Anais do XII Encontro Mineiro de Estatística – MGEST 2013. Uberlândia – 05 e 06 de setembro de 2013.
Revista Matemática e Estatística em Foco – ISSN: 2318-0552

O Processo de Weibull Poisson para Modelagem da Confiabilidade em Sistemas Reparáveis

Luiz Gustavo Fraga[1]
Edmilson Rodrigues Pinto[2]

Resumo: Sistemas reparáveis são aqueles sistemas que, após a ocorrência de uma falha, podem ser reparados, por exemplo, por substituição ou reparo de algum componente do sistema. Assim, modelos para sistemas reparáveis devem descrever as ocorrências de falhas no tempo de vida do sistema, porém de forma diferente dos modelos para sistemas não-reparáveis. O Processo de Poisson Não-Homogêneo é comumente usado como modelo para sistemas reparáveis. A função de intensidade de falha para o modelo, que nesse artigo segue uma distribuição de Weibull, varia de acordo com o tempo e pode apresentar uma fase de melhoramento ou de desgaste do sistema. A modelagem desses sistemas é extremamente importante, pois pode detectar a deterioração do sistema quando a confiabilidade diminui, o que influencia diretamente nas decisões de manutenções preventivas ou inspeções. O objetivo deste artigo é apresentar o modelo de Weibull Poisson para a modelagem da confiabilidade em sistemas reparáveis de uma forma clara e concisa, fornecendo ferramentas para estimação dos parâmetros e teste de bondade de ajuste do modelo. Um exemplo de aplicação é fornecido.

Palavras-chave: *Sistemas Reparáveis, Processo Weibull Poisson, Confiabilidade, Modelo Crow AMSAA.*

1 Introdução

Atualmente, com o avanço tecnológico, a criação de produtos e sistemas cada vez mais complexos implica em maiores gastos e processos de manutenção e reparo mais sofisticados. Sistemas complexos, caso falhem, necessitam de reparo e não da troca de seus componentes, pois nesse último caso, o alto custo agregado o torna economicamente inviável. Diante disso, o estudo da confiabilidade é extremamente importante, pois apresenta informações relevantes para se aplicar reparos e manutenções nesses produtos da forma econômica e otimizada.

Um dos processos mais utilizados para a modelagem de confiabilidade de sistemas usando processos de contagem de falha é o Processo de Poisson. Esse modelo leva em consideração as falhas do sistema e em que tempo *t* da vida do sistema ela ocorre. Caso for observada uma periodicidade nos tempos de falha do sistema, usa-se o Processo de Poisson Homogêneo (PPH), caso contrário, ou seja, se há uma tendência de mudança na intensidade de falha em relação à idade do sistema, o Processo de Poisson Não-Homogêneo (PPNH) é utilizado. Um dos principais modelos de confiabilidade em sistemas reparáveis é obtido usando PPNH com função de intensidade de falha Weibull.

O objetivo deste artigo é apresentar o modelo de Weibull Poisson para a modelagem da confiabilidade em sistemas reparáveis de uma forma clara e concisa, fornecendo ferramentas

[1] FEMEC - Universidade Federal de Uberlândia. Email: luizgustavo.aero@gmail.com
[2] FAMAT - Universidade Federal de Uberlândia. Email: edmilson@famat.ufu.br

computacionais para estimação dos parâmetros e teste para verificação da bondade do ajuste do modelo.

O artigo está estruturado da seguinte maneira, na Seção 2, é discutido o Processo de Poisson com implicações teóricas e práticas desse modelo na Teoria da Confiabilidade de sistemas complexos ou reparáveis, abordando o Processo de Weibull Poisson, estimação de parâmetros via método de máxima verossimilhança e procedimento de bondade de ajuste. Na Seção 3, é abordada uma aplicação desses procedimentos na confiabilidade de sistemas reparáveis. Finalmente, na Seção 4, são feitas algumas considerações finais sobre o assunto.

