DERIVAÇÕES LOCALMENTE NILPOTENTES

Cirilo Gonçalves
Universidade Federal de Uberlândia
cirilo@mat.ufu.br

Cícero Fernandes de Carvalho
Universidade Federal de Uberlândia
cicero@ufu.br

RESUMO

Este trabalho é um estudo sobre as derivações de um anel comutativo e com unidade [1]. Nele apresentamos as propriedades básicas das derivações, bem como algumas propriedades relativas ao conjunto de todas derivações de uma anel B; mostramos por exemplo, que esse conjunto é um B-módulo livre. Além disso, introduzimos o conceito de derivações localmente nilpotentes e apresentamos algumas de suas propriedades. Concluímos o trabalho com alguns resultados referentes a derivações definidas sobre o anel de frações de um anel B [2].

ABSTRACT

This paper presents a study on derivations of a unitary commutative ring [1]. Here we prove the basic properties of derivations, as well as some properties relative the set of all derivations of a ring B, for example, we show that this set is a free B-module. Moreover we introduce and present properties of the so-called locally nilpotent derivations. We finish the paper with results on derivations defined over the ring of fractions of a ring B [2].

Palavras-chave: Derivações, Derivações Localmente Nilpotentes, Anel de frações.

1 INTRODUÇÃO

Nesse trabalho apresentamos alguns dos aspectos básicos e aplicações das chamadas derivações sobre aneis comutativos e com unidade. Essas são funções D de um anel A nele mesmo que satisfazem a "regra da derivada do produto" e é linear com relação à adição, a saber, vale que

$$\begin{aligned} D(a \cdot b) &= a \cdot D(b) + b \cdot D(a) \\ D(a + b) &= D(a) + D(b) \end{aligned}$$

para todos os elementos a e b de A. Apesar de simples, essa definição abre caminho para uma vasta teoria.
Aqui apresentamos algumas propriedades das derivações sobre aneis, em particular, derivações definidas sobre $B = \mathbb{K}[\mathbf{X}] := \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$, onde $\mathbb{K}$ é um anel. Nesse anel definimos derivada parcial na variável X_i, isto é, $\frac{\partial}{\partial X_i} : B \longrightarrow B$ e vemos que $\frac{\partial}{\partial X_i}$ é uma derivação para todo $i = 1, \ldots, n$, e além disso, $\mathbb{K} \subseteq \ker(\frac{\partial}{\partial X_i})$ (ver definição 2.2). Obtemos ainda, que $\{\frac{\partial}{\partial X_1}, \ldots, \frac{\partial}{\partial X_n}\}$ é uma base para $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$ (o conjunto de todas as derivações $D : B \longrightarrow B$ tal que $\mathbb{K} \subseteq \ker(\frac{\partial}{\partial X_i})$) como B-módulo livre.

2 DERIVAÇÃO DE UM ANEL

Neste trabalho as palavras *anel* e *domínio* significam respectivamente anel comutativo com unidade e domínio de integridade. Além disso, se A é um anel e $0 \leq n \in \mathbb{Z}$, então usaremos $A^{[n]}$ para denotar qualquer A-álgebra isomórfica ao anel de polinômios em n variáveis sobre A.

Definição 2.1: *Uma* **derivação** *D de um anel B é uma aplicação $D : B \longrightarrow B$ satisfazendo*

i) $D(x+y) = D(x) + D(y), \forall\, x, y \in B$;

ii) $D(xy) = D(x)y + xD(y), \forall\, x, y \in B$.

Exemplo 2.1: *Considere o anel $\mathbb{R}[X]$ dos polinômios com coeficientes reais em uma variável e $p(X) \in \mathbb{R}[X]$. Temos que a derivada $\dfrac{dp(X)}{dX} = p'(X)$ é uma derivação de $\mathbb{R}[X]$.*

Definição 2.2: *Dada uma derivação D de um anel B, definimos o conjunto $\ker(D) = \ker(D, B) = B^D = \{x \in B : D(x) = 0\}$. E a esse conjunto chamamos de o* **núcleo** *da derivação D.*

Dada uma derivação D de um anel B, observe que o núcleo de D é um subanel de B. Se $\mathbb{K} \subseteq B$ são aneis e D é uma derivação de B satisfazendo que $D(\mathbb{K}) = \{0\}$, chamamos D de uma $\mathbb{K}$-derivação de B, e neste caso temos $\mathbb{K} \subseteq \ker(D) \subseteq B$. Usamos as notações:

1. $\mathrm{Der(B)}$ é conjunto de todas as derivações de B;
2. $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathrm{(B)}$ é o conjunto de todas as $\mathbb{K}$-derivação de B.

Sejam B um anel, $D \in \mathrm{Der(B)}$ e $b \in B$, tem-se que $D(1) = D(1) + D(1)$, daí que $D(1) = 0$, além disso

$$\begin{array}{rcl} bD : B & \longrightarrow & B \\ a & \longmapsto & b \cdot D(a) \end{array}$$

é uma derivação de B.

Definição 2.3: *Dado um anel B, entenderemos por B-módulo um grupo abeliano M, escrito aditivamente e munido de uma operação externa (usualmente escrita como multiplicação), satisfazendo:*

i) $a \cdot (x+y) = a \cdot x + a \cdot y$;

ii) $(a+b) \cdot x = a \cdot x + b \cdot x$;

iii) $(a \cdot b) \cdot x = a \cdot (b \cdot x)$;

iv) $1 \cdot x = x$.

para quaisquer $a, b \in B$ e $x, y \in M$.
Diremos que os elementos $x_1, \ldots, x_s$ são linearmente independentes (sobre B) se, para quaisquer $a_1, \ldots, a_s \in B$, a igualdade $\sum_{j=1}^{s} a_j x_j = 0$ implicar que $a_1 = \ldots = a_s = 0$.
Um B-módulo que é finitamente gerado por um conjunto de elementos linearmente independentes (esse conjunto é chamado de base) é chamado de B-módulo livre.

