UM ESTUDO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Cleyton Amaral
Universidade Federal de Uberlândia
cleytondsa@hotmail.com

Marcus Souza
Universidade Federal de Uberlândia
nunio11@hotmail.com

Thiago Catalan
Universidade Federal de Uberlândia
thiagocatalan@gmail.com

RESUMO

O Método de Newton-Raphson é um eficiente método para se obter aproximação de raízes de funções reais. No entanto, os livros de cálculo em geral trazem apenas um estudo e aplicação de tal método no caso específico de funções de classe C^2, cujas derivadas de primeira ordem não se anulam em um intervalo contendo alguma raiz. Porém, desde que sabemos da existência de muitos exemplos de funções deriváveis possuindo raízes onde a derivada se anula, polinômios do tipo x^n $(n \geq 2)$, por exemplo, é natural indagarmos se existe a possibilidade do método de Newton-Raphson também funcionar nestes casos. Neste texto apresentamos um completo estudo sobre tal questionamento.

ABSTRACT

The Newton-Raphson method is an efficient method to obtain approximation of roots of real maps. However, the calculus books usually bring a study and application of such a method for specific C^2 maps, whose first derivatives do not vanish in an interval containing a root. However, provided the existence of many examples of differentiable maps having roots which also vanish the derivative, polynomials $x^n(n \geq 2)$ for example, it is natural to ask about the possibility of the Newton-Raphson method also works in these cases.

Palavras-chave: Método de Newton-Raphson, zeros de funções.

1 INTRODUÇÃO

Muitos problemas do cotidiano, desde fazer uma simples conta de quanto se economiza na compra de um pão a uma complexa previsão na Bolsa de Valores, por exemplo, podem ser resolvidos via o estudo e análise de funções. Mais ainda, as soluções de muitos destes problemas estão relacionadas a encontrar os zeros de certas funções, mais precisamente, saber onde estas se anulam.

Matemáticos tentam obter resultados nesta direção desde a antiga Babilônia. Já nesta época, matemáticos e filósofos sabiam calcular as raízes exatas (os zeros) de polinômios do segundo grau. Hoje em dia, qualquer estudante de colégio sabe usar o método de Bhaskara para se obter tais raízes. Infelizmente o cenário não é tão bom no caso geral. Por exemplo, mesmo no caso de polinômios, Abel mostrou que não existe uma forma algébrica para se calcular exatamente as raízes de polinômios com grau maior ou igual a 5. Veja [1]. No caso de polinômios de grau 3 e 4, temos os métodos de Cardano e Ferrari, respectivamente. Veja [2].

Sendo assim, movido pela impossibilidade de expressar exatamente os zeros de funções, um caminho natural foi a busca por métodos de se obter ao menos uma aproximação deles. Um dos mais famosos é o método de Newton. Este método é interessante não só por fornecer uma aproximação das raízes, mas também pela velocidade computacional que o faz.

Tal método também é conhecido como Método de Newton-Raphson. Isto porque Newton e Raphason criaram o mesmo método simultaneamente. Isaac Newton(1642-1727) escreveu o método que leva seu nome em 1671 em seu livro "Método de Fluxões" que só foi publicado em 1736 (veja [5]). Nele, o físico exemplifica seu resultado encontrando a raiz da equação $x^3 - 2x - 5 = 0$, com valores entre 2 e 3. Enquanto Joseph Raphson (1648-1715), um homem que pouco se sabe e que tem sua fama graças a este método e por cunhar o termo "panteísmo", também descobriu a mesma técnica porém de forma um pouco mais simples; mais próxima da que conhecemos atualmente. Ela apareceu em seu livro "Analysis aequationum universalis" de 1690 (veja [7]). Ou seja, 46 anos antes da publicação do livro de Newton.

O método de Newton-Raphson, em seu estado mais básico, consiste em uma ideia bem simples: aplicar sucessivamente uma "fórmula" a partir de um valor inicial; o que é conhecido como *método de aproximações sucessivas*. Em outras palavras, dada a função para qual desejamos encontrar uma raiz, escolhe-se um valor inicial a partir de uma certa análise da função dada, e aplica-se uma certa fórmula a este valor repetidamente, obtendo assim uma sequência de pontos a qual convergirá a uma raiz da função.

