in A_2$ e $g(A_3) \in A_3$.

3.1.2 PRINCÍPIO DA BOA ORDENAÇÃO - PBO

Vejamos, então, alguns conceitos necessários para enuciarmos este princípio.

1. W é *bem ordenado pela relação* "$\leq$", ou $(W, \leq)$ é *bem ordenado*, ou ainda "$\leq$" é uma boa ordem em W, se forem satisfeitas as seguintes propriedades:

   (a) Para todo $x \in W, x \leq x$ (reflexiva).

   (b) Para quaisquer $x_1, x_2 \in W$, se $x_1 \leq x_2$ e $x_2 \leq x_1$ então $x_1 = x_2$ (anti-simétrica).

   (c) Para quaisquer $x_1, x_2, x_3 \in W$, se $x_1 \leq x_2$ e $x_2 \leq x_3$ então $x_1 \leq x_3$ (transitiva).

   (d) Dados quaisquer $x_1, x_2 \in W$, ou $x_1 \leq x_2$ ou $x_2 \leq x_1$. Neste caso dizemos que todos os elementos são *comparáveis*.

   (e) Dado qualquer subconjunto A de W, se $A \neq \emptyset$ então A possui um mínimo: existe $a_0 \in A$ tal que $a_0 \leq a$, para todo $a \in A$.

2. Se $(W, \leq)$ satisfizer apenas as propriedades 1a, 1b e 1c, dizemos que a relação é uma *ordem parcial* (ou, simplesmente, *ordem*) e que o conjunto é *parcialmente ordenado* (ou, simplesmente, *ordenado*).

3. Caso $(W, \leq)$ seja ordenado e satisfaça também 1d, dizemos que a ordem é uma *ordem total* ou *ordem linear* e que o conjunto é *linearmente ordenado* ou *totalmente ordenado*.

Observação: Se $x_1 \leq x_2$ em uma ordem qualquer, então dizemos que x_1 *precede* x_2.

Proposição 3.1: Se $(A, \leq)$ for tal que se $B \subset A$, $B \neq \emptyset$, admite mínimo, então $(A, \leq)$ é totalmente ordenado.

Demonstração. Dados $x_1, x_2 \in A$, consideremos $B = \{x_1, x_2\}$. Sabemos que B, por hipótese, admite mínimo. Então, por definição de mínimo, $x_1 \leq x_2$ ou $x_2 \leq x_1$. Portanto, x_1 e x_2 são comparáveis e a ordem é total. □

A proposição anterior nos diz que nem sempre precisamos demonstrar a validade do item 1d, se mostrarmos o item 1e.

Enunciado 3.2: **(Princípio da Boa Ordenação)** Todo conjunto pode ser bem ordenado.

Este princípio também é conhecido como Teorema de Zermelo em homenagem ao matemático alemão Ernst Friedrich Ferdinand Zermelo (1851-1953).

Exemplo 3.2: Dados $m, n \in \mathbb{N}$, dizemos que $m|n$ (m divide n) se, n é múltiplo de m, ou seja, existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $n = km$. Seja a relação $(\mathbb{N}, \leq_D)$ em que $m, n \in \mathbb{N}$ estão relacionados por $m \leq_D n$ se $m|n$. Facilmente, podemos ver que esta relação satisfaz as propriedades 1a, 1b e 1c, mas já não satisfaz a propriedade 1d, pois podemos considerar, por exemplo, dois números primos. Logo, a relação $(\mathbb{N}, \leq_D)$ é somente uma ordem parcial.

Exemplo 3.3: Seja $(V, \leq)$ em que $V = \{x : 0 < x < 1\}$ e "$\leq$" é a relação de ordem usual da reta. Então $(V, \leq)$ satisfaz 1a, 1b, 1c e 1d, mas não satisfaz 1e. De fato, não existe mínimo, não sendo totalmente ordenado. Na verdade, $(V, \leq)$ tem o que chamamos de *ínfimo* que, no caso, é 0.

Exemplo 3.4: Agora, seja o conjunto $B = \{2, 4, 8, 16, ...\}$ e a relação $(B, \leq)$ de tal forma que, para $x, y \in B$, $x \leq y$ se x é múltiplo de y. Podemos perceber, então, que como tal conjunto com a relação especifica satisfaz 1a, 1b, 1c, 1d e 1e, então é bem ordenado.

3.1.3 LEMA DE ZORN - LZ

Vejamos os conceitos necessários para entendermos o Lema de Zorn. Seja, $B \subset A$, em que A é um conjunto ordenado pela relação $\leq$.

1. *Cadeia:* B é uma cadeia em A se quaisquer dois elementos de B são comparáveis, isto é, dados $b_1, b_2 \in B$ vale que $b_1 \leq b_2$ ou $b_2 \leq b_1$.

2. *Limitante superior:* $a \in A$ é um limitante superior de B no conjunto ordenado $(A, \leq)$ se $x \leq a$ para todo $x \in B$.

3. *Elemento maximal:* $b \in B$ é um elemento maximal de B na ordenação $\leq$ se não existe $x \in B$ tal que $b \leq x$ e $x \neq b$. Se o conjunto for totalmente ordenado, então b passa a ser um máximo de B.

Enunciado 3.3: **(Lema de Zorn)** Se toda cadeia em um conjunto não-vazio e parcialmente ordenado X tem um limitante superior em X, então X tem um elemento maximal.