Exemplo 2.2: *Se B é um corpo, então a noção de B-módulo coincide com a de B-espaço vetorial. Em particular, se $B = \mathbb{R}$ o corpo dos números reais, temos $\mathbb{R}^n$ é um $\mathbb{R}$-módulo.*

Assim, temos que $\mathrm{Der(B)}$ é um B-módulo e que $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathrm{(B)}$ é um B-submódulo de $\mathrm{Der(B)}$. De fato, seja B é um anel e sejam $D_1, D_2 \in \mathrm{Der(B)}$ e $b \in B$ então

$$bD_1 \in \mathrm{Der(B)}$$

$$D_1 + D_2 \in \mathrm{Der(B)}$$

O mesmo ocorre para $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$. Logo $\mathrm{Der(B)}$ e $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$ são B-módulo.

Definição 2.4: *Dado um anel $\mathbb{K}$, considere $B = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$ o anel de polinômios em várias variáveis.*
Se

$$g = \sum_{s=0}^{k} a_s \prod_{l=1}^{n} X_l^{r_{s_l}} \in B,$$

chamamos de **derivada parcial na variável** *X_i, a aplicação $\dfrac{\partial}{\partial X_i} : B \longrightarrow B$, $\forall \;\; i = 1, \ldots, n$, definida por*

$$\frac{\partial}{\partial X_i}(g) = \sum_{s=0}^{k} a_s \prod_{l=1, l\neq i}^{n} X_l^{r_{s_l}} \frac{\partial}{\partial X_i}(X_i^{r_{s_i}}),$$

onde $\dfrac{\partial}{\partial X_i}(X_i^{r_{s_i}}) = s_i X_i^{r_{s_i}-1}$. Se $n = 1$ chamamos a aplicação de **derivada na variável** *X e denotamos por $\dfrac{d}{dX}$.*

Lema 2.1: *Sejam $\mathbb{K}$ um anel e $B = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Então para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$ a derivada parcial na variável X_i é uma $\mathbb{K}$-derivação de B.*

Demonstração. De fato, para todo $a \in \mathbb{K}$, temos que $\dfrac{da}{dX} = a\dfrac{dX^0}{dX} = 0$. Agora, sejam $g = \sum_{p=0}^{m} a_p X^p$, $f = \sum_{j=0}^{k} b_j X^j$ polinômios em $\mathbb{K}[X]$, então se $m > k$, temos que

$$\frac{d}{dX}(g+f) = \frac{d}{dX}\left(\sum_{j=0}^{m}(a_j + b_j)X^j\right) = \sum_{j=0}^{m}(a_j + b_j)\frac{dX^j}{dX} = \sum_{j=0}^{m} a_j \frac{dX^j}{dX} + \sum_{j=0}^{k} b_j \frac{dX^j}{dX} = \frac{dg}{dX} + \frac{df}{dX}$$

além disso,

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dX}(gf) &= \frac{d}{dX}\left(\sum_{l=0}^{m+n}\left[\sum_{p+j=l} a_p b_j\right] X^l\right) \\
&= \sum_{l=0}^{m+n}\left[\sum_{p+j=l} a_p b_j\right]\frac{dX^l}{dX} \\
&= \sum_{l=1}^{m+n} l \left[\sum_{p+j=l} a_p b_j\right] X^{l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{m+n}\left[\sum_{p+j=l} l a_p b_j\right] X^{l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{m+n}\left[\sum_{p+j=l} (p+j) a_p b_j\right] X^{l-1} \\
&= \sum_{l=1}^{m+n}\left[\sum_{p+j=l} p a_p b_j\right] X^{l-1} + \sum_{l=1}^{m+n}\left[\sum_{p+j=l} j a_p b_j\right] X^{l-1} \\
&= \left(\sum_{p=1}^{m} p a_p X^{p-1}\right)\left(\sum_{j=0}^{k} b_j X^j\right) + \left(\sum_{p=0}^{m} a_p X^p\right)\left(\sum_{j=1}^{k} j b_j X^{j-1}\right) \\
&= \frac{dg}{dX} f + g\frac{df}{dX}.
\end{aligned}$$

Logo, $\dfrac{d}{dX}$ é uma $\mathbb{K}$-derivação em $\mathbb{K}[X]$.
De maneira análoga vemos que $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$ é uma $\mathbb{K}$-derivação de B, para isso, considere $\mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n] = \mathbb{K}[X_1,\ldots,\hat{\mathrm{X}}_i,\ldots,X_n][X_i]$, e daí basta notar que $\dfrac{\partial}{\partial X_i}$ é uma $\mathbb{K}[X_1,\ldots,\hat{\mathrm{X}}_i,\ldots,X_n]$-derivação (o símbolo $\hat{\mathrm{X}}_i$ significa que este elemento não está na lista). □

Teorema 2.3: Regra de Leibnitz: *Sejam B é um anel e $D \in \mathrm{Der(B)}$. Se $x, y \in B$ e $n \in \mathbb{N}$, então*

$$D^n(xy) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} D^{n-i}(x)D^i(y).$$

Demonstração. De fato, se $n = 1$ o resultado é claro pois $D \in \mathrm{Der(B)}$.
Seja agora $n > 1$. Suponha que a igualdade se verifica para todo $k < n$, logo temos que

$$\begin{aligned}
D^n(xy) &= D(D^{n-1}(xy))\\
&= D\left(\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}(x)D^i(y)\right)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D(D^{n-1-i}(x)D^i(y))\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}(D^{n-i}(x)D^i(y)+D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y))\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y)+\sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-1-i}(x)D^{i+1}(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y)+\sum_{i=1}^{n}\binom{n-1}{i-1}D^{n-i}(x)D^{i}(y)\\
&= D^n(x)y+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i}D^{n-i}(x)D^i(y)+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n-1}{i-1}D^{n-i}(x)D^{i}(y)+xD^n(y)\\
&= D^n(x)y+\sum_{i=1}^{n-1}\left[\binom{n-1}{i}+\binom{n-1}{i-1}\right]D^{n-i}(x)D^i(y)+xD^n(y)\\
&= D^n(x)y+\sum_{i=1}^{n-1}\binom{n}{i}D^{n-i}(x)D^i(y)+xD^n(y)\\
&= \sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}D^{n-i}(x)D^i(y).
\end{aligned}$$

