

O PROCESSO DE WEIBULL POISSON PARA A MODELAGEM DA CONFIABILIDADE EM SISTEMAS REPARÁVEIS

Luiz Gustavo Fraga

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Engenharia Mecânica

luizgustavo.aero@gmail.com

Edmilson Rodrigues Pinto

Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática

edmilson@famat.ufu.br

RESUMO

Sistemas reparáveis são aqueles sistemas que, após a ocorrência de uma falha, podem ser reparados, por exemplo, por substituição ou reparo de algum componente do sistema. Em alguns casos, a confiabilidade desses sistemas, após o reparo, retorna ao mesmo estado de antes da falha. Assim, modelos para sistemas reparáveis devem descrever as ocorrências de falhas no tempo de vida do sistema, porém diferente dos modelos para sistemas não-reparáveis. O Processo de Poisson Não-Homogêneo é comumente usado como modelo para sistemas reparáveis. A função de intensidade de falha para o modelo, que nesse artigo segue uma distribuição de Weibull, varia de acordo com o tempo e pode apresentar uma fase de melhoramento ou de desgaste do sistema. A modelagem desses sistemas é extremamente importante pois pode detectar a deterioração do sistema, quando a confiabilidade diminui, o que influencia diretamente nas decisões de manutenções preventivas ou inspeções. O objetivo deste artigo é apresentar, de forma clara e concisa, o modelo de Weibull Poisson para a modelagem da confiabilidade em sistemas reparáveis, fornecendo ferramentas computacionais para estimação dos parâmetros e testes de bondade de ajuste do modelo, além de dois exemplos de aplicações.

ABSTRACT

Repairable systems are those systems which, after the occurrence of a failure can be repaired, for example, by replacing or repairing a component in the system. In some cases the reliability of the systems returns to its initial state before the repairs have been completed. Thus repairable model systems should describe the occurrence of failures during the life time of the system, this is the difference from systems that are non-repairable. The non-homogeneous Poisson process is commonly used as a model for repairable systems. The failure intensity function for the model, that in this case follow a Weibull distribution, vary in accordance with time and can present an improvement phase or wearing out of the system. The modelling of these systems are extremely important as it can detect the deterioration of the system, when the reliability decreases, which influences directly in the maintenances and inspection decisions. The objective of this article is to present, in a clear and concise form, the Weibull Poisson model for the modelling of the reliability in repairable systems, providing computational tools to estimation of the parameters and goodness of fit tests, plus two application examples.

Palavras-chave: Sistemas Reparáveis, Processo Weibull Poisson, Confiabilidade, Modelo Crow AM-SAA.

1 INTRODUÇÃO

Atualmente, com o avanço tecnológico, a criação de produtos e sistemas cada vez mais complexos implica em maiores gastos e processos de manutenção e reparo mais sofisticados. Sistemas complexos, caso falhem, necessitam de reparo e não da troca de seus componentes, pois nesse último caso, o alto custo agregado o torna economicamente inviável. Diante disso, o estudo da confiabilidade é extremamente importante, pois apresenta informações relevantes para se aplicar reparos e manutenções nesses produtos da forma mais econômica e otimizada possível.

Em sistemas mais simples, observando a característica do sistema, a confiabilidade é modelada através da estimação de parâmetros de funções relacionadas ao tempo de vida do produto. Porém, em caso de manutenção, é feita a substituição dos componentes que apresentaram defeito. Em sistemas mais complexos, a troca não é viável e recomenda-se que se faça o reparo dos componentes que falharam. Em relação a sistemas reparáveis, a modelagem da confiabilidade é mais complexa, pois deve-se considerar, além de seu tempo de vida, todos os equipamentos que compõem o sistema.

Na confiabilidade de sistemas não-reparáveis, onde a falha de algum componente do sistema precede a substituição do mesmo, usa-se modelos onde não é observado desgaste do sistema com o passar do tempo e possuem intensidade de falha constante. Em máquinas complexas, como um motor a jato de um avião, em que o sistema, o motor, não é substituído mas sim, reparado quando falha, utiliza-se processos para a obtenção da confiabilidade em que a intensidade de falha varia de acordo com o tempo de vida do sistema. Em modelagem de sistemas com deterioração, considera-se que taxa de falha cresce com a idade do sistema, porém, em sistema de crescimento, se observa uma redução da intensidade de falha.