Exemplo 3.5: Para cada item desta subseção, consideramos os seguintes exemplos:

1. Seja $(B, \leq)$ o conjunto definido no Exemplo 3.4. Então B é uma cadeia em B.

2. Seja $(V, \leq)$ como definido no Exemplo 3.3. Então 1 é um limitante superior de V.

3. Seja o conjunto $W = \{1, 3, 5, 7\}$ e a relação $x \leq y$ se $x|y$. Temos que 3, 5 e 7 são elementos maximais de W.

3.2 EQUIVALÊNCIAS ENTRE PBO, AE E LZ

3.2.1 PBO $\Rightarrow$ AE

Queremos mostrar que, se todo conjunto D pode ser bem ordenado, segundo alguma relação de boa ordem " $\leq$", então dado um sistema de conjuntos, existe uma função escolha para o mesmo.

Antes de prosseguirmos, mostraremos que o mínimo de um conjunto bem ordenado é único.

Lema 3.1: *Sejam b_1 e b_2 mínimos de um conjunto bem ordenado $(B, \leq)$. Então $b_1 = b_2$, ou seja, B admite um único mínimo.*

Demonstração. Temos o seguinte:

- Como b_1 é mínimo de B, então $b_1 \leq b$, para todo $b \in B$. Em particular, $b_1 \leq b_2$.
- Como b_2 é mínimo de B, então $b_2 \leq b$, para todo $b \in B$. Em particular, $b_2 \leq b_1$.

Por definição, sabemos que $b_1, b_2 \in B$. Das desigualdades acima, como a ordem satisfaz a propriedade anti-simétrica, obtemos $b_1 = b_2$. □

Seja $\mathfrak{A}$ um sistema de conjuntos. Definimos $\cup\mathfrak{A} = \{x : x \in A$ para algum $A \in \mathfrak{A}\}$. Então, pelo Princípio da Boa Ordenação, existe uma relação $\leq$ tal que $(\cup\mathfrak{A}, \leq)$ é um conjunto bem ordenado. Seja $B = \{x \in \cup\mathfrak{A} :$ existe $A \in \mathfrak{A}$ tal que x é o mínimo de A pela relação " $\leq$ " $\}$. B tem um elemento de cada elemento de $\mathfrak{A}$ e, nenhum diferente dele, pelo Lema 3.1. Seja

$$\begin{aligned} f\colon \mathfrak{A} &\longrightarrow B \subseteq \cup\mathfrak{A} \\ A &\longmapsto x \end{aligned}$$

Então, f é uma função em A, pois x é o mínimo de A, que é único. Em particular, f é uma função escolha do sistema de conjuntos $\mathfrak{A}$, mostrando o desejado.

3.2.2 AE $\Rightarrow$ LZ

Queremos mostrar que se existe uma função escolha para um conjunto $(X, \leq)$ parcialmente ordenado, que tem por propriedade que toda cadeia em $(X, \leq)$ possui um limitante superior, então $(X, \leq)$ tem um elemento maximal. Mas, para isto, faremos algumas transições. Na verdade, veremos que a cardinalidade do conjunto dos elementos maximais de X é a mesma de um conjunto que definiremos como $\mathbb{X}$. E verificar que $\mathbb{X}$ tem elemento maximal é bem mais razoável que verificar que X tem elemento maximal. Comecemos com a:

Definição 3.1: Para cada $x \in X$, consideremos o *segmento inicial* $\overline{s}(x)$:

$$\overline{s}(x) := \{y \in X : y \leq x\}.$$

Com isto, podemos definir, com $\mathcal{P}(X)$ sendo o conjunto das partes de X já definido anteriormente, a função

$$\begin{aligned} \overline{s}\colon X &\longrightarrow \mathcal{P}(X) \\ x &\longmapsto \overline{s}(x) \end{aligned}.$$

Por $\mathbb{S} \subseteq \mathcal{P}(X)$, denotamos a imagem da função $\overline{s}$.

Pela relação de equivalência, temos para todo $x, y \in X : \overline{s}(x) \subseteq \overline{s}(y)$ se, e somente se, $x \leq y$. Desta maneira, o trabalho de achar um elemento maximal em X é equivalente a achar um elemento maximal em $\mathbb{S}$. Deste modo, teremos que provar a seguinte afirmação:

"Se toda cadeia não vazia em um conjunto $\mathbb{S}$ ordenado pela inclusão de conjuntos ("$\subseteq$") tem um limitante superior em $\mathbb{S}$, então há pelo menos um elemento (subconjunto) maximal em $\mathbb{S}$."

Definição 3.2: Por $\mathbb{X}$ denotamos a coleção de todas as cadeias em $(X, \leq)$ ordenada pela relação de inclusão de conjuntos.

Proposição 3.2: A coleção $\mathbb{X}$ satisfaz as seguintes propriedades:

1. Todo subconjunto de cada conjunto em $\mathbb{X}$ está em $\mathbb{X}$.

2. A união dos elementos de cada cadeia em X está em X.

Demonstração. É fácil ver que qualquer subconjunto de uma cadeia é, ainda, uma cadeia. Isto é o item (1). Quanto ao item (2), lembramos que todo elemento de $\mathbb{X}$ está contido em $\overline{s}(x)$ para algum $x \in X$. É válido que se $\mathcal{C}^{\mathbb{X}}$ é uma cadeia em $\mathbb{X}$, então $\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathcal{C}^{\mathbb{X}}} \mathcal{A} \in \mathbb{X}$ (destacamos que cada $\mathcal{A}$ é uma cadeia em X). De fato, dados dois elementos $\mathcal{A}_1$ e $\mathcal{A}_2$ de $\bigcup_{\mathcal{A}\in\mathcal{C}^{\mathbb{X}}} \mathcal{A}$, então vale que $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in \mathbb{X}$ e que $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$ ou $\mathcal{A}_2 \subset \mathcal{A}_1$, pois $\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2 \in \mathcal{C}^{\mathbb{X}}$.