2 Metodologia

Suponha que um sistema inicia sua operação em um tempo $t = 0$ e opera por um período de tempo $t = T$. O tempo T pode ser o tempo de operação de algum sistema, como por exemplo, no caso de um veículo, significaria a quilometragem percorrida. O número de falhas $N(t)$ experimentado pelo sistema durante a operação é aleatório e os tempos sucessivos de ocorrência dessas falhas $0 < X_1 < X_2 < \cdots < X_{N(t)}$ também são aleatórios. Se durante a operação do sistema os tempos entre a ocorrência das sucessivas falhas $X_i - X_{i-1}$ $(i = 1,2, \dots, X_o = 0)$ são independentes e considerados variáveis aleatórias identicamente distribuídas com intensidade de falha conhecida, então $\{N(t);\, t > 0\}$ é um Processo de Poisson [3].

A função de intensidade de falha pode ser constante, caracterizando o Processo de Poisson Homogêneo (PPH) ou, caso essa função não seja constante, tem-se Processo de Poisson Não-Homogêneo (PPNH).

Uma generalização do Processo de Poisson Homogêneo que permite mudanças ou tendências na intensidade de falhas nos sistemas é chamada Processo de Poisson Não-Homogêneo (PPNH) com função de intensidade de falha $u(t)$, onde $u(t)$ é uma função que varia com o tempo de vida do sistema. Para um intervalo tempo Δt infinitamente pequeno, $u(t)\Delta t$ é aproximadamente a probabilidade de que uma falha ocorrerá no intervalo $(t, t + \Delta t)$.

O Processo de Weibull Poisson é um PPNH com função de intensidade que segue uma distribuição de Weibull. Ele é utilizado para análises de confiabilidade em sistemas reparáveis devido à função de intensidade $u(t)$ permitir mudanças ou tendências na intensidade de falha de acordo com o tempo de vida t do sistema. Nesse artigo, assume-se que as falhas de cada componente estudado ocorrem de acordo com o Processo de Weibull Poisson com função de intensidade de falha apresentada na equação (1).

$$u(t) = \lambda \beta t^{\beta - 1} \tag{1}$$

No caso geral do PPNH, a função de intensidade $u(t)$ depende da idade t do sistema. O sistema pode apresentar uma fase de melhoramento, onde $u(t)$ decresce, uma fase estável, com função de intensidade constante, ou uma fase de desgaste do sistema, quando $u(t)$ cresce. Em termos matemáticos, isso significa que a função de intensidade de falha cresce quando $\beta > 1$, decresce com $\beta < 1$e se torna constante com $\beta = 1$ [3].

Nesse artigo, o interesse particular está no conceito de "Missão de Confiabilidade" para sistemas reparáveis complexos, que significa a probabilidade $R(t)$ de que um sistema de idade t complete uma missão de duração fixa T com sucesso. Se o sistema é reparável e as falhas que o afetam seguem um Processo de Weibull Poisson, então a probabilidade de que um sistema com idade t não falhe em $(t, t+\Delta t)$ é dada na equação (2).

$$R(t) = e^{-[\lambda(t+\Delta t)^{\beta} - \lambda t^{\beta}]} \qquad (2)$$

Quando analisamos sistemas reparáveis, os dados de falha são coletados quando o sistema está em uso, porém essas falhas são geradas por todos os componentes que operam o sistema durante períodos de tempo que podem ser diferentes. Para modelar a confiabilidade desse tipo de sistema é utilizado um procedimento que considera o número k de componentes do sistema, cada um com seu tempo de operação, até um tempo T máximo de funcionamento do sistema. O período de tempo, nesse caso, é representado por $(0, T)$. Assume-se que os componentes do sistema fazem parte de uma mesma população, ou seja, o tempo de vida de cada componente possui a mesma distribuição de probabilidade.

Suponha que o q-ésimo componente de um sistema seja observado de um tempo $S_q = 0$ até um tempo $T_q = T$ ($q = 1, 2, \ldots, k$), e N_q seja o número de falhas de cada componente. Segundo [1], os estimadores de máxima verossimilhança de λ e β da equação (1) são os valores $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$ que satisfazem as equações (3) e (4), onde $N = \sum_{q=1}^{k} N_q$.