Mais precisamente, consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$ possuindo derivada contínua e não nula em todo ponto do intervalo I. Tomando $x_0 \in I$, definimos $x_1 = x_0 - \dfrac{f(x_0)}{f'(x_0)}$. Se x_1 também pertence a I, fica bem definido o número $x_2 = x_1 - \dfrac{f(x_1)}{f'(x_1)}$. Assim, se for possível definir uma sequência de pontos em I usando indutivamente o processo acima, e ainda tal sequência for convergente, então o limite desta será uma raiz da função f. Basta observarmos que fazendo n tender a infinito nos dois lados da equação

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})},$$

e denotando por a o limite da sequência (x_n), teremos que

$$a = a - \frac{f(a)}{f'(a)}.$$

Logo, $f(a) = 0$.

Tal método possui uma interpretação geométrica. Isto é, dado um valor inicial x_0, tomamos a reta tangente ao gráfico de f em x_0, e definimos o número x_1 como sendo o ponto de interseção desta reta com o eixo das abscissas. Veja Figura 1. Repetindo o processo indutivamente, se possível, obtemos a sequência anterior.

No entanto, enfatizamos agora que muitos são os exemplos de funções deriváveis possuindo raízes onde a derivada se anula, por exemplo, polinômios do tipo x^n $(n \geq 2)$. Assim, é natural nos perguntarmos se existe a possibilidade do método de Newton-Raphson também funcionar neste caso. Neste sentido Ralston e Rabinowitz [6] (veja também [3]) mostraram que sabendo a multiplicidade algébrica da raiz da função, a menos de uma pequena alteração na definição dos termos sucessivos do método de Newton-Raphson, esta sequência de pontos convergirá para a raiz múltipla. Porém, neste caso é fundamental sabermos de início qual a multiplicidade da raiz.

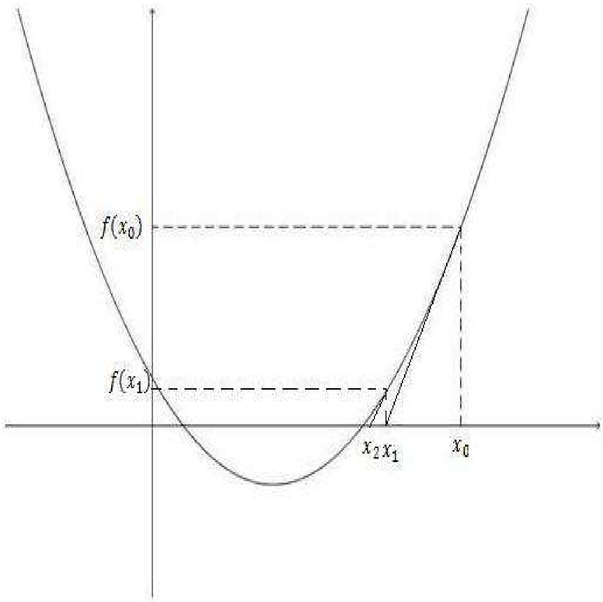

FIGURA 1: Interpretação geométrica método de Newton-Raphson.

O objetivo deste texto é apresentar um completo estudo sobre o questionamento da convergência ou não do Método de Newton-Raphson no caso de raízes múltiplas, sem alterar a fórmula original como feito por Ralston e Rabinowitz. Destacamos que tal estudo nos garantirá a convergência do método de Newton-Raphson no caso Analítico (Veja observação 2.1).

Convém ressaltar que desconhecemos a existência de algum estudo ou análise similar a realizada aqui.

2 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função derivável. Assim, fica bem definida para todo ponto de I onde a derivada de f não se anula a seguinte função:

$$N_f(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}.$$

Dizemos que $x \in I$ é um ponto fixo para N_f se $N_f(x) = x$. Observemos neste caso, que se x é um ponto fixo para N_f então x é uma raiz para f.