$\square$

Podemos observar do item (1) da Proposição 3.2 que $\emptyset \in \mathbb{X}$.

A principal vantagem de utilizar $\mathbb{X}$ é que a hipótese sobre as cadeias assume uma forma, ligeiramente, mais específica. De fato, ao invés de dizermos que cada cadeia $\mathcal{C}^{\mathbb{X}}$ tem um limitante superior em $\mathbb{S}$, podemos dizer que a união dos conjuntos de $\mathcal{C}^{\mathbb{X}}$ é um elemento de $\mathbb{X}$, como acabamos de ver. Portanto, a união dos conjuntos de $\mathcal{C}^{\mathbb{X}}$ é um limitante superior de $\mathcal{C}^{\mathbb{X}}$.

No próximo resultado utilizaremos o Teorema de Cantor-Bernstein-Schoroeder.

Proposição 3.3: Existe uma bijeção entre os elementos maximais de $\mathbb{S}$ e os elementos maximais de $\mathbb{X}$.

Demonstração. Aqui utilizaremos do Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder (Teorema 2.1).

Cada elemento de $\mathbb{S}$ é um conjunto da forma $\overline{s}(x)$, com $x \in X$, formado por elementos de X. Então, cada $\overline{s}(x)$ é uma cadeia por si só. Disto, $\mathbb{S} \subset \mathbb{X}$ e há uma função injetora do conjunto dos elementos maximais de $\mathbb{S}$ no conjunto dos elementos maximais de $\mathbb{X}$. Como cada elemento de $\mathbb{X}$ é dominado por algum elemento de $\mathbb{S}$, pois cada cadeia admite um limitante superior por hipótese, indo de $\mathbb{S}$ para $\mathbb{X}$ não haverão mais elementos maximais. De fato, dado um elemento maximal $\mathcal{B}$ de $\mathbb{X}$, existe um $\overline{s}(x) \in \mathbb{S}$, tal que $\mathcal{B} \subset \overline{s}(x)$. Agora, mostraremos que $\overline{s}(x)$ é um elemento maximal de $\mathbb{S}$. Notemos que se houvesse algum $y \in X$, $y \neq x$, tal que $\overline{s}(x) \subsetneq \overline{s}(y)$, então $\tilde{\mathcal{B}} = \{\mathcal{B}, \overline{s}(y)\}$ seria uma cadeia e, de $\mathcal{B} \subsetneq \tilde{\mathcal{B}}$, $\mathcal{B}$ não seria elemento maximal de $\mathbb{X}$. Portanto, $\overline{s}(x)$ é um elemento maximal de $\mathbb{S}$. Disto tudo, $\mathcal{B} \longmapsto \overline{s}(x)$ definida pelo que acabamos de comentar, é função injetora. Pelo Teorema 2.1, o resultado segue. $\square$

Definição 3.3: Para cada cadeia A em $\mathbb{X}$, seja $\hat{A} := \{x \in X : A \cup \{x\} \in \mathbb{X}\}$, isto é, $\hat{A}$ consiste de todos os elementos de X que, quando adicionados a A, constituem um conjunto que também está em $\mathbb{X}$.

Proposição 3.4: Um conjunto $M \subset X$ é maximal em $\mathbb{X}$ se, e somente se, $\hat{M} = M$.

Demonstração. Para cada A em $\mathbb{X}$, podemos escrever também $\hat{A} = \bigcup_{x\in\hat{A}} (A \cup \{x\})$, em que cada $A \cup \{x\}$ é uma cadeia em X, sendo assim, elemento de $\mathbb{X}$, pela Proposição 3.2. Suponha que exista um conjunto maximal M em $\mathbb{X}$. Então, por definição de maximal, não existem elementos $x \in X \setminus M$ que podem ser adicionados em M para fazer $M \cup \{x\}$ um outro elemento de $\mathbb{X}$. Disto, $\hat{M} \subset M$. Como é claro que $M \subset \hat{M}$, então $M = \hat{M}$. Provemos agora a outra implicação. Suponhamos que M não seja maximal. Então existe $N \in \mathbb{X}$, tal que $M \subsetneq N$. Seja $n \in N \setminus M$. É fácil ver que $n \in \hat{M}$, ou seja, $M \cup \{n\}$ é um elemento de $\mathbb{X}$. De fato, $M \cup \{n\}$ é uma cadeia em X, o que implicaria em $\hat{M} \neq M$. ($M \subsetneq M \cup \{n\}$), concluindo o desejado. □

Definição 3.4: Seja f uma função escolha para X, ou seja: para todo $A \in \mathcal{P}(X) \setminus \emptyset : f(A) \in A$. Podemos definir $g \colon \mathbb{X} \longrightarrow \mathbb{X}$ por:

$$g(A) = \begin{cases} A \cup \{f(\hat{A} \setminus A)\}, & \text{se } \hat{A} \setminus A \neq \emptyset \\ \\ A, & \text{caso contrário} \end{cases} .$$

Antes de partirmos para a próxima definição, é interessante ressaltarmos alguns fatos. Pela Proposição 3.4, o que temos que provar agora é que: existe $A \in \mathbb{X}$ tal que $g(A) = A$. Isto implica no fato de que A é maximal em $\mathbb{X}$. Notemos que, pela definição de g, é válido:

$$\text{para todo } A \in \mathbb{X}, \text{ temos } A \subseteq g(A).$$

Também, pelo fato de f ser uma função escolha, $f(\hat{A} \setminus A)$ tem um único elemento. Obtemos assim, que $g(A)$ contém, no máximo, um elemento a mais que A.

