O PROBLEMA DA LOCALIZAÇÃO ÓTIMA DE UM CAIXA ELETRÔNICO

Rodrigo Silva Lima
Universidade Federal de Itajubá
rodlima82@gmail.com

RESUMO

Neste trabalho lidamos com a tarefa de modelar e resolver o seguinte problema: como posicionar um caixa eletrônico dentro do campus de uma universidade de forma que grande parte da comunidade acadêmica seja beneficiada com sua localização? Formulamos esta situação como um problema de otimização com restrições e o resolvemos aplicando o Método dos Multiplicadores de Lagrange. Este problema foi proposto a uma turma de engenharia da Universidade Federal de Itajubá com o objetivo de aplicar a teoria aprendida no curso de Cálculo de Várias Variáveis.

ABSTRACT

In this work we deal with the task of model and solve the following problem: how to place a cash machine into the campus of an university in order to benefit the academic community with its location? We formulate this situation as a constrained optimization problem and we solve this problem using the Method of Lagrange multipliers. This task was posed to an engineering class of the Federal University of Itajubá as an application of the theory learned in the course of Multivariable Calculus.

Palavras-chave: modelagem, otimização, multiplicadores de Lagrange.

1 INTRODUÇÃO

Um dos tópicos do Cálculo de Várias Variáveis que os estudantes de engenharia têm bastante dificuldade é o de resolver problemas de otimização [1, 2]. As dificuldades estão, principalmente, na modelagem do problema: identificar a função que será minimizada ou maximizada (função objetivo), saber quais são as variáveis e descrever matematicamente as restrições envolvidas.

Como forma de motivar os alunos a lidar com a teoria aprendida no curso de Cálculo de Várias Variáveis, propusemos a uma turma de engenharia da Universidade Federal de Itajubá (UNIFEI) a modelagem e resolução de um problema concreto: o posicionamento ótimo de um caixa eletrônico dentro do campus da universidade. A ideia deste projeto aplicado partiu de uma audiência pública realizada em agosto de 2013, quando toda a comunidade da UNIFEI foi convocada para debater sobre a possibilidade de implantar no campus de Itajubá um terminal eletrônico multifuncional 24 horas. De acordo com o prefeito do campus, das 688 pessoas que participaram da audiência (alunos, funcionários e professores), 649 votaram pela aquisição do novo terminal. Uma vez aprovada a implantação, surgiram algumas questões pertinentes: onde o terminal ficaria localizado? Próximo a qual instituto? É justo que o terminal fique próximo a um determinado instituto e beneficie somente uma parcela da comunidade acadêmica? Todas estas questões nortearam a elaboração do projeto proposto aos alunos.

O projeto foi dividido em duas partes: na primeira parte os estudantes precisavam posicionar apenas um terminal eletrônico dentro do campus da UNIFEI respeitando algumas condições impostas na formulação do problema. Já na segunda parte, consideramos a tarefa hipotética de implantar dois terminais dentro da universidade. Para realizar o trabalho, a turma deveria se dividir em equipes de três ou quatro alunos e entregar um relatório final com os resultados obtidos para integrar o processo de avaliação na disciplina de Cálculo de Várias Variáveis.

Neste trabalho, descrevemos o problema estudado e o resolvemos empregando o Método dos Multiplicadores de Lagrange [1, 2]. Interpretamos graficamente os resultados obtidos e relatamos também como foi a experiência de aplicar este projeto aos alunos de engenharia da UNIFEI. O texto está organizado da seguinte forma: na Seção 2 detalhamos a formulação do problema. Na seção 3 apresentamos os resultados obtidos e descrevemos brevemente como o projeto foi recebido pelos alunos, por fim, na Seção 4 concluímos o trabalho e sugerimos algumas ideias para um trabalho futuro.