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{kT^{\hat{\beta}}} \qquad (3)$$

$$\hat{\beta} = \frac{N}{\sum_{q=1}^{k} \sum_{i=1}^{N_q} ln \frac{T}{X_{iq}}} \qquad (4)$$

De acordo com [1], para a construção de intervalo de confiança de β usa-se o estimador não-viesado de β, $\bar{\beta}$, dado por $\bar{\beta} = \frac{N-1}{N}\hat{\beta}$.

Os limites inferior e superior do intervalo de confiança para β, com $1 - \alpha$ de confiança, são apresentados nas equações (5) e (6), respectivamente.

$$\beta_I = \bar{\beta}\frac{\chi^2(\frac{\alpha}{2}, 2N)}{2(N-1)} \qquad (5)$$

$$\beta_S = \bar{\beta}\frac{\chi^2(1-\frac{\alpha}{2}, 2N)}{2(N-1)} \qquad (6)$$

Onde $\chi^2_{(\alpha, gl)}$ representa o percentil α de uma distribuição de qui-quadrado com gl graus de liberdade.

Na prática, é desejável que se faça a verificação do ajustamento entre o modelo obtido e os dados coletados através de um teste de bondade de ajuste. Para o Processo de Weibull Poisson, um teste de bondade de ajuste que pode ser aplicado sobre circunstâncias mais gerais é o Teste de Qui-Quadrado [2]. O Teste de Qui-Quadrado divide o tempo de vida do sistema em d intervalos e considera que o número de falhas esperadas $\hat{\theta}(j)(j = 1,2, \ldots, d)$, para um sistema com k componentes ao longo de intervalo de tempo (a_j, b_j) é estimado pela equação $\hat{\theta}(j) = k(\hat{\lambda} b_j^{\hat{\beta}} - \hat{\lambda} a_j^{\hat{\beta}})$, onde $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$ são os estimadores de máxima verossimilhança calculados pelas equações (3) e (4).

Seja $N(j)$ o número de falhas observadas ao longo de cada intervalo. Assim o valor da estatística de teste χ^2_{calc} é dado pela equação $\chi^2_{calc} = \sum_{j=1}^{d} \frac{[N(j) - \hat{\theta}(j)]^2}{\hat{\theta}(j)}$.

A variável aleatória χ^2_{calc} segue, aproximadamente, uma distribuição de Qui-Quadrado com $d-2$ graus de liberdade. Desta forma, as hipóteses a serem testadas são: Ho: os dados seguem o Processo de Weibull Poisson e Ha: os dados não seguem o Processo de Weibull Poisson. Sendo o $valor - p = 1 - \chi^2(\chi^2_{calc}, d-2)$, aceita-se Ho se o $valor - p$ for menor que o nível de significância α adotado.

3 Aplicação

O problema que será considerado foi introduzido por [2] e considera um sistema reparável com três componentes. Os tempos de falha desses componentes, em horas, são mostrados na Tabela 1. Para cada componente, o tempo inicial de funcionamento é 0 e o tempo final é 2000 horas.

Tabela 1: Tempos de Falha dos Três Componentes do Sistema

Componente 1	Componente 2	Componente 3
1.2	1.4	0.3
55.6	35.0	32.6
72.7	46.8	33.4
111.9	65.8	214.7
121.9	181.1	396.2
303.6	712.6	480.0
326.6	1005.7	588.9
1568.4	1029.9	1043.9
1913.5	1675.7	1136.1
	1787.5	1288.1
	1867.0	1408.1
		1439.4
		1604.8

Considerando que o sistema segue um Processo de Weibull Poisson, a função de intensidade de falha estimada pela equação (1), é expressa por $u(t) = 0.163t^{-0.551}$. E $R(t)$ é dado por $R(t) = e^{[0.363(t+\Delta t)^{0.449} - 0.363t^{0.449}]}$.

Note que β < 1, o que indica um decrescimento da intensidade de falha, ou seja, o sistema melhora com o tempo, o número de falhas dos componentes do sistema tende a diminuir.

Os gráficos de $u(t)$ e $R(t)$, para uma missão de confiabilidade de 500 horas, são mostrados nas Figuras 1 e 2, respectivamente.