Obs.: 2.4: *Por indução obtemos que: se B é um anel, $D \in \mathrm{Der(B)}$ então $D(b^n) = nb^{n-1}D(b)$, $\forall b \in B$ e $n \geq 0$.*

□

Lema 2.2: *Sejam $B = \mathbb{K}[X_1,\ldots,X_n]$, $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathrm{(B)}$ e $f_i = D(X_i), \forall\, 1,\ldots,n$, então $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\partial}{\partial X_i}$. Mais ainda, dada $(f_1,\ldots,f_n) \in B^n$ temos que $\sum_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\partial}{\partial X_i}$ é a única derivação D tal que $D(X_i) = f_i, \forall\, i = 1,\ldots,n$.*

Demonstração. Por hipótese temos que $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}\mathrm{(B)}$ e $D(X_i) = f_i$, $\forall\, i = 1,\ldots,n$, mostraremos por indução que $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\partial}{\partial X_i}$.
Se $n = 2$, isto é, $B = \mathbb{K}[X_1, X_2]$, dado $g = \sum_{p=0}^{m} a_p X_1^{r_{p_1}} X_2^{r_{p_2}}$ temos que

$$\begin{aligned}
D(g) &= \sum_{p=0}^{m} a_p D(X_1^{r_{p_1}} X_2^{r_{p_2}}) \\
&= \sum_{p=0}^{m} a_p \left(D(X_1^{r_{p_1}}) X_2^{r_{p_2}} + X_1^{r_{p_1}} D(X_2^{r_{p_2}}) \right) \\
&= \sum_{p=0}^{m} r_{p_1} a_p X_1^{r_{p_1}-1} X_2^{r_{p_2}} D(X_1) + \sum_{p=0}^{m} r_{p_2} a_p X_2^{r_{p_2}-1} X_1^{r_{p_1}} D(X_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= f_1 \sum_{p=0}^{m} a_p X_2^{r_{p_2}} \frac{\partial X_1^{r_{p_1}}}{\partial X_1} + f_2 \sum_{p=0}^{m} a_p X_1^{r_{p_1}} \frac{\partial X_2^{r_{p_2}}}{\partial X_2} \\
&= f_1 \frac{\partial g}{\partial X_1} + f_2 \frac{\partial g}{\partial X_2} \\
&= \sum_{i=1}^{2} f_i \frac{\partial g}{\partial X_i}.
\end{aligned}$$

Se $n > 2$, suponha que dado $h \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{n-1}]$, tenhamos que

$$D(h) = \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{\partial h}{\partial X_i}.$$

Assim, para

$$g = \sum_{p=0}^{m} a_p \prod_{l=0}^{n} X_l^{r_{p_l}} \in B = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$$

temos

$$\begin{aligned}
D(g) &= \sum_{p=0}^{m} a_p D\left(\prod_{l=0}^{n} X_l^{r_{p_l}} \right) \\
&= \sum_{p=0}^{m} a_p D\left(\prod_{l=0}^{n-1} X_l^{r_{p_l}} \right) X_n^{r_{p_n}} + \sum_{p=0}^{m} a_p \prod_{l=0}^{n-1} X_l^{r_{p_l}} D(X_n^{r_{p_n}}) \\
&= \sum_{p=0}^{m} a_p X_n^{r_{p_n}} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\prod_{l=0}^{n-1} X_l^{r_{p_l}} \right) + \sum_{p=0}^{m} r_{p_n} a_p \prod_{l=0}^{n-1} X_l^{r_{p_l}} X_n^{r_{p_n}-1} D_1(X_n) \\
&= \sum_{p=0}^{m} \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left(a_p X_n^{r_{p_n}} \prod_{l=0}^{n-1} X_l^{r_{p_l}} \right) + f_n \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial g}{\partial X_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\sum_{p=0}^{m} a_p \prod_{l=0}^{n} X_l^{r_{p_l}} \right) + f_n \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial g}{\partial X_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} f_i \frac{\partial g}{\partial X_i} + f_n \sum_{p=0}^{m} \frac{\partial g}{\partial X_n} \\
&= \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial g}{\partial X_i}.
\end{aligned}$$

Logo $D = \sum_{i=1}^{n} f_i \dfrac{\partial}{\partial X_i}$.

Além disso, se tivermos $(f_1, \ldots, f_n) \in B^n$ e $D_1 \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$ tais que $D_1(X_i) = f_i$, $\forall i = 1, \ldots, n$, então

$$D_1(g) = \sum_{i=1}^{n} D_1(X_i)\frac{\partial g}{\partial X_i} = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial g}{\partial X_i} = D(g), \ \ \forall g \in B.$$

Portanto D é única. □

Corolário 2.1: *Seja B um anel. Então $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$ é um B-módulo livre, que tem $\{\frac{\partial}{\partial X_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial X_n}\}$ com base.*

Demonstração. Considerando o seguinte isomorfismo

$$\begin{array}{rcl} \phi : \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B}) & \longrightarrow & B^n \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{n} g_i \frac{\partial}{\partial X_i} & \longmapsto & (g_1, \dots, g_n) \end{array}$$

segue que $\mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$ é um B-módulo livre. □

Definição 2.5: *Sejam B um anel e $f = (f_1, \dots, f_n) \in B^n$, chamamos de* **matriz jacobiana** *de f a matriz*

$$J(f) = \left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial X_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial X_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial X_n} \end{pmatrix}.$$