2 Formulação do problema

A Figura 1, retirada da ferramenta *Google Maps* (https://www.google.com/maps), ilustra o campus da Universidade Federal de Itajubá. Tomando o ponto A indicado na figura como a origem do plano cartesiano, marcamos no mapa cinco pontos com grande circulação de pessoas e obtivemos, aproximadamente, as coordenadas destes pontos:

$$\begin{aligned} B &= (-0.8, 1) \quad \text{Instituto de Recursos Naturais,} \\ C &= (2.8, 2.3) \quad \text{Instituto de Sistemas Elétricos e Energia,} \\ D &= (5.4, 2.8) \quad \text{Bloco X de salas de aula,} \\ E &= (3.3, 0.5) \quad \text{Instituto de Engenharia Mecânica,} \\ F &= (4.5, -1) \quad \text{Instituto de Matemática e Computação.} \end{aligned} \tag{1}$$

Propomos, então, duas situações:

1. Posicionar $T_1 = (x_1, y_1)$ no mapa em algum lugar da linha reta que passa pelos pontos B e D de tal forma que a soma do quadrado das distâncias entre T_1 e cada um dos pontos B, C, D, E e F seja mínima.
2. Posicionar dois terminais $T_1 = (x_1, y_1)$ e $T_2 = (x_2, y_2)$ no mapa de forma que as seguintes condições sejam cumpridas:
   a) a soma do quadrado das distâncias entre cada terminal e os pontos B, C, D, E e F deve ser a menor possível,
   b) o terminal T_1 deve ficar distante do Instituto de Matemática e Computação (ponto F) em, no máximo, 2 unidades de comprimento,
   c) a distância entre T_1 e T_2 deve ser no mínimo de 2 e, no máximo, de 5 unidades de comprimento.

Cada uma das situações descritas pode ser modelada como um problema de otimização com restrições nas variáveis. Na situação 1., para construir a função objetivo, basta calcularmos o quadrado da distância entre $T_1 = (x_1, y_1)$ e cada ponto do conjunto $\{B, C, D, E, F\}$ e somarmos os resultados:

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1) &= (x_1 + 0.8)^2 + (y_1 - 1)^2 + (x_1 - 2.8)^2 + (y_1 - 2.3)^2 + (x_1 - 5.4)^2 \\ &+ (y_1 - 2.8)^2 + (x_1 - 3.3)^2 + (y_1 - 0.5)^2 + (x_1 - 4.5)^2 + (y_1 + 1)^2. \end{aligned}$$

Simplificando a expressão anterior, podemos escrever

$$f(x_1, y_1) = 5x_1^2 + 5y_1^2 - 30.4x_1 - 11.2y_1 + 84.16. \tag{2}$$

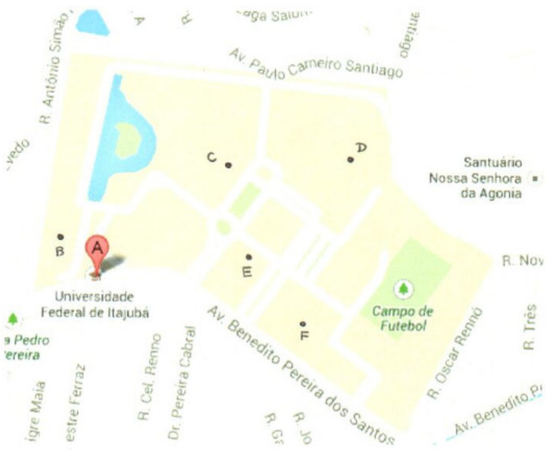

FIGURA 1: Vista aérea do campus da UNIFEI em Itajubá.