O que é bem conhecido, é que o método de Newton-Raphson vale quando a aplicação f possui segunda derivada contínua em um intervalo I, e ainda a primeira derivada não se anula nos pontos de I. Isto é, se J é um intervalo pequeno em I, contendo uma raiz, então para todo ponto $x_0 \in J$ fica bem definida a sequência $(N_f^k(x_0))_{k\in\mathbb{N}}$ (onde $N_f^k(\ . \ )$ denota a função composta de k-vezes $N_f(\ . \ )$) a qual deve convergir para a raiz. Veja [4]. Convém ressaltar que o fato de a derivada de f não se anular em I implica que existe no máximo uma raiz em I para f.

Tal acontecimento é uma consequência do *Teorema do Valor Médio* e de um outro resultado conhecido como *Teorema do Ponto Fixo das Contrações*. Informalmente este último teorema nos diz que se f é uma contração definida num intervalo fechado então $f^n(x)$ deve convergir para um único ponto fixo existente de f. Segue que uma *função f é uma contração* se existir $0 < \lambda < 1$ tal que $|f(x) - f(y)| < \lambda|x - y|$ para todo ponto x e y do domínio de f.

No que segue relembramos de uma maneira resumida a demonstração do Método de Newton-Raphson: Como f possui segunda derivada contínua, se a é uma raiz de f com $f'(a) \neq 0$, então a função N_f possui derivada contínua, e ainda $N_f'(a) = 0$. Assim, por continuidade da derivada de N, $|N'_f(x)| < 1$ para todo x pertencendo a um intervalo $J \subset I$, contendo a. Logo, como consequência do Teorema do Valor Médio temos que a função N_f é uma contração neste intervalo, e portanto pelo Teorema do Ponto Fixo das Contrações, dado qualquer ponto $x \in J$, $N_f^n(x)$ converge ao único ponto fixo de J, em particular a única raiz de f em I.

Agora, o que fazer no caso em que uma função possui uma raiz onde a derivada também se anula?

Vejamos algumas situações abaixo.

Exemplo 1: Seja $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^n$, para $n \in \mathbb{N}$ arbitrário. Como $f'(x)$ se anula somente no zero, podemos definir $N_f(x)$ para todo x não nulo, como segue:

$$N_f(x) = x - \frac{x^n}{nx^{n-1}}.$$

No entanto, simplificando, temos que

$$N_f(x) = x - \frac{x}{n},$$

e assim podemos estender continuamente N_f para $x = 0$. E mais, $x = 0$ não só é um ponto fixo para tal, como é o único. O que pode ser verificado analiticamente, assim como feito anteriormente, usando o Teorema do Valor Médio e o Teorema do Ponto Fixo das Contrações. De fato $|N'_f(x)| = 1 - \frac{1}{n} < 1$, para todo $x \in \mathbb{R}$. E portanto, temos que para qualquer $x_0 \in \mathbb{R}$ fixado, $N_f^k(x_0)$ converge para $x = 0$, quando $k \to \infty$.

Por outro lado, temos o seguinte exemplo:

Exemplo 2: Consideremos as seguintes funções reais:

$$f(x) = \begin{cases} e^{\frac{-1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

e

$$g(x) = \begin{cases} e^{\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

Observemos que f e g são funções C^∞, e assim como no caso polinomial fica bem definido N_f e N_g para todo x não nulo, pois $f'(x)$ e $g'(x)$ não se anulam para $x \neq 0$. Mais ainda, simplificando temos que

$$N_f(x) = x - \frac{x^3}{2} \quad \text{e} \quad N_g(x) = x + \frac{x^3}{2},$$

e portanto podemos aqui também estender tais funções para $x = 0$. No entanto, observemos que como $N'_f(0) = N'_g(0) = 1$ as técnicas anteriores para encontrarmos um intervalo contendo a origem, se por acaso ele existir, tal que $N_f^k(x_0)$ e $N_g^k(x_0)$ convirja a $x = 0$ não funcionam aqui.

Olhando os gráficos das funções f e g, Figura 2, podemos observar que tomando x_0 próximo da origem, temos que $N_f^k(x_0)$ converge a origem, enquanto que $N_g^k(x_0)$ diverge, quando k vai para infinito. De fato, tomando $x > 0$ temos que

$$N_f(x) - x = -\frac{x^3}{2} < 0, \quad \text{e} \quad N_g(x) - x = \frac{x^3}{2} > 0,$$

e assim, $N_g(x) > x$, e se x é suficientemente pequeno temos que $0 < N_f(x) < x$. Note também que N_f é monótona numa vizinhança da origem. A análise para $x < 0$ é completamente análoga.