Lema 2.3: *Sejam $\mathbb{K}$ um anel e $B = \mathbb{K}[X_1, \dots, X_n]$. Dado $f = (f_1, \dots, f_{n-1}) \in B^{n-1}$, considere a aplicação $\Delta_f : B \longrightarrow B$ definida por $\Delta_f(g) = \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, g)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right)$. Então $\Delta_f \in \mathrm{Der(B)}$ é chamada de derivação jacobiana. Além disso $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_{n-1}] \subseteq \ker(\Delta_f)$.*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} \Delta_f(g+h) &= \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, g+h)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, g)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) + \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, h)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) \\ &= \Delta_f(g) + \Delta_f(h) \end{aligned}$$

além disso,

$$\begin{aligned} \Delta_f(gh) &= \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, gh)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) \\ &= \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, g)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) \cdot h + g \cdot \det\left(\frac{\partial(f_1, \dots, f_{n-1}, h)}{\partial(X_1, \dots, X_n)}\right) \\ &= \Delta_f(g)h + g\Delta_f(h). \end{aligned}$$

Além disso, se $g \in \mathbb{K}[f_1, \dots, f_{n-1}]$, então g é uma combinação linear de $f_1, \dots, f_{n-1}$, logo $g \in \ker(\Delta_f)$, daí que $\mathbb{K}[f_1, \dots, f_{n-1}] \subseteq \ker(\Delta_f)$. □

Lema 2.4: *Sejam B um anel, $D \in \mathrm{Der(B)}$, $f \in B[T]$ e $b \in B$. Então*

$$D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b)$$

onde $f' \in B[T]$ é a derivada em T de f, $f^{(D)} = \sum_i D(b_i)T^i \in B[T]$ e $f = \sum_i b_i T^i ; b_i \in B$. Mais geralmente, se $f \in B[T_1, \dots, T_n]$ e $b_1, \dots, b_n \in B$ então

$$D(f(b_1, \dots, b_n)) = f^{(D)}(b_1, \dots, b_n) + \sum_{i=1}^{n} f_{T_i}(b_1, \dots, b_n)D(b_i),$$

onde $f_{T_i} = \frac{\partial f}{\partial T_i} \in B[T_1, \dots, T_n]$.

Demonstração. Seja $M = \{f \in B[T] : \ D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b)\}$. Note que se $a \in B$ e $f(T) = aT^i$ é um monômio de $B[T]$ então $f(b) = ab^i$ e

$$D(f(b)) = D(ab^i) = D(a)b^i + aD(b^i) = D(a)b^i + aib^{i-1}D(b) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b).$$

Logo $f \in M$. Portanto $M = B[T]$, já que D é aditiva. De forma análoga obtemos o caso geral. □

Definição 2.6: *Sejam $A \subseteq B$ aneis.*

1. *Um elemento $b \in B$ é* **algébrico** *(respectivamente* **inteiro***) sobre A se existe um polinômio $f \in A[T]\backslash\{0\}$ (respectivamente mônico) tal que $f(b) = 0$;*

2. *Se b não é algébrico sobre A, dizemos que b é* **transcendente** *sobre A;*

3. *Dizemos que A é* **algebricamente fechado** *(respectivamente* **integralmente fechado***) em B se cada elemento de $B\backslash A$ for transcendente (respectivamente não inteiro) sobre A.*

4. *O conjunto $\overline{A} = \{b \in B : b \text{ é algébrico sobre } A\}$ é chamado de* **fecho algébrico** *de A em B.*

Denotaremos por $\mathrm{frac(A)}$ o corpo de frações de um domínio A.

Lema 2.5: *Sejam $A \subseteq B$ domínios. Então temos que $\overline{A} = B \cap L$, onde L é o fecho algébrico de $\mathrm{frac(A)}$ em $\mathrm{frac(B)}$. Consequentemente, $\overline{A}$ é um subanel de B ($A \subseteq \overline{A} \subseteq B$).*

Demonstração. É claro que $\overline{A} \subseteq B \cap L$. Agora seja $\alpha \in B \cap L \Rightarrow \alpha \in \mathrm{frac(B)}$, existe $f \in \mathrm{frac(A)[T]}\backslash\{0\}$ tal que $f(\alpha) = 0$, seja $f(T) = \dfrac{a_0}{b_0} + \dfrac{a_1}{b_1}T + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n}T^n$ com $a_i, b_i \in A$ e $b_i \neq 0$, $\forall i \in \{0, \ldots, n\}$. Assim $f(\alpha) = \dfrac{a_0}{b_0} + \dfrac{a_1}{b_1}\alpha + \ldots + \dfrac{a_n}{b_n}\alpha^n = 0 \Rightarrow a_0(b_1 \ldots b_n) + a_1(b_0 b_2 \ldots b_n)\alpha + \ldots + a_n(b_n \ldots b_{n-1})\alpha^n = 0$, tomando $g(T) = a_0(b_1 \ldots b_n) + a_1(b_0 b_2 \ldots b_n)T + \ldots + a_n(b_n \ldots b_{n-1})T^n \in A[T]\backslash\{0\}$ como $g(\alpha) = 0$, segue que $\alpha \in \overline{A}$. Logo $\overline{A} = B \cap L$. Consequentemente, $\overline{A}$ é um subanel de B. □

Lema 2.6: *Seja B um domínio de característica zero e seja $D \in \mathrm{Der(B)}$, então $\ker(D)$ é algebricamente fechado em B.*

Demonstração. Sejam $A = \ker(D)$, $b \in B$ algébrico sobre A e $f(T) = a_0 + a_1 T + \ldots + a_n T^n \in A[T]$, com $a_i \in A$, $\forall i = 0, \ldots, n$, um polinômio não nulo de grau mínimo tal que $f(b) = 0$. Logo $f(b) = a_0 + a_1 b + \ldots + a_n b^n = 0$ e $D(f(b)) = f^{(D)}(b) + f'(b)D(b) = f'(b)D(b) = 0$, pois $f(T) \in A[T]$ e D é uma A-derivação de B. Pela minimalidade de f e como a característica de B é zero temos que $f'(b) \neq 0$, daí vem que $D(b) = 0$, logo $b \in A$. □

Definição 2.7: *Sejam A e B anéis. B é dito ser uma A-álgebra se existe um homomorfismo não nulo $\varphi : A \longrightarrow B$. Como $\varphi(1_A) = 1_B$, segue que B forma um A-módulo com a seguinte estrutura de módulo:*

$$ab = \varphi(a)b, \ a \in A, \ b \in B.$$

Se A é um corpo, então $A \cong \varphi(A) \subset B$ e neste caso B é um A-espaço vetorial.