Além disso, a equação da reta é dada por $g(x, y) = 0.290323x - y + 1.232258$. Como $T = (x_1, y_1)$ pertence à reta, $g(x_1, y_1) = 0$. Portanto, na situação 1. precisamos resolver o seguinte problema de otimização

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x_1, y_1) \\ \text{restrita a} \quad & g(x_1, y_1) = 0. \end{aligned} \tag{3}$$

No caso do problema com dois terminais, como proposto na situação 2., devemos

$$\begin{aligned} \text{minimizar} \quad & f(x_1, y_1, x_2, y_2) \\ \text{restrita a} \quad & \|\mathrm{T}_1 - F\|^2 \leq 4, \\ & \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2\|^2 \geq 4, \\ & \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{T}_2\|^2 \leq 25, \end{aligned} \tag{4}$$

onde

$$\begin{aligned} f(x_1, y_1, x_2, y_2) \;=\; & \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{B}\|^2 + \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{C}\|^2 + \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{D}\|^2 + \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{E}\|^2 + \|\mathrm{T}_1 - \mathrm{F}\|^2 \\ + \; & \|\mathrm{T}_2 - \mathrm{B}\|^2 + \|\mathrm{T}_2 - \mathrm{C}\|^2 + \|\mathrm{T}_2 - \mathrm{D}\|^2 + \|\mathrm{T}_2 - \mathrm{E}\|^2 + \|\mathrm{T}_2 - \mathrm{F}\|^2, \end{aligned} \tag{5}$$

e $\|\cdot\|$ representa a norma euclidiana. Note que as funções que definem cada restrição em (4) foram construídas para que sejam diferenciáveis no espaço das variáveis.

3 RESULTADOS OBTIDOS

Uma vez formulados os problemas (3) e (4), passamos para a busca pela solução ótima. Ambos os problemas podem ser resolvidos via método dos multiplicadores de Lagrange. Em particular, o problema (3) é bem simples de resolver, pois possui apenas uma restrição de igualdade. Na turma da UNIFEI onde este projeto foi aplicado, os alunos foram orientados a resolver (3) usando lápis e papel. Em seguida, eles deveriam interpretar graficamente os cálculos realizados. Nesta etapa pudemos avaliar a percepção geométrica dos estudantes através da construção de gráficos e curvas de nível da função minimizada.

Aplicando o método dos multiplicadores de Lagrange no problema (3), obtemos o seguinte sistema de equações

$$\left\{ \begin{aligned} \nabla f(x, y) &= \lambda \nabla g(x, y) \\ g(x, y) &= 0 \end{aligned} \right. \Longrightarrow \left\{ \begin{aligned} 10x - 30.4 &= 0.290323\lambda \\ 10y - 11.2 &= -\lambda \\ 0.290323x - y + 1.232258 &= 0 \end{aligned} \right. \tag{6}$$

cuja solução é $x_1^* \approx 2.77363$, $y_1^* \approx 2.03751$, $\lambda^* \approx -9.17506$. É fácil ver que o ponto (x_1^*, y_1^*) é, de fato, um minimizador para a função objetivo do problema (3). Com efeito, quando restringimos a função $f(x_1, y_1)$ à reta $g(x_1, y_1) = 0$, seu gráfico torna-se uma parábola com concavidade voltada para cima, cujo ponto de mínimo é $T_1 = (x_1^*, y_1^*)$. Note, na Figura 2, que o ponto ótimo T_1 (verde) está sobre a reta que une os pontos B e D. Algumas curvas de nível da função $f(x_1, y_1)$ também são mostradas. Observe que existe uma curva de nível tangente à reta em T_1. No ponto de tangência os vetores gradientes $\nabla f(x_1^*, y_1^*)$, $\nabla g(x_1^*, y_1^*)$ são múltiplos e a constante de multiplicidade é exatamente igual a λ^*, ou seja, $\nabla f(x_1^*, y_1^*) = \lambda^* \nabla g(x_1^*, y_1^*)$. Esta situação está representada graficamente na Figura 3. A grande maioria dos estudantes encontrou dificuldades em construir a função objetivo do problema (3) e algumas de suas curvas de nível.