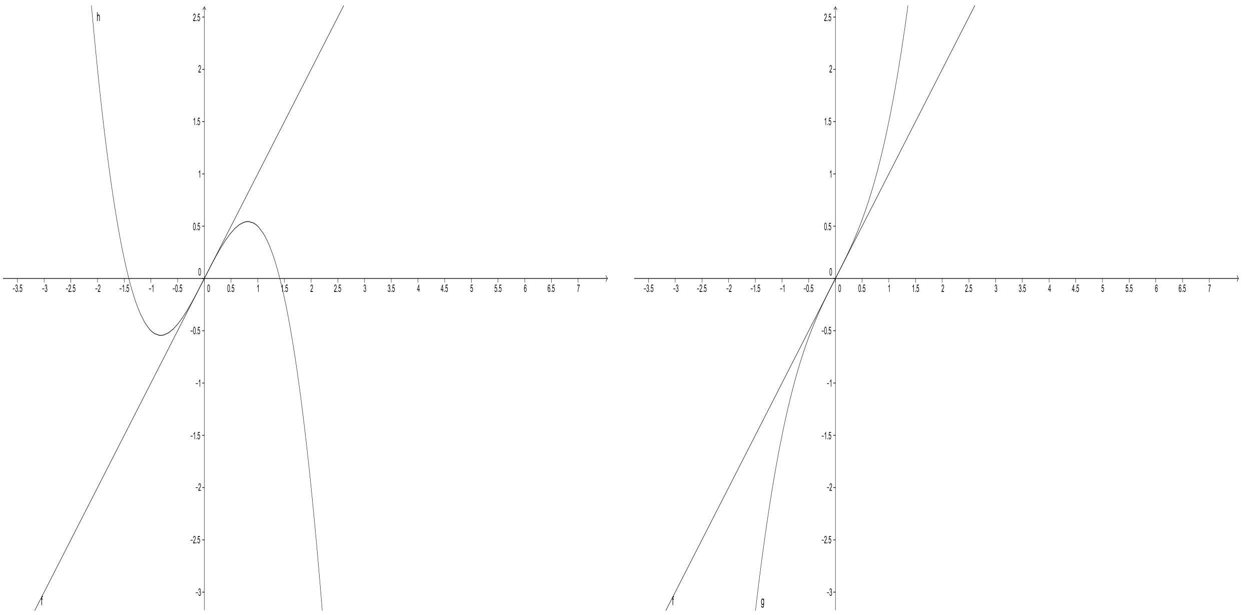

FIGURA 2: Gráficos de Nf e Ng

Façamos uma análise dos exemplos anteriores. No primeiro exemplo, temos que a $n-$ésima derivada da função não se anula na raiz da mesma. Isto é, temos uma raiz de f que não anula todas as derivadas de ordem superior de f, fato este que não se verifica no Exemplo 2, onde o zero é uma raiz de $f^{(n)}(x)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

O resultado seguinte nos garante a convergência do Método de Newton-Raphson exceto para funções possuindo raízes similares às do Exemplo 2.

Teorema 2.1: *Seja $f : I \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^{n+1} em I. Se $a \in I$ é uma raiz de f tal que suas $n-1$ primeiras derivadas se anulam em a, para todo i entre 0 e $n-1$, e a sua n-ésima derivada não se anula em a, então existe um intervalo $J \subset I$ contendo a tal que:*

(1) a é a única raiz de f em J.

(2) A função $N_f(x)$ está bem definida para $x \in J - \{a\}$,

(3) $N_f^k(x)$ converge para a, quando k tende para infinito, para todo $x \in J$.