Sistemas reparáveis são frequentemente modelados com um processo de contagem de falhas. Análises de confiabilidade desses sistemas devem considerar o efeito de sucessivas ações de reparo. Quando existe uma tendência nos dados de falha do sistema, o processo de falha pode frequentemente ser modelado como um processo de renovação, onde após sucessivas ações de reparo o sistema permanece tão bom quanto novo. Porém, em sistemas com deterioração e sistemas de crescimento, esse processo não se aplica [6].

Quando o sistema é submetido à confiabilidade de crescimento, é observado um aumento no tempo entre sucessivas falhas desse sistema. Quando se trata de sistemas com deterioração, é importante detectar que a confiabilidade do sistema está diminuindo, ou seja, ocorre um aumento na intensidade de falha. Decisões de manutenções preventivas ou inspeções requerem essa informação, processos de contagem de falhas são adequados para essa situação.

Em sistemas na fase inicial de projeto, são desenvolvidos programas de teste para identificar possíveis falhas de projeto e implementar melhorias através do aumento da confiabilidade do sistema e diminuição da intensidade de falha. Testes de crescimento de confiabilidade como estes têm sido adotados por muitas indústrias incluindo as de defesa, automotiva e de telefonia [6].

Um dos processos mais utilizados para a modelagem de confiabilidade de sistemas usando processos de contagem de falha, é o Processo de Poisson. Esse modelo leva em consideração as falhas do sistema e em que tempo t da vida do sistema ela ocorre. Caso seja observada uma periodicidade nos tempos de falha do sistema, usa-se o Processo de Poisson Homogêneo (PPH), caso contrário, ou seja, se há uma tendência de mundança na intensidade de falha em relação a idade do sistema, o Processo de Poisson Não-Homogêneo

(PPNH) é utilizado. Um dos principais modelos de confiabilidade em sistemas reparáveis é obtido usando PPNH com função de intensidade de falha Weibull.

Existem outros processos para obtenção de confiabilidade em sistemas complexos (veja, por exemplo, [1], [4] e [7]). O objetivo deste artigo é apresentar, de forma clara e concisa, o modelo de Weibull Poisson para a modelagem da confiabilidade em sistemas reparáveis, fornecendo ferramentas computacionais para estimação dos parâmetros e testes para verificação da bondade de ajuste do modelo.

O artigo está estruturado da seguinte maneira, na Seção 2, são discutidos o Processo de Poisson Homogêneo e Não-Homogêneo com implicações teóricas e práticas desses modelos na Teoria da Confiabilidade de sistemas complexos ou reparáveis. Na Seção 3 é abordado o Processo de Weibull Poisson, estimação de parâmetros via método de máxima verossimilhança e procedimentos de bondade de ajuste. Na Seção 4, são abordadas aplicações desses procedimentos na confiabilidade de sistemas reparáveis. Finalmente, na Seção 5, são feitas algumas considerações finais sobre o assunto.

2 PROCESSO DE POISSON

Suponha que um sistema inicia sua operação em um tempo $t = 0$ e opera por um período de tempo $t = T$. O tempo T deve ser o tempo de operação de algum sistema, como por exemplo, no caso de um veículo, significaria a quilometragem percorrida. O número de falhas $N(t)$ experimentado pelo sistema durante a operação é aleatório e os tempos sucessivos de ocorrência dessas falhas $0 < X_1 < X_2 < \dots < X_{N(t)}$ também são aleatórios. Se durante a operação do sistema os tempos entre as ocorrências das sucessivas falhas $X_i - X_{i-1}$ ($i = 1, 2, \dots, N(t)$) são independentes e considerados variáveis aleatórias identicamente distribuídas com intensidade de falha conhecida, então $\{N(t), t > 0\}$ é um Processo de Poisson [3].

A função de intensidade de falha pode ser constante, caracterizando o Processo de Poisson Homogêneo (PPH) ou, caso essa função não seja constante, tem-se Processo de Poisson Não-Homogêneo (PPNH).