Definição 2.8: *Seja $A \subseteq B$ uma extensão de anéis. Se $B = A[S]$ para algum subconjunto não vazio $S \subset B$, onde $A[S]$ é um subanel de B gerado por S sobre A, diremos que B é uma A-álgebra gerada por S e chamamos S de conjunto de geradores de B. Se $S = \{b_1, \ldots, b_n\}$ é um conjunto finito, então B é chamado de A-***álgebra finitamente gerada** *e é denotado por $B = A[b_1, \ldots, b_n]$.*

Se A é um subanel do anel B, a expressão "B é afim sobre A" significa que B é isomorfo a um anel da forma $A[X_1, \ldots, X_n]/I$ para algum ideal I de $A[X_1, \ldots, X_n]$, ou seja, B é uma A-álgebra finitamente gerada.

Lema 2.7: *Sejam $A \subseteq B$ domínios. Se $\mathrm{frac(A)}$ é algebricamente fechado em $\mathrm{frac(B)}$ e $B \cap \mathrm{frac(A)} = \mathrm{A}$, então A é algebricamente fechado em B.*

Demonstração. Suponha por absurdo que exista $\alpha \in B \backslash A$ e $p(T) \in A[T]$ tal que $p(\alpha) = 0$, isto é, A não é algebricamente fechado em B. Temos que $\alpha \in B \subseteq \mathrm{frac(B)}$, $p(T) \in A[T] \subseteq \mathrm{frac(A)[T]}$ e como $B \cap \mathrm{frac(A)} = \mathrm{A}$ seque que $\alpha \notin \mathrm{frac(A)}$ pois caso contrário $\alpha \in A$. Assim α seria algébrico sobre $\mathrm{frac(A)}$, o que contradiz a hipótese de $\mathrm{frac(A)}$ ser algebricamente fechado em $\mathrm{frac(B)}$, logo A é algebricamente fechado em B. □

Definição 2.9: *Dado um anel B e $D \in \mathrm{Der(B)}$, define-se o conjunto:*

$$\mathrm{Nil(D)} = \{\mathrm{x} \in \mathrm{B} : \exists\, \mathrm{n} \in \mathbb{N} \cup \{0\} \ \textit{tal que}\ \mathrm{D^n(x)} = 0\}.$$

Lema 2.8: *Seja $D \in \mathrm{Der(B)}$, então $\mathrm{Nil(D)}$ é fechado sob a multiplicação.*

Demonstração. Suponha que $x, y \in \mathrm{Nil(D)}$ então existe $n, m \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(x) = 0,\ D^m(y) = 0$. Observe que se $D^n(x) = 0$, então $D^k(x) = 0,\ \forall\, k \geq n$. Agora mostremos que existe $r \in \mathbb{N}$ tal que $D^r(xy) = 0$. Suponha que $m \geq n$, então para $r = m + n - 1$ temos que:

$$\begin{aligned} D^r(xy) &= \sum_{i=0}^{m+n-1} \binom{m+n-1}{i} D^{m+n-1-i}(x) D^i(y) \\ &= D^{m+n-1}(x)y + \ldots + \binom{m+n-1}{n} D^{m-1}(x) D^n(y) + \ldots + x D^{m+n-1}(y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

□

Pelo Lema 2.8, $\mathrm{Nil(D)}$ um subanel de B, assim temos que: $\ker(D) \subseteq \mathrm{Nil(D)} \subseteq \mathrm{B}$.

Exemplo 2.5: *Sejam $B = \mathbb{Q}[[T]]$ o anel das séries de potências com coeficientes em $\mathbb{Q}$ e $D = \dfrac{d}{dT}$. Então $\ker(D) = \mathbb{Q}$ e $\mathrm{Nil(D)} = \mathbb{Q}[\mathrm{T}]$. Note que $\mathrm{Nil(D)}$ não é algebricamente fechado em B (nem mesmo integralmente fechado em B): de fato, seja $b = \sqrt{1+T} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k (2k)! T^k}{(1-2k)(k!)^2 4^k} \in B$, então temos que $b \notin \mathrm{Nil(D)}$ mas $b^2 \in \mathrm{Nil(D)}$.*

3 DERIVAÇÕES LOCALMENTE NILPOTENTE

Definição 3.1: *Seja B um anel qualquer. Uma derivação $D : B \longrightarrow B$ é* **localmente nilpotente** *se satisfaz $\mathrm{Nil(D)} = \mathrm{B}$, isto é, se para todo $b \in B$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(b) = 0$.*

Usaremos as seguintes notações

1. $\mathrm{LND(B)}$ é o conjunto das derivações localmente nilpotentes em $\mathrm{Der(B)}$;
2. $\mathrm{KLND(B)} = \{\ker(\mathrm{D}) : \mathrm{D} \in \mathrm{LND(B)} \quad \text{e} \quad \mathrm{D} \neq 0\}$.

Se $\mathbb{K} \subseteq B$

1. $\mathrm{LND}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B}) = \mathrm{LND(B)} \cap \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$;
2. $\mathrm{KLND}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B}) = \{\ker(\mathrm{D}) : \mathrm{D} \in \mathrm{LND}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B}) \quad \text{e} \quad \mathrm{D} \neq 0\}$.