Observação 2.1: *A grande diferença do Teorema acima para as análises de A. Ralston, P. Rabinowitz [6], é que aqui garantimos a convergência do Método Original sem alterações.*

Sendo assim, lembremos agora que dado um ponto qualquer x no domínio de uma função analítica f não constante, deve existir $n \in \mathbb{N}$ tal que $f^{(n)}(x)$ é diferente de zero (isto pelo fato de uma função analítica poder ser escrita como uma série de potências). Logo, temos que toda raiz de uma função analítica não constante satisfaz as hipóteses do Teorema 2.1, logo podemos usar o método de Newton-Raphson para encontrar os zeros de quaisquer funções analíticas não constantes (em particular funções polinomiais), sem a priori saber qual a multiplicidade algébrica da raiz.

3 DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1

Sem perda de generalidade podemos supor que $f^{(n)}(a) > 0$, desde que $f^{(n)}(a) \neq 0$. Assim, definindo $g(x) = f^{(n-1)}(x)$, temos que g é uma função C^1, e como $g'(a) > 0$, deve existir um intervalo $[a, c)$ onde a função $g'(x)$ é positiva, o que implica a função g ser estritamente crescente em $[a, c)$.

Logo, para todo $x \in [a, c)$, temos que $f^{(n-1)}(x) > f^{(n-1)}(a) = 0$. Usando o argumento anterior para qualquer ponto no intevalo (a, c), podemos concluir que a função $f^{(n-2)}(x)$ é de fato estritamente crescente no próprio intervalo (a, c). Mais ainda, temos novamente que $f^{(n-2)}(x) > f^{(n-2)}(a) = 0$ para todo $x \in (a, c)$. De fato, dado $x \in (a, c)$, pelo Teorema do valor Médio, existe $z \in (a, x) \subset (a, c)$, tal que

$$f^{(n-2)}(x) - f^{(n-2)}(a) = f^{(n-1)}(z)(x - a).$$

Repetindo este argumento $(n-2)$-vezes, podemos concluir que $f^{(j)}(x) > 0$, em particular $f^{(j)}(x) \neq 0$, para todo $0 \leq j \leq n-1$, e $x \in (a, c)$.

Analogamente, podemos encontrar $b < a$ tal que $f^{(j)}(x) \neq 0$ para todo $0 \leq j \leq n-1$, e $x \in (b, a)$.

Concluímos assim o item (1) tomando $J = (b, c)$. Mais ainda, desde que $f'(x) \neq 0$ para todo $x \in J - \{a\}$, a função $N_f(x) = x - \dfrac{f(x)}{f'(x)}$ fica bem definida para todo $x \in J - \{a\}$, concluindo também o item (2).

Definimos agora a seguinte função $\widetilde{N}_f : J \to \mathbb{R}$, dada por:

$$\widetilde{N}_f(x) = \begin{cases} N_f(x) & , x \neq a \\ a & , x = a \end{cases}$$

Observando que a é por definição um ponto fixo para $\widetilde{N}_f$, se mostrarmos que existe um intervalo $\tilde{J} \subset J$ contendo a onde $\widetilde{N}_f$ é uma contração, o item (3) segue do Teorema do Ponto Fixo das Contrações. Para concluirmos isto, mostraremos que $\widetilde{N}_f$ é C^1 em J, e ainda $|\widetilde{N}'_f(a)| < 1$.

Verifiquemos primeiro que $\widetilde{N}_f$ é de fato contínua. Para isto, precisamos apenas verificar, é claro, a continuidade no ponto a, pois N_f é contínua. Analisando o limite da função $N_f(x) - x$ quando x tende a a, podemos notar que temos uma indeterminação do tipo $0/0$. Como ensinado no curso de cálculo, uma abordagem de solução para tais limites é através da conhecida Regra de L'Hôpital. Tal regra diz o seguinte: se h e g são duas funções $n-$vezes deriváveis num ponto a, tal que todas as suas derivadas de ordem menor ou igual a $n-1$ se anulam em a, e ainda tal que $g^{(n)}(a) \neq 0$, então temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h^{(n)}(a)}{g^{(n)}(a)}.$$

Sendo assim, temos que

$$\lim_{x \to a} (N_f(x) - x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f^{(n-1)}(a)}{f^{(n)}(a)} = 0.$$

E portanto, $\widetilde{N}_f$ é contínua em a.