Assim, supondo que o sistema tenha uma garantia contra falhas nas primeiras 500 horas de operação, ou seja, começando em $t=0$ durante um período de tempo $\Delta t = 500$, então a equação (2) deve ser usada para avaliar a probabilidade de que não ocorram falhas durante esse período, logo a de missão de confiabilidade, neste caso, $R(t) = 0.00275$.

Para verificar se os tempos de falha do sistema realmente seguem um Processo de Weibull Poisson é necessário que se faça um teste de bondade do ajuste. Nesse caso, o teste de Qui-quadrado pode ser realizado. Com os valores estimados de $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$, dividindo o tempo de operação do sistema em cinco intervalos iguais, cada um com 400 horas, e considerando um nível de significância de 5% (α=0.05), obteve-se o valor p = 0.4562026. Como o valor – p é maior que o nível de significância, aceita-se Ho, ou seja, aceita-se que os dados seguem um Processo de Weibull Poisson.

O intervalo de confiança para β, com 95% de confiança, usando os resultados das equações (5) e (6), é dado por $IC(\beta)_{95\%} = (0.309{,}0.614)$.

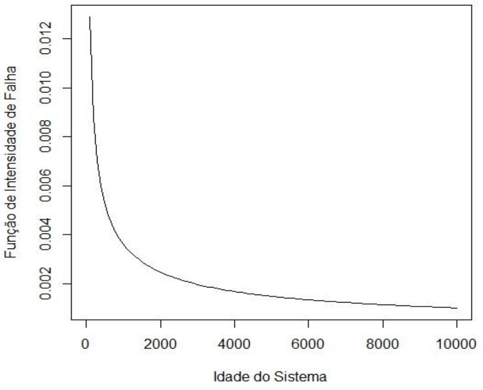

Figura 1: Função de Intensidade de Falha do Sistema

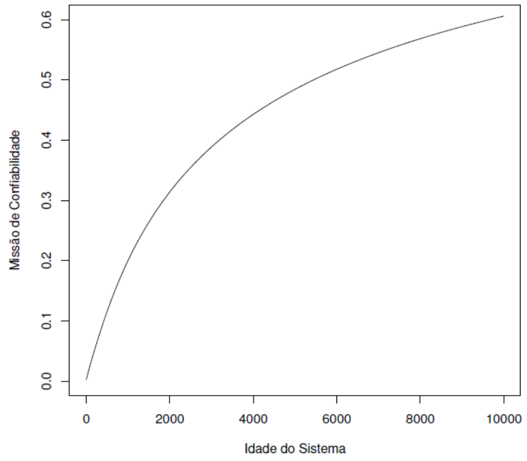

Figura 2: Missão de Confiabilidade para Intervalo de 500 Horas de Operação do Sistema

4 Conclusão

Sistemas reparáveis são sistemas complexos compostos por diversos componentes, onde a falha de alguns desses componentes resulta na falha de todo o sistema. Nesse caso, o Processo de Poisson, com função de intensidade de falha variável que segue uma Distribuição de Weibull, é utilizado para a modelagem da confiabilidade, que é uma informação muito importante, pois é a partir dela que os fabricantes e empresas de manutenção aplicam reparos e manutenções de forma econômica e otimizada, o que significa um menor custo de operação desses sistemas sem que os níveis de confiabilidade e segurança diminuam. A missão de confiabilidade refere-se à probabilidade de que o sistema esteja em funcionamento até o final da missão. Com essa informação, fabricantes de diversos tipos de sistemas podem estimar o tempo de operação sem que seja necessária uma manutenção, otimizando ao máximo esse serviço.

Referências

[1] CROW, L.H. Reliability analysis for complex, repairable systems, technical report, *AMSAA – Army Materiel Systems Analysis Activity*, 1975.

[2] CROW, L. H. Evaluating the reliability of repairable systems, *Reliability and Maintainability Symposium – RAMS*, 1990.

[3] CROW, L. H. Confidence intervals on the reliability of repairable systems, *Reliability and Maintainability Symposium – RAMS*, 1993.