Definição 3.2: *Seja B anel e $D \in \mathrm{Der}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$, dizemos que B uma derivação* **triangular** *se para todo $i \in \{1, \ldots, n\}$, $D(X_i) \in \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_{i-1}]$ (em particular $D(X_1) \in \mathbb{K}$).*

Exemplo 3.1: *Sejam $\mathbb{K}$ um anel e $B = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. Para cada $i = 1, \ldots, n$, a derivada parcial $\dfrac{\partial}{\partial X_i} : B \longrightarrow B$ pertence a $\mathrm{LND}_{\mathbb{K}}(\mathrm{B})$.*

Obs.: 3.2: *Sejam* $\mathbb{K}$ *um anel e* $B = \mathbb{K}[X_1, \ldots, X_n]$. *Toda* $\mathbb{K}$*-derivação triangular é localmente nilpotente.*

De fato, se D *é triangular então* $\mathbb{K} \subseteq \mathrm{Nil(D)}$ *e é fácil ver (por indução sobre* i*) que para todo* $i = 1, \ldots, n$*, temos que* $X_i \in \mathrm{Nil(D)}$*; assim* $\mathrm{Nil(D)} = \mathrm{B}$*, isto é,* D *é localmente nilpotente.*

Os conjuntos $\mathrm{LND(B)}$ e $\mathrm{LND}_{\mathbb{K}}\mathrm{(B)}$ não são fechados com respeito a adição, e nem com respeito a multiplicação por elementos de B. Por exemplo, seja $B = \mathbb{Q}[X, Y]$, $D_1 = Y\dfrac{\partial}{\partial X}$ e $D_2 = X\dfrac{\partial}{\partial Y}$, então $D_1,\ D_2 \in \mathrm{LND(B)}$ (pois são triangulares) mas $D_1 + D_2 \notin \mathrm{LND(B)}$ pois $(D_1 + D_2)^2(X) = X$. E ainda, $\dfrac{\partial}{\partial X} \in \mathrm{LND(B)}$ mas, $X\dfrac{\partial}{\partial X} \notin \mathrm{LND(B)}$. Entretanto:

Lema 3.1: *Seja* B *um anel. Se* $D_1,\ D_2 \in \mathrm{LND(B)}$ *e satisfazem* $D_2 \circ D_1 = D_1 \circ D_2$*, então* $D_1 + D_2 \in \mathrm{LND(B)}$.

Demonstração. Seja $D_1,\ D_2 \in \mathrm{LND(B)}$ tais que $D_2 \circ D_1 = D_1 \circ D_2$ e seja $b \in B$. Existem $m,\ n \in \mathbb{N}$ tais que $D_1^m(b) = 0 = D_2^n(b)$. A hipótese $D_2 \circ D_1 = D_1 \circ D_2$ tem três consequências:

$$\begin{array}{rcl}
\forall i \in \mathbb{N},\ \ \forall j \geq n, \ \ (D_1^i \circ D_2^j)(b) & = & D_1^i(0) = 0 \\
\forall i \geq m,\ \ \forall j \in \mathbb{N}, \ \ (D_1^i \circ D_2^j)(b) & = & (D_2^j \circ D_1^i)(b) = D_2^j(0) = 0 \\
(D_1 + D_2)^{m+n-1} & = & \displaystyle\sum_{i+j=m+n-1} \binom{m+n-1}{i} D_1^i \circ D_2^j.
\end{array}$$

Assim $(D_1 + D_2)^{m+n-1}(b) = 0$. Portanto, $D_1 + D_2 \in \mathrm{LND(B)}$. □

Definição 3.3: *Seja* B *um anel. Um* **subconjunto multiplicativamente fechado** *de* B *é um subconjunto* S *tal que* $1 \in S$*,* $0 \notin S$ *e* S *é fechado com respeito a operação de multiplicação. Em outras palavras* S *é um subsemigrupo de um semigrupo multiplicativo de* B.

Definimos uma relação " $\equiv$ " sobre $B \times S$ dado por

$$(a, s) \equiv (b, t) \Longleftrightarrow (at - bs)u = 0, \ \text{ para algum } \ u \in S.$$

Claramente, esta relação e reflexiva e simétrica. Vejamos que esta relação também é transitiva:

Suponha que $(a, s) \equiv (b, t)$ e $(b, t) \equiv (c, u)$, então existem $v, w \in S$ tal que

$$(au - bs)v = 0 \tag{1}$$
$$(bu - ct)w = 0 \tag{2}$$

multiplicando a equação (1) por (uw) e a (2) por (sv), e somando-as membros a membro obtemos que $(au - cs)tvw = 0$, como S é fechado com respeito a multiplicação temos que $(tvw) \in S$ e, portanto, $(a, s) \equiv (c, u)$.

Assim vimos que a relação acima é de equivalência. Denotaremos por $\frac{a}{s}$ a classe de equivalência de (a, s) e por $S^{-1}B$ o conjunto das classes de equivalências. O conjunto $S^{-1}B$ é um anel com as operações usuais de soma e multiplicação de frações:

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{a}{s} + \dfrac{b}{t} & = & \dfrac{at + bs}{st} \\
\dfrac{a}{s} \cdot \dfrac{b}{t} & = & \dfrac{ab}{st}
\end{array}$$

É importante ressaltar que as operações assim definidas não dependem da escolha do representante de classe, isto é: sejam $(a,b) \equiv (a',b')$ e $(c,d) \equiv (c',d')$, temos que $(ab' - a'b)w = 0$ e $(cd' - c'd)s = 0$. Para alguns $w, s \in S$, temos

$$\begin{aligned} ((ad+cb)b'd' - (a'd'+c'b')bd)ws &= (ab'dd' - a'bdd' + cd'bb' - c'dbb')ws \\ &= \big((ab'-a'b)w\big)(dd's) + \big((cd'-c'd)s\big)(bb'w) \\ &= 0 \end{aligned}$$

daí segue que, $(ad+cb, bd) \equiv (a'd'+c'b', b'd')$, isto é, $\dfrac{ad+cb}{bd} = \dfrac{a'd'+c'b'}{b'd'}$. Além disso, como $cd's = c'ds$,temos que

$$\begin{aligned} (acb'd' - a'c'bd)ws &= (ab'(cd's) - a'b(c'ds))w \\ &= (ab'(cd's) - a'b(cd's))w \\ &= (ab' - a'b)w(cd's) \\ &= 0 \end{aligned}$$