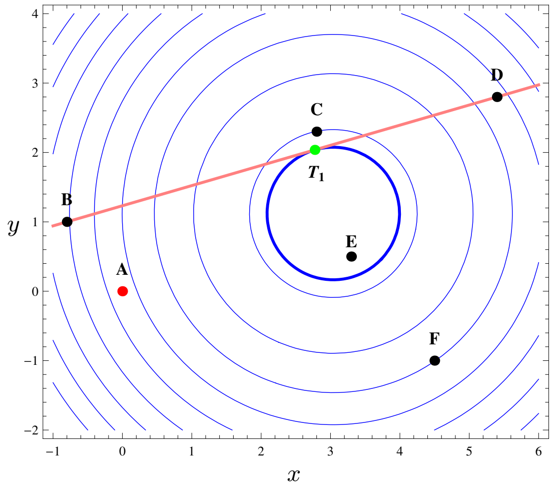

FIGURA 2: Solução para o problema de otimização com uma restrição de igualdade.

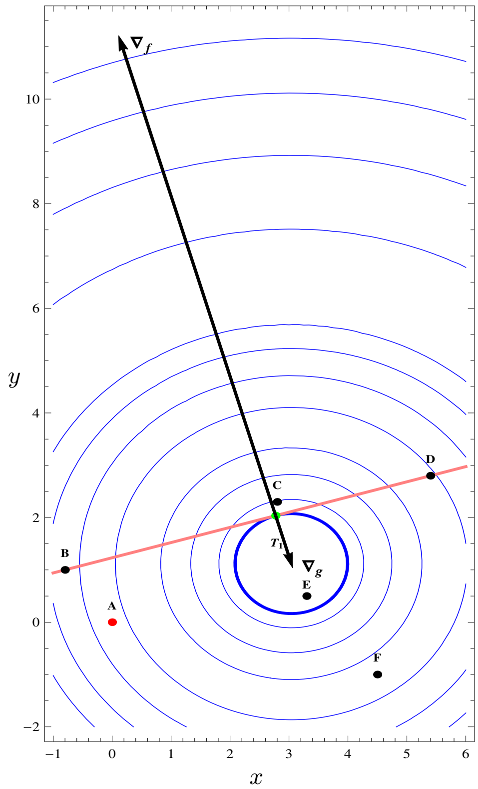

FIGURA 3: Interpretação gráfica para o multiplicador de Lagrange do problema (3).

A tarefa de resolver o problema (4) à mão é um pouco penosa. Nesta etapa do projeto, cobramos dos estudantes apenas a formulação do problema e permitimos que eles utilizassem um pacote computacional para encontrar, aproximadamente, a solução de (4). Sugerimos, para tanto, o uso de NEOS (http://www.neos-server.org/neos/). NEOS é uma plataforma *online* elaborada para resolver problemas de otimização via métodos numéricos [3]. A plataforma contém uma variedade de *solvers*. Para interagir com NEOS, o usuário precisa executar três passos: criar um arquivo texto com a formulação do problema escrita em linguagem apropriada, fazer o *upload* do arquivo e escolher um *solver* adequado ao problema formulado. Recomendamos aos alunos que escolhessem o *solver* LANCELOT [4]. LANCELOT é capaz de resolver numericamente problemas de otimização com restrições empregando um método de Lagrangiano Aumentado [3]. O ponto de partida deste método numérico consiste em montar o sistema não linear das condições de otimalidade do problema. É neste sistema que aparecem os multiplicadores de Lagrange.

Após a submissão do arquivo e resolução do problema, NEOS envia por correio eletrônico a solução encontrada. No caso do problema (4), obtivemos a seguinte resposta:

```
You are using the solver lancelot.
Executing AMPL.
processing data.
processing commands.

4 variables, all nonlinear
3 constraints, all nonlinear; 10 nonzeros
3 inequality constraints
1 nonlinear objective; 4 nonzeros.

LANCELOT: problem solved.
17 iterations; objective 73.35999996
M = 3, N = 7, nslacks = 3, NEL = 6, NG = 140733193388055
4 nontrivial linear maps reduce 8 variables to 4.
NFCALL = 18, NGCALL = 16
x1 = 2.86661
y1 = 0.135147
x2 = 3.21339
y2 = 2.10485
```

De acordo com o resultado fornecido, as coordenadas ótimas dos terminais eletrônicos são, aproximadamente,

$$T_1 = (2.86661, 0.135147) \quad \text{e} \quad T_2 = (3.21339, 2.10485).$$

A Figura 4 ilustra o posicionamento dos caixas dentro do campus da universidade. A restrição de que o terminal T_1 não deve ficar distante mais que 2 unidades de comprimento do ponto F, está indicada em azul.