Para $x \neq a$, $\widetilde{N}_f(x) = N_f(x)$, logo é C^1. Mais precisamente, para $x \neq a$, temos que

$$\widetilde{N}'_f(x) = \frac{f(x).f''(x)}{f'(x).f'(x)}.$$

Usando L'Hospital, mostramos a seguir que $\widetilde{N}_f$ é derivável em a.

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} \frac{\widetilde{N}_f(x) - \widetilde{N}_f(a)}{x - a} &= \lim_{x \to a} \frac{N_f(x) - a}{x - a} \\
&= \lim_{x \to a} \frac{x - \dfrac{f(x)}{f'(x)} - a}{x - a} \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{f'(x)(x - a)} \\
&= 1 - \lim_{x \to a} \frac{f^n(x)}{f^{n+1}(x)(x - a) + n.f^n(x)} \\
&= 1 - \frac{1}{n} < 1
\end{aligned}$$

Logo, $\widetilde{N}_f$ é de fato derivável em a. Mais ainda, $|\widetilde{N}'_f(a)| < 1$.

No que segue mostraremos que $\widetilde{N}'_f$ é também contínua.

Para isto, observemos primeiro que pelo fato de $f^{(j)}(a) = 0$ para $0 \leq j \leq n-1$ e $f^{(n)}(a) \neq 0$, aplicando a regra de L'Hospital temos que

$$\lim_{x \to a} \frac{f^{(i)}(x)}{(x-a)^j} = \frac{f^{(i+j)}(a)}{j!}, \tag{1}$$

para todo $0 \leq i, j \leq n$, tal que $i + j \leq n$.

Assim, usando a igualdade:

$$\frac{f(x).f''(x)}{f'(x).f'(x)} = \frac{\dfrac{f(x)}{(x-a)^n} \dfrac{f''(x)}{(x-a)^{n-2}}}{\dfrac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}} \dfrac{f'(x)}{(x-a)^{n-1}}},$$

juntamente com a existência dos limites apresentados na equação (1), podemos calcular o limite de $\widetilde{N}'_f(x)$ quando x tende a a:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to a} N'_f(x) = \lim_{x \to a} \frac{f(x).f''(x)}{f'(x).f'(x)} &= \frac{\dfrac{f^{(n)}(a)}{n!} \dfrac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}}{\dfrac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} \dfrac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}} \\
&= \frac{(n-1)!(n-1)!}{n!(n-2)!} \\
&= \frac{n-1}{n} = 1 - \frac{1}{n}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\lim_{x \to a} \widetilde{N}'_f(x) = \widetilde{N}'_f(a),$$

o que implica $\widetilde{N}'_f(x)$ é contínua.

Por fim, tomando $k \in (1 - 1/n, 1)$ existe $\delta > 0$ tal que $|\widetilde{N}'_f(x)| < k$ para todo $x \in \tilde{J} = [a - \delta, a + \delta] \subset J$. O que implica pelo Teorema do Valor médio que,

$$|\widetilde{N}_f(x) - \widetilde{N}_f(y)| \leq k|x - y|,$$

para todo $x, y \in \tilde{J}$.

Portanto, $\widetilde{N}_f : \tilde{J} \to \tilde{J}$ é uma contração, como queríamos mostrar, terminando a prova do Teorema.

□

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq, FAPEMIG e PROPP-UFU pelo auxílio financeiro recebido.

REFERÊNCIAS

[1] N. H. Abel: *Demonstration de Impossibilite de la resolution algebrique des equations generales qui passent le quatrieme degree.* J. reine angew. Math., 1:65–84, 1826.

[2] G. Cardano: *Ars magna or The Rules of Algebra.* Dover, 1545. publicado em 1993.

[3] S. Chapra e R. Canale: *Métodos Numéricos para Engenharia.* McGraw-Hill, 5ª ed., 2008.

[4] E. L. Lima: *Análise Real*, vol. 1. IMPA, 12ª ed., 2013.

[5] I. Newton: *Método de Fluxões*. Editora Prometeu, 1736.

[6] A. Ralston e P. Rabinowitz: *A first course in numerical analysis*. McGraw-Hill, Nova York, 2ª ed., 1978.

[7] J. Raphson: *Analysis aequationum universalis*. London, 1690.