Definição 3.5: Um subconjunto $\mathcal{T}$ de $\mathbb{X}$ é uma *torre* se satisfaz:

1. $\emptyset \in \mathcal{T}$;
2. $A \in \mathcal{T} \Longrightarrow g(A) \in \mathcal{T}$;
3. Se $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathcal{T}$, então $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{T}$.

A partir da definição de torre, podemos listar alguns fatos:

1. Existe pelo menos uma torre em $\mathbb{X}$, que é o próprio conjunto $\mathbb{X}$;
2. A interseção de uma coleção de torres é ainda uma torre.

Definição 3.6: Seja $\mathcal{T}_0$ a interseção de todas as torres em $\mathbb{X}$. Dizemos que $C \in \mathcal{T}_0$ é comparável se, para todo $A \in \mathcal{T}_0$, $A \subseteq C$ ou $C \subseteq A$.

Proposição 3.5: $\mathcal{T}_0$ é uma cadeia em $\mathbb{X}$.

Demonstração. Temos que $\mathcal{T}_0$ é uma cadeia se, e somente se, todo $C \in \mathcal{T}_0$ é comparável. Claramente, $\emptyset \in \mathcal{T}_0$ e $\emptyset$ é comparável, ou seja, existe pelo menos um elemento comparável em $\mathcal{T}_0$. Seja um conjunto comparável, $C \neq \emptyset$ e, tomemos $A \in \mathcal{T}_0$ tal que $A \subsetneq C$ (pelo menos $A = \emptyset$ existe). Por exemplo, podemos tomar $C = \mathcal{T}_0$. Então, consideremos $g(A)$ como definido anteriormente. Assim, $g(A) \in \mathcal{T}_0$, pelo item (2) da Definição 3.5. Desta forma, como C é comparável, então $C \subsetneq g(A)$ ou $g(A) \subseteq C$. Não podemos ter $C \subsetneq g(A)$, pois, neste caso, como $A \subsetneq C$, ocorreria que $g(A)$ teria, pelo menos, dois elementos a mais que A, contrariando a definição de função escolha. Só podemos ter, portanto, $g(A) \subseteq C$.

Em resumo

(A): $A \subsetneq C$ e C comparável implica em $g(A) \subseteq C$.

Definamos, agora, os seguintes conjuntos:

$$\mathcal{U} := \{A \in \mathcal{T}_0 : A \subseteq C \text{ ou } g(C) \subseteq A\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{U}' := \{A \in \mathcal{T}_0 : A \subseteq g(C) \text{ ou } g(C) \subseteq A\},$$

podendo ser observado que $\mathcal{U}'$ é o conjunto dos elementos de $\mathcal{T}_0$ comparáveis com $g(C)$ e, também, do fato que $C \subseteq g(C)$, é fácil ver que $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{U}'$.

Vamos provar, agora, que $\mathcal{U}$ é uma torre. De $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{T}_0$ e de $\mathcal{T}_0$ ser a menor dentre todas as torres, concluiremos que $\mathcal{U} = \mathcal{T}_0$.

1. $\emptyset \in \mathcal{U}$, pois $\emptyset \subseteq C$.

2. Seja $A \in \mathcal{U}$. Então, temos duas possibilidades: $A \subseteq C$ ou $g(C) \subseteq A$.

   (a) Se $A \subseteq C$, então já vimos que $g(A) \subseteq C$, caso $A \subsetneq C$, como indicado em (A) e, se $A = C$, então é claro que $g(A) \in \mathcal{U}$.

   (b) Se $g(C) \subseteq A$, então $g(C) \subseteq g(A)$, o que implica que $g(A) \in \mathcal{U}$.

3. Vejamos que se $\mathcal{C}$ é uma cadeia em $\mathcal{U}$, então $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{U}$. Primeiramente, é claro que $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{T}_0$. Disto segue que $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \subset C$, implicando em $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{U}$, ou $C \subset \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$. Neste caso, temos duas possibilidades:

   (a) $A \subset C$, para todo $A \in \mathcal{C}$, obtendo $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \subset C$ e $\displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A \in \mathcal{U}$.

   (b) $B \not\subseteq C$, para algum $B \in \mathcal{C}$. Então, de $B \in \mathcal{U}$, $g(C) \subset B \subset \displaystyle\bigcup_{A \in \mathcal{C}} A$, concluindo o desejado.

Agora, concluiremos que todos os elementos de $\mathcal{T}_0$ são comparáveis. Dado $C \in \mathcal{T}_0$ comparável, acabamos de ver que podemos construir um conjunto $\mathcal{U}$ tal que $\mathcal{U} = \mathcal{T}_0$. Daí, se $A \in \mathcal{T}_0$, tal fato implica que $(A \subseteq C \Longrightarrow A \subseteq g(C))$ ou $g(C) \subseteq A$. Portanto, podemos escrever o seguinte: $\emptyset$ é comparável e $g\colon \mathcal{T}_0 \longrightarrow \mathcal{T}_0$, leva comparável em comparável. Como união de conjuntos comparáveis ainda resulta em um conjunto comparável, se $\mathcal{T}_C$ for o conjunto dos comparáveis em $\mathcal{T}_0$, podemos afirmar que $\mathcal{T}_C$ é uma torre. É imediato que $\mathcal{T}_C = \mathcal{T}_0$. Isto significa que $\mathcal{T}_0$ é uma cadeia. $\square$

Teorema 3.1: Existe $M \in \mathbb{X}$ maximal de $\mathbb{X}$.