daí que, $(ac, bd) \equiv (a'c', b'd')$, isto é, $\dfrac{ac}{bd} = \dfrac{a'c'}{b'd'}$. Além disso, temos um homomorfismo de anéis

$$\begin{aligned} f : B &\longrightarrow S^{-1}B \\ x &\longmapsto \frac{x}{1} \end{aligned}$$

que geralmente não é injetivo. Por exemplo, sejam $B = \mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$ um anel e $S = \{\overline{1}, \overline{3}, \overline{5}\} \subset B$ um subconjunto multiplicativamente fechado, temos que $f(\overline{5}) = \dfrac{\overline{5}}{\overline{1}}$ e $f(\overline{3}) = \dfrac{\overline{3}}{\overline{1}}$, só que $\dfrac{\overline{5}}{\overline{1}} = \dfrac{\overline{3}}{\overline{1}} \Leftrightarrow (\overline{5} - \overline{3})\overline{3} = \overline{2} \cdot \overline{3} = \overline{0}$, logo $f(\overline{5}) = f(\overline{3})$.

Obs.: 3.3: *Se B é um domínio e $S = B \backslash \{0\}$, então $S^{-1}B$ é o corpo de fração de B.*

Definição 3.4: *O anel $S^{-1}B$ é chamado de* **anel de frações** *de B com respeito a S.*

Sejam B um anel, $D \in \mathrm{Der(B)}$ e $S \subset \ker(D)$ um subconjunto multiplicativamente fechado, temos que D induz uma derivação sobre $S^{-1}B$, dada por

$$\begin{aligned} S^{-1}D : S^{-1}B &\longrightarrow S^{-1}B \\ \frac{x}{s} &\longmapsto \frac{D(x)}{s}. \end{aligned}$$

A derivação $S^{-1}D$ não depende da escolha do representante de classe, isto é, se $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d}$, ou seja, $(ad - cb)w = 0$, para algum $w \in S$, daí

$$\begin{aligned} 0 &= D((ad-cb)w) \\ &= D(adw) - D(cbw) \\ &= D(a)dw + aD(dw) - D(c)bw - cD(bw) \\ &= D(a)dw - D(c)bw \\ &= (D(a)d - D(c)b)w \\ \text{logo, } \frac{D(a)}{b} &= \frac{D(c)}{d}. \end{aligned}$$

Lema 3.2: *Sejam B um anel, $D \in \mathrm{Der(B)}$ e $\{a_1, \ldots, a_n\} \subset \ker(D)$. Então $a_1D \circ \ldots \circ a_nD = a_1 \cdot \ldots \cdot a_nD^n$.*

Demonstração. Faremos a demonstração por indução, para $n = 1$ a igualdade é clara. Suponha que a igualdade seja valida para todo $k \leq n-1$, isto é, $a_1D \circ \ldots \circ a_{n-1}D = a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}D^{n-1}$. Agora, para todo $b \in B$, temos,

$$\begin{aligned} a_1D \circ \ldots \circ a_{n-1}D \circ a_nD(b) &= a_1 \ldots a_{n-1}D^{n-1}(a_nD(b)) \\ &= a_1 \ldots a_{n-1}a_n \left(D^{n-1}(D(b))\right) + a_1 \ldots a_{n-1} \left(D^{n-1}(a_n)\right) D(b) \\ &= a_1 \ldots a_{n-1}a_nD^n(b). \end{aligned}$$

□

Corolário 3.1: *Sejam B um anel, $D \in \mathrm{Der(B)}$ e $a \in \ker(D)$. Então $(aD)^n = a^nD^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.*

Lema 3.3: *Sejam B um anel, $D \in \mathrm{LND(B)}$ e $A = \ker(D)$.*

1. *Se $a \in A$, então $aD \in \mathrm{LND(B)}$.*
2. *Se $S \subset A$ é subconjunto multiplicativamente fechado, então $S^{-1}D : S^{-1}B \longrightarrow S^{-1}B$ pertence a $\mathrm{LND(S^{-1}B)}$ e $\ker(S^{-1}D) = S^{-1}A$.*

Demonstração. 1. Como $D \in \mathrm{LND(B)}$, então dado $b \in B$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(b) = 0$. Daí para $a \in \ker(D)$, pelo Corolário 3.1 temos que $(aD)^n(b) = a^nD^n(b) = 0$, logo $aD \in \mathrm{LND(B)}$.

2. Seja $\dfrac{b}{s} \in S^{-1}B$, como $D \in \mathrm{LND(B)}$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $D^n(b) = 0$, aplicando $S^{-1}D$ temos

$$\begin{aligned} (S^{-1}D)^n\left(\frac{b}{s}\right) &= (S^{-1}D)^{n-1}\left[(S^{-1}D)\frac{b}{s}\right] \\ &= (S^{-1}D)^{n-1}\left[\frac{D(b)}{s}\right] = \ldots \\ &= (S^{-1}D)\left[\frac{D^{n-1}(b)}{s}\right] \\ &= \frac{D^n(b)}{s} = 0. \end{aligned}$$

Claramente $S^{-1}A \subseteq \ker(S^{-1}D)$. Agora se $\dfrac{x}{s} \in \ker(S^{-1}D)$, temos que $\dfrac{D(x)}{s} = \dfrac{0}{1}$, então existe $w \in S$ tal que $D(x)w = 0$, daí $D(xw) = 0$, isto é, $xw = y \in A$, assim $xws = ys$ e consequentemente $xws - ys = 0$, e isso implica que $\dfrac{x}{s} = \dfrac{y}{ws} \in S^{-1}A$ logo temos $\ker(S^{-1}D) \subseteq S^{-1}A$;

Portanto, $S^{-1}A = \ker(S^{-1}D)$.