A ideia de utilizar um pacote computacional para buscar a solução aproximada de um problema concreto foi recebida com entusiasmo pelos estudantes avaliados. Acreditamos que parte deste entusiasmo se deve ao fato do projeto aplicado fugir ao tradicionalismo dos cursos de Cálculo da UNIFEI: lousa, giz, aulas expositivas e exemplos resolvidos. Ao realizar o projeto, os alunos puderam aplicar a teoria aprendida no curso de Cálculo de Várias Variáveis para formular e resolver um problema do dia-a-dia da universidade.

4 CONCLUSÕES

Neste trabalho propusemos um problema de Cálculo de Várias Variáveis a uma turma de engenharia da Universidade Federal de Itajubá. O problema explorou uma situação real

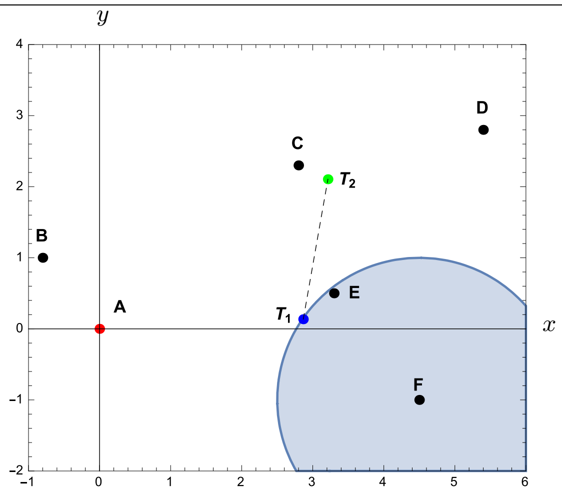

FIGURA 4: Posição ótima dos terminais dentro do campus da UNIFEI em Itajubá.

que ocorreu dentro da universidade: como posicionar um terminal eletrônico no campus de forma a beneficiar da melhor maneira possível a comunidade acadêmica. Os alunos formularam e resolveram esta situação como um problema de otimização com restrições e o resolveram usando o método dos multiplicadores de Lagrange. Uma parte do trabalho consistiu em resolver o problema à mão e interpretar a solução por meio de gráficos. Outra parte consistiu em utilizar uma plataforma *online* para resolver o problema numericamente. O trabalho foi bem recebido entre os alunos, principalmente por interferir no tradicional curso de Cálculo das aulas expositivas. A situação descrita neste texto pode se tornar ainda mais interessante se considerarmos um número maior de terminais para serem implantados dentro do campus, ou, por exemplo, se incluirmos na modelagem do problema a hipótese de que um aluno que sai de sua aula deve realizar o menor caminho possível para chegar ao caixa eletrônico dentro do campus. Estes assuntos podem ser desenvolvidos em trabalhos finais de graduação ou servir de temas para iniciações científicas. O livro [5] contém também excelentes ideias de projetos que podem ser desenvolvidos em disciplinas de Cálculo dos cursos de ciências exatas.

REFERÊNCIAS

[1] J. Stewart, *Cálculo - Volume 2.* Cengage Learning, 2013.

[2] H. L. Guidorizzi, *Um Curso de Cálculo - Volume 2.* LTC, 2002.

[3] J. Nocedal and S. J. Wright, *Numerical Optimization.* Springer, 2006.

[4] A. R. Conn, N. I. M. Gould, and P. L. Toint, “A globally convergent augmented lagrangian algorithm for optimization problems and simple bounds,” *SIAM Journal on Numerical Analysis*, vol. 28, pp. 545–572, 1991.

[5] V. L. X. Figueiredo, M. P. Mello, and S. A. Santos, *Cálculo com Aplicações: Atividades Computacionais e Projetos.* IMECC, 2005.