Demonstração. Seja M a união de todos os conjuntos em $\mathcal{T}_0$. Assim, como $\mathcal{T}_0$ é uma torre, $M \in \mathcal{T}_0$ e $g(M) \in \mathcal{T}_0$. Disto, $g(M) \subseteq M$. Como $M \subseteq g(M)$, segue que $M = g(M)$. Portanto, $f(\hat{M} \setminus M) = \emptyset$. Logo, $M = \hat{M}$, provando, pela Proposição 3.4, que M é elemento maximal de $\mathbb{X}$. $\square$

Dos comentários anteriores, resulta que X admite elemento maximal e o Axioma da Escolha, de fato, implica no Lema de Zorn.

3.2.3 LZ $\Rightarrow$ PBO

Queremos mostrar que todo conjunto $(A, \leq)$ parcialmente ordenado pode ser bem ordenado.

Seja A um conjunto. Consideremos todos os subconjuntos bem-ordenados de A, ou seja, a coleção:

$$\mathcal{A} = \{(B, \leq_B); B \subseteq A \text{ e } B \text{ com a relação } \leq_B \text{ é bem ordenado }\}$$

Para $B_1, B_2 \in \mathcal{A}$, definimos $B_1 \leq B_2$ se:

(1) $B_1 \subset B_2$;

(2) a ordem $\leq_{B_1}$ é induzida de B_2;

(3) dado $x \in B_2 \setminus B_1$, então, $y \leq_{B_2} x$, para todo $y \in B_1$.

É fácil ver que $(\mathcal{A}, \leq)$ é parcialmente ordenado. Agora, seja $(B_i, \leq_i)_{i \in I}$ uma cadeia em $\mathcal{A}$. Vamos mostrar que tal cadeia admite um limitante superior. Pelo Lema de Zorn vamos concluir que $\mathcal{A}$ admite um elemento maximal. Provaremos que tal elemento só pode ser A e, portanto, A é bem ordenado. Um candidato natural a elemento maximal de $\mathcal{A}$ é $B_T = \cup_{i \in I} B_i$. Se tomamos $a, b \in B_T$, então $a \in B_{i_1}$ e $b \in B_{i_2}$ para alguns $i_1, i_2 \in I$. Como temos uma cadeia, $B_{i_1} \leq B_{i_2}$ ou $B_{i_2} \leq B_{i_1}$. Suponhamos $B_{i_1} \leq B_{i_2}$. Logo $B_{i_1} \subset B_{i_2}$ implicando que $a, b \in B_{i_2}$. Daí, definimos $a \leq_{B_T} b$ (isto quer dizer que a e b se relacionam como elementos de B_T) se $a \leq_{B_{i_2}} b$. Então $(B_T, \leq_{B_T})$ é bem ordenado. De fato, $(B_T, \leq_{B_T})$ é parcialmente ordenado, pois é fácil ver que $\leq_{B_T}$ está bem definida e é uma ordem parcial, pois cada B_i é bem ordenado. Vamos mostrar que todo subconjunto de B_T admite mínimo segundo a relação $\leq_{B_T}$. Seja, então, $L \subset \cup_{i \in I} B_i$. Podemos afirmar que $L \cap B_{i_0} \neq \emptyset$ para algum $i_0 \in I$. Logo $L \cap B_{i_0} \subseteq B_{i_0}$ tem um mínimo l_{i_0}, pois B_{i_0} é bem ordenado. Vejamos que l_{i_0} é mínimo, segundo a relação $\leq_{B_T}$, de L também. Se l_{i_0} não fosse mínimo, então existiria $l \in L$ tal que $l \leq_{B_T} l_{i_0} \leq_{B_T} l_\cap \in L \cap B_{i_0}$, para todo $l_\cap \in L \cap B_{i_0}$. Se $l \in B_{i_0}$, então $l = l_{i_0}$. Se $l \notin B_{i_0}$, $l \in B_{i_1} \supsetneq B_{i_0}$ para algum i_1, com $B_{i_0} \leq B_{i_1}$. Mas se $l \in B_{i_1} \setminus B_{i_0}, l \geq l_{B_{i_0}}$, para todo $l_{B_{i_0}} \in B_{i_0}$, o que é um absurdo. Desta forma, l_{i_0} é mínimo de L segundo a relação $\leq_{B_T}$.

Temos $(B_T, \leq_{B_T})$ como limitante superior de $(B_i, \leq_i)_{i \in I}$ em $\mathcal{A}$. Disto, pelo Lema de Zorn, $(\mathcal{A}, \leq)$ tem um elemento maximal, digamos $(B_M, \leq)$. Se $B_M \neq A$, existe $x \in A \setminus B_M$. Formamos, então, o conjunto bem ordenado $B_M \cup \{x\}$, declarando $x \geq b_M$, para todo $b_M \in B_M$. Mas, neste caso, B_M não seria maximal, o que nos faz cair em contradição.

Logo $A = B_M$, que é um conjunto bem-ordenado, como queríamos.

3.3 ALGUMAS APLICAÇÕES DO AE

3.3.1 PONTOS DE ADERÊNCIA

Definição 3.7: A sequência de números reais $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para $a \in \mathbb{R}$, se para todo número real $\varepsilon > 0$, existe $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para $n \geq n_\epsilon$.