□

Lema 3.4: *Sejam B um anel e $D \in \mathrm{LND(B)}$. Seja $f \in B[T]$, então D possui uma única extensão $\Delta \in \mathrm{Der(B[T])}$ tal que $\Delta(T) = f$. Além disso, se $f \in B$, então $\Delta \in \mathrm{LND(B[T])}$.*

Demonstração. Seja $g = \sum_{i=1}^{n} c_iT^i \in B[T]$, definimos

$$\begin{aligned} \Delta : B[T] &\longrightarrow B[T] \\ g &\longmapsto g^{(D)} + fg' \end{aligned}$$

onde $g^{(D)} = \sum_{i=1}^{n} D(c_i)T^i$ e $g' = \sum_{i=1}^{n} ic_iT^{i-1}$. Sejam aT^i e bT^j monômios de $B[T]$. Então

$$\begin{aligned} \Delta(aT^i + bT^j) &= D(a)T^i + D(b)T^j + iafT^{i-1} + jbfT^{j-1} \\ &= (D(a)T^i + iafT^{i-1}) + (D(b)T^j + jbfT^{j-1}) \\ &= \Delta(aT^i) + \Delta(bT^j) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Delta(aT^ibT^j) &= \Delta(abT^{i+j}) \\
&= D(ab)T^{i+j} + ab\Delta(T^{i+j}) \\
&= (D(a)b + aD(b))T^{j+i} + (j+i)abT^{j+i-1}\Delta(T) \\
&= D(a)bT^{j+i} + aD(b)T^{j+i} + jabfT^{j+i-1} + iabfT^{j+i-1} \\
&= aT^i(D(b)T^j + jbfT^{j-1}) + bT^j(D(a)T^i + iafT^{i-1}) \\
&= aT^i\Delta(bT^j) + bT^j\Delta(aT^i).
\end{aligned}$$

Daí obtemos que Δ é uma extensão de D em $B[T]$ e $\Delta(T) = f$.
Suponha que exista uma derivação $\Delta_1 \in \mathrm{Der(B[T])}$ tal que Δ_1 é uma extensão de D e $\Delta_1(T) = f$. Assim,

$$\begin{aligned}
\Delta_1(g) &= \sum_{i=1}^{n} \Delta_1(c_iT^i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} (\Delta_1(c_i)T^i + c_i\Delta_1(T^i)) \\
&= \sum_{i=1}^{n} D(c_i)T^i + \Delta_1(T)\sum_{i=1}^{n} ic_iT^{i-1} \\
&= g^{(D)} + \Delta_1(T)g' \\
&= g^{(D)} + fg' \\
&= \Delta(g),
\end{aligned}$$

logo Δ é única. Além disso, se $f \in B$, então existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $D^k(f) = 0$, seja aT^n um monômio de $B[T]$, assim existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $D^m(a) = 0$, usaremos o Lema 2.8 e faremos indução sobre n para mostrar que $\Delta \in \mathrm{LND(B[T])}$.
Para $n = 1$, temos

$$\begin{aligned}
\Delta^{m+k}(aT) &= \Delta^{m+k-1}(D(a)T + af) \\
&= \Delta^{m+k-1}(D(a)T) + \Delta^{m+k-1}(af) \\
&= \Delta^{m+k-1}(D(a)T) \\
&= \Delta^{m+k-2}(D^2(a)T + D(a)f) \\
&= \Delta^{m+k-2}(D^2(a)T) + \Delta^{m+k-2}(D(a)f) \\
&= \Delta^{m+k-2}(D^2(a)T) \\
&= \ldots \\
&= \Delta^{k+2}(D^{m-2}(a)T) \\
&= \Delta^{k+1}(D^{m-1}(a)T + D^{m-2}(a)f) \\
&= \Delta^{k+1}(D^{m-1}(a)T) + \Delta^{k+1}(D^{m-2}(a)f) \\
&= \Delta^{k+1}(D^{m-1}(a)T) \\
&= \Delta^{k}(D^{m}(a)T + D^{m-1}(a)f) \\
&= \Delta^{k}(D^{m-1}(a)f) = 0.
\end{aligned}$$

Agora, suponha que para todo $i \leq n-1$, tenhamos que $\Delta^{m+ik}(aT^i) = 0$, assim

$$
\begin{aligned}
\Delta^{m+nk}(aT^n) &= \Delta^{m+nk-1}(D(a)T^n + nfaT^{n-1}) \\
&= \Delta^{m+nk-1}(D(a)T^n) + n\Delta^{m+nk-1}(f(aT^{n-1})) \\
&= \Delta^{m+nk-1}(D(a)T^n) \\
&= \Delta^{m+nk-2}(D^2(a)T^n + nfD(a)T^{n-1}) \\
&= \Delta^{m+nk-2}(D^2(a)T^n) + n\Delta^{m+nk-2}(f(D(a)T^{n-1})) \\
&= \Delta^{m+nk-2}(D^2(a)T^n) \\
&= \dots \\
&= \Delta^{nk+2}(D^{m-2}(a)T^n) \\
&= \Delta^{nk+1}(D^{m-1}(a)T^n + nfD^{m-2}(a)T^{n-1}) \\
&= \Delta^{nk+1}(D^{m-1}(a)T^n) + n\Delta^{nk+1}(f(D^{m-2}(a)T^{n-1})) \\
&= \Delta^{nk+1}(D^{m-1}(a)T^n) \\
&= \Delta^{nk}(D^m(a)T^n + nfD^{m-1}(a)T^{n-1}) \\
&= n\Delta^{nk}(f(D^{m-1}(a)T^{n-1})) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, $\Delta \in \mathrm{LND}(\mathrm{B}[\mathrm{T}])$. □

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao CNPq (proc. 480477/2013-2) e à FAPEMIG (proc. CEX-PPM-00127-12) pelo auxílio financeiro recebido.

REFERÊNCIAS

[1] D. Daigle: *Locally Nilpotent Derivations*. Lukecin, Poland, 2003. Lecture notes for the September School of Algebraic Geometry.

[2] D. Eisenbud: *Commutative Algebra with a View Toward Algebraic Geometry*. Springer-Verlag, 1994.