Proposição 3.6: Seja A um subconjunto de números reais. São equivalentes as formas de definir um ponto de aderência:

1. $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de aderência de A se, e somente se, existe uma sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, em A, que converge para a.

2. $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de aderência de A se, e somente se, para todo $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$ existe $x \in A$ tal que $|x - a| < \varepsilon$.

Demonstração. ((1) implica em (2)): Dado $\varepsilon > 0$, existe uma sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$, em A, e $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $|x_n - a| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_\varepsilon$. Em particular, $x_{n_\varepsilon} \in A$.
((2) implica em (1)): Seja $X_n = \{x \in A : |x - a| < \frac{1}{n}\}$. Temos, por (2), que $X_n \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Seja $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ uma sequência, tal que $x_n \in X_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Então, cada $x_n \in A$ e $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para a. $\square$

3.3.2 FUNÇÕES CONTÍNUAS

Definição 3.8: Uma função $f \colon A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *contínua em* $a \in A$ se, e somente se, para todo $\epsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que:

$$|x - a| < \delta \text{ implica em } |f(x) - f(a)| < \epsilon.$$

Diremos que função é *contínua* se for contínua em todos os pontos do seu domínio, no caso, o conjunto A.

Provaremos, utilizando do Axioma da Escolha, que a definição de função contínua pode ser caracterizada de outra maneira, sendo esta muito útil em várias demonstrações sobre continuidade.

Teorema 3.2: Uma função $f\colon A \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é contínua em um ponto $a \in A$ se, e somente se, para toda sequência $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ que converge para a, a sequência $\{f(x_n) : n \in \mathbb{N}\}$ converge para $f(a)$.

Demonstração. Suponhamos que f seja contínua em a. Se $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ converge para a e $\epsilon > 0$ é dado, então primeiro encontramos n_δ tal que $|x_n - a| < \delta$ sempre que $n \geq n_\delta$, em que $\delta > 0$ é o que existe para o $\epsilon > 0$ dado, segundo a Definição 3.8. Logo $|f(x_n) - f(a)| < \epsilon$ para $n \geq n_\delta$.

Suponhamos, agora, que toda sequência convirja para a. Aqui, utilizaremos o Axioma da Escolha. Tomemos como fato que f não seja contínua em a. Então existe $\epsilon > 0$ tal que para cada $\delta > 0$ existe um x_δ tal que $|x_\delta - a| < \delta$, mas $|f(x_\delta) - f(a)| \geq \epsilon$. Em particular, para cada $k = 1, 2, 3, \ldots$, *escolhemos* x_k tal que $|x_k - a| < 1/k$ e $|f(x_k) - f(a)| \geq \epsilon$ (aqui o Axioma da Escolha é utilizado, como enfatizamos), onde a função escolha tem domínio X, sendo que os elementos de X são os conjuntos da forma $X_k = \{x \in A : |x - a| < 1/k$ e $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon\}$). Obtemos que $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ converge para a, mas $\{f(x_k) : k \in \mathbb{N}\}$ não converge para $f(a)$. Isto conclui a demonstração.

□

3.3.3 EXISTÊNCIA DE BASES PARA ESPAÇOS VETORIAIS

Teorema 3.3: Todo espaço vetorial V tem uma base.

Demonstração. Consideremos V um espaço vetorial sobre um corpo $\mathbb{K}$. Lembremos que um conjunto infinito é linearmente independente, se cada um de seus subconjuntos, com um número finito de elementos, for linearmente independente. Temos as possíveis considerações:

Primeiro caso: $V = \{0\}$.

Segundo caso: $V \neq \{0\}$.

No primeiro caso, $B = \emptyset$ é uma base para V. Para o segundo caso, seja $E = \{X \subseteq V : X$ é linearmente independente$\}$ um conjunto ordenado por inclusão. Agora, consideremos $\mathfrak{C}$ uma cadeia de elementos de E. Então, para qualquer $C, D \in \mathfrak{C}$ temos que $C \subseteq D$ ou $D \subseteq C$. Tomemos $Z = \cup\mathfrak{C} = \cup\{C : C \in \mathfrak{C}\}$. Vamos mostrar que Z é linearmente independente, mostrando, assim, que $\mathfrak{C}$ tem um limitante superior, o que possibilitará a aplicação do Lema de Zorn. Consideremos $F = \{x_1, \ldots, x_n\} \subseteq Z$. Para cada j, $1 \leq j \leq n$, existe $C_j \in \mathfrak{C}$ tal que $x_j \in C_j$. Como $\mathfrak{C}$ é uma cadeia (totalmente ordenado), existe $j_0 \in \{1, \ldots, n\}$ tal que $C_j \subseteq C_{j_0}, 1 \leq j \leq n$. Assim, $x_1 \ldots, x_n \in C_{j_0}$ e, como $C_{j_0} \in \mathfrak{C}$, por definição $\{x_1, \ldots, x_n\}$ também é linearmente independente e, portanto, Z também o é. Pelo Lema de Zorn, existe $B \in E$ tal que B é um elemento maximal de E. Em particular, B é linearmente independente. Provemos, então, que B é gerador de V. Suponha que B não seja gerador de V. Então, considerando W o espaço gerado por B, temos que $W \subsetneq V$ e

$$W = \{\alpha_1 x_1 + \ldots + \alpha_k x_k : \alpha_i \in \mathbb{K}, x_i \in B, 1 \leq i \leq k, k \in \mathbb{N}^*\}.$$

Como $W \subsetneq V$, existe $v_0 \in V \setminus W$ que não é combinação linear dos vetores de B. Deste modo, seja $B_0 = B \cup \{v_0\}$. Provemos que B_0 é linearmente independente. Sejam $v_1, \ldots,\ v_r \in B$ e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_r \in \mathbb{K}$ tais que

$$\alpha_0 v_0 + \alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = 0.$$

Se $\alpha_0 \neq 0$, então podemos escrever $v_0 = -\frac{\alpha_1 v_1}{\alpha_0} - \frac{\alpha_2 v_2}{\alpha_0} - \ldots - \frac{\alpha_r v_r}{\alpha_0}$, obtendo que v_0 é uma combinação linear de vetores de B, o que contraria o fato de que $v_0 \notin W$. Assim, temos que $\alpha_0 = 0$ e $\alpha_1 v_1 + \ldots + \alpha_r v_r = 0$. Como sabemos que B é linearmente independente,

$\alpha_1 = \ldots = \alpha_r = 0$, concluindo assim que $B_0 \in E$ com $B \subset B_0$. Mas, B é um elemento maximal de E não podendo ocorrer tal inclusão. Portanto, só podemos ter que $V = W$ e que B é base de V.

□

3.3.4 CARDINALIDADE DE PRODUTOS CARTESIANOS

É conhecido que o Axioma da Escolha é equivalente ao fato de que todo conjunto infinito A satisfaz: $|A \times A| = |A|$ (a cardinalidade do produto cartesiano $A \times A$ é igual a cadinalidade de A.). Começaremos com alguns exemplos iniciais de conjuntos que satisfazem tal igualdade, utilizando o Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder (Teorema 2.1) para demonstrar tal fato.

Exemplo 3.6: $|\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$

Demonstração. Claramente, a função $g\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, definida por $g(n) = (n, 0)$, para todo $n \in \mathbb{N}$, é injetora. Consideremos agora, a função $h\colon \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, dada por $h((r,s)) = 2^r.3^s$, para todos $r, s \in \mathbb{N}$, que também é injetora, pois todo número se decompõe, de uma única maneira, em fatores primos (Teorema Fundamental da Aritmética - ver Conway [2, p. 77]). Finalmente, pelo Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, temos que $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}|$ □

Exemplo 3.7: $|(0,1)| = |(0,1) \times (0,1)|$

Demonstração. Consideremos a inclusão $g\colon (0,1) \longrightarrow (0,1) \times (0,1)$ dada por $g(x) = (x, 0)$, para todo $x \in (0,1)$, que é injetora. Agora, vamos definir $h\colon (0,1) \times (0,1) \longrightarrow (0,1)$ de maneira que também seja injetora.

Dados $a, b \in (0,1)$, consideremos a expansão binária infinita (que existe e é única - ver Oliveira [4]) de a e b da seguinte forma:

$$a = 0, a_1 a_2 \ldots a_n \ldots \qquad \text{e} \qquad b = 0, b_1 b_2 \ldots b_n \ldots$$

com $a_i, b_i \in \{0, 1\}$, para todo $i \in \mathbb{N}$, sendo $\{i\colon a_i \neq 0\}$ e $\{i\colon b_i \neq 0\}$ conjuntos infinitos. Então, consideremos $h((a,b)) = 0, a_1 b_1 a_2 b_2 \ldots a_n b_n \ldots$. A última expressão é a expansão binária do número $h((a,b))$, o que prova que h é função e que é injetora. Utilizando o Teorema de Cantor-Bernstein-Schröeder, temos que $|(0,1)| = |(0,1) \times (0,1)|$ □

Os fatos provados nos exemplos anteriores, nos permitem concluir algo mais geral. Como já vimos na Subseção 2.2, $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{N}|$ e $|\mathbb{R}| = |(0,1)|$. Usando o Princípio da Indução Finita, podemos obter que, para todo $n \in \mathbb{N}^*$, $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{Q}|$ e $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$. De fato, se supormos que vale $|\mathbb{Q}^n| = |\mathbb{N}|$, devemos provar que $|\mathbb{Q}^{n+1}| = |\mathbb{N}|$.

Sabemos que existem as funções bijetoras $f\colon \mathbb{Q}^n \longrightarrow \mathbb{N}$ e $g\colon \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{N}$. Então, é de fácil verificação que a função definida na sequência é bijetora:

$$\begin{array}{rccc} h\colon & \mathbb{Q}^n \times \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ & (r, q) & \longmapsto & (f(r), g(q)) \end{array}.$$

Daí, $|\mathbb{Q}^{n+1}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = |\mathbb{N}|$. De maneira análoga, podemos provar que $|\mathbb{R}^n| = |\mathbb{R}|$.

Estes exemplos podem nos fazer questionar sobre a cardinalidade de um produto cartesiano de um conjunto com ele mesmo. De fato, se A for um conjunto finito, como por exemplo, com três elementos, $|A \times A| = 9$. Mas, quando falamos sobre conjuntos infinitos, temos a significativa equipotência como já comentada no início desta seção: $|A| = |A \times A|$. Tal fato é conhecido como Teorema de Tarski.

3.3.5 FUNÇÕES ADITIVAS

Definição 3.9: Uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é *aditiva* se verifica a seguinte condição:

$$\text{para todo } x, y \in \mathbb{R},\ f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Um fácil exemplo de função aditiva pode ser obtido da seguinte maneira: utilizando o Axioma da Escolha, fixamos $a \in \mathbb{R}$ e consideremos $f_a\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por $f_a(x) = ax$, para todo $x \in \mathbb{R}$.

Facilmente podemos observar que: $f_a(x) = ax$ e $f_a(y) = ay$ implicam em $f_a(x) + f_a(y) = ax + ay = a(x+y) = f_a(x+y)$, para todo $x, y \in \mathbb{R}$.

Uma pergunta que pode surgir é a seguinte: seria toda função aditiva também uma transformação linear? Vejamos o resultado que segue.

Proposição 3.7: Existe uma função $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ que é aditiva, mas não linear.

Demonstração. De fato, seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo dos racionais $\mathbb{Q}$. Então V tem dimensão infinita (de fato, se E é uma base de V, então $|E| = 2^{\aleph_0}$ - ver [3, p. 148]). É fácil ver que, se $B = \{1, \sqrt{2}\}$, então B é um conjunto linearmente independente deste espaço vetorial. Podemos extender B, utilizando o Lema de Zorn e, portanto, o Axioma da Escolha, a uma base E de V. Consideremos a função linear $f\colon V \longrightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(1) = 1$ e $f(v) = 0$ para todo $v \in E \setminus \{1\}$. Portanto, tal função é aditiva em $\mathbb{R}$, pois é linear em V. Mas, não é linear em $\mathbb{R}$, pois se fosse, $0 = f(\sqrt{2}) = \sqrt{2}.f(1) = \sqrt{2}.1 = \sqrt{2}$, o que nos levaria a um absurdo. □

Uma outra pergunta interessante que podemos fazer é: existe alguma função aditiva em $\mathbb{R}$ que não seja da forma f_a para algum $a \in \mathbb{R}$? De fato, podemos enunciar o seguinte resultado:

Teorema 3.4: Existe uma função aditiva $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tal que $f \neq f_a$ para todo $a \in \mathbb{R}$.

Demonstração. Seja V o espaço vetorial $\mathbb{R}$ sobre o corpo dos racionais. Considere B uma base para V dada por $B = \{x_i : i \in I\}$, sendo I um conjunto infinito de índices. Utilizando o Axioma da Escolha, fixemos $i_o \in I$.

Deste modo, definamos:

$$f(x) = \begin{cases} \alpha_{i_0}, & \text{se } x = \displaystyle\sum_{j=1}^{n_x} \alpha_j x_j \text{ e existe } j, 1 \leq j \leq n_x, \text{ tal que } j = i_0. \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Vejamos que f é uma função aditiva em $\mathbb{R}$. Sejam $x, y \in \mathbb{R}$. Então $x = \sum_{j=1}^{n_x} \alpha_j x_j$ e $\sum_{k=1}^{n_y} \beta_k x_k$, com $n_x, n_y > i_0$ e $\alpha_j, \beta_k \in \mathbb{Q}$, $j = 1, \ldots, n_x$ e $k = 1, \ldots, n_y$. Dividimos em casos:

(i) Se $\alpha_{i_0} = \beta_{i_0} = 0$, então $f(x) + f(y) = 0 + 0 = 0 = f(x+y)$.

(ii) Se $\alpha_{i_0} = 0$ e $\beta_{i_0} \neq 0$, então $f(x) + f(y) = 0 + \beta_{i_0} = f(x+y)$.

(iii) Se $\alpha_{i_0} \neq 0$ e $\beta_{i_0} = 0$, então $f(x) + f(y) = \alpha_{i_0} + 0 = f(x+y)$.

(iv) Se $\alpha_{i_0} \neq 0$ e $\beta_{i_0} \neq 0$, então $f(x) + f(y) = \alpha_{i_0} + \beta_{i_0} = f(x+y)$.

Agora, suponhamos (utilizando, novamente, o Axioma da Escolha) que $f(x) = ax$ para algum $a \in \mathbb{R}$ e para todo $x \in \mathbb{R}$ (a função escolha, aqui, tem domínio no conjunto dos números reais). Pela suposição, teríamos $f(x_{i_0}) = ax_{i_0}$. Teríamos também que como x_{i_0} é um elemento da base B e $x_{i_0} = 1.x_{i_0}$, então $f(x_{i_0}) = 1$. Por todos estes fatos, resulta que $a \neq 0$, pois $x_{i_0} \neq 0$, por ser um elemento da base. Agora, utilizando o Axioma da Escolha, tomemos $i \in I$, com $i \neq i_0$. Assim, $f(x_i) = 0$. Também, $x_i \neq 0$, pois é vetor de base. Ainda, pela hipótese sobre f, $0 = f(x_i) = ax_i$, obtendo ao fim que $a = 0$. A partir do que acabamos de ver, chegamos a um absurdo. Finalmente, concluímos que a função f, como definida, é aditiva, mas não é da forma f_a para nenhum $a \in \mathbb{R}$.

$\square$

REFERÊNCIAS

[1] R. A. Alencar e Z. Abud: *"Quantos tem?" Para Conjuntos Infinitos*. Revista do Professor de Matemática (RPM), 57:41–48, 2005.

[2] J. B. Conway: *Functions of One Complex Variable*. Springer-Verlag, Berlin, 1978.

[3] K. Hrbacek e T. Jech: *Introduction to Set Theory, 220 of Pure and Applied Mathematics: A Series of Monographs and Textbooks*. Taylor & Francis Group, LLC, 3ª ed., 1999.

[4] O. Oliveira: *Notas de Cálculo IV - Expansão Binária, C2008*. Disponível em: www.ime.usp.br/ oliveira/binaria.pdf, 2013.

[5] Y. Sagher: *Counting the rationals*. Amer. Math. Monthly, 96, 1989.

[6] G. Ávila: *A Teoria dos Conjuntos e o Ensino de Matemática*. Revista do Professor de Matemática (RPM), 4:4–8, 1984.