Considere que λ represente a função de intensidade de falha do Processo de Poisson Homogêneo (PPH). Para um intervalo de tempo, Δt , infinitamente pequeno, $\lambda \Delta t$ é aproximadamente a probabilidade de um evento ocorrer em algum intervalo de comprimento Δt , independentemente do tempo t em que se inicia esse intervalo. Em termos de um sistema que está em uso, isso implica que ele não melhora nem piora com a idade, isto é, sua intensidade de falha é mantida constante [1].

Em sistemas reparáveis, particularmente os do tipo eletrônico, a intensidade de falha é constante. Se um sistema complexo consiste em um grande número de componentes, cada um funcionando independentemente, se cada componente é substituído após falhar e se a falha de um componente resulta na falha do sistema, então as ocorrências de falhas do sistema se aproximará de uma intensidade constante [1].

Para um PPH com função de intensidade constante λ , considera-se que o tempo de vida de um determinado componente segue uma distribuição exponencial. Nesse caso, a confiabilidade do componente é dada pela função $R(t) = e^{-\lambda t}$, cujo gráfico é mostrado na Figura 1.

Sistemas reparáveis, em sua maioria, são compostos por muitos componentes e, devido ao alto nível de complexidade, apresentam, durante seu tempo de vida útil, uma fase de desgaste que eventualmente os tornam economicamente inviável e muito pouco confiáveis para continuar em uso sem passar por revisões.

Embora o PPH não possa descrever as ocorrências de falhas para muitos sistemas ao longo de todo seu tempo de vida, ele é frequentemente usado para modelar o tempo de vida de algumas partes do sistema. O PPH é um modelo usado em estudos envolvendo aumento de confiabilidade, políticas de manutenção ou revisões [1].

Uma generalização do Processo de Poisson Homogêneo que permite mudanças ou

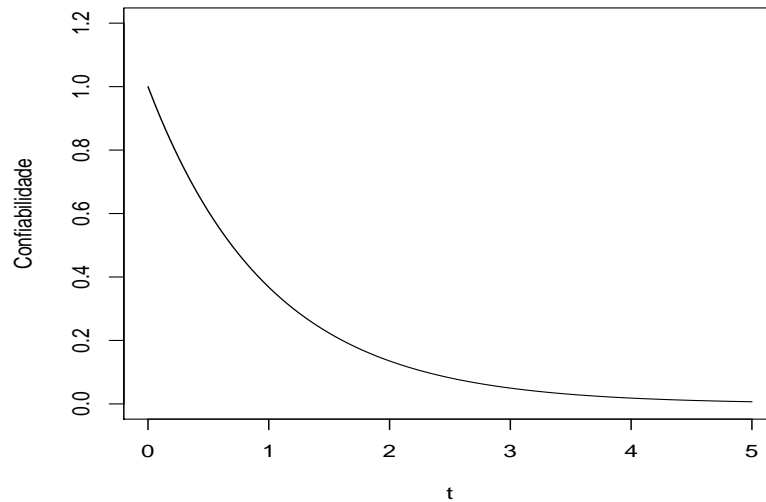


FIGURA 1: Confiabilidade de Componente que segue Distribuição Exponencial

tendências na intensidade de falhas dos sistemas é chamada Processo de Poisson Não-Homogêneo (PPNH) com função de intensidade de falha $u(t)$, onde $u(t)$ é uma função que varia com o tempo de vida do sistema. Analogamente para $\lambda\Delta t$ no PPH, $u(t)\Delta t$ é aproximadamente a probabilidade de que uma falha ocorra no intervalo $(t, t + \Delta t)$.

3 PROCESSO DE WEIBULL POISSON

O Processo de Weibull Poisson é um PPNH com função de intensidade que segue uma distribuição de Weibull. Ele é utilizado para análises de confiabilidade em sistemas reparáveis devido à função de intensidade $u(t)$ permitir mudanças ou tendências na intensidade de falha de acordo com o tempo de vida t do sistema. Nesse artigo, assume-se que as falhas de cada componente estudado ocorrem de acordo com o Processo de Weibull Poisson com função de intensidade de falha apresentada na equação (1).

$$u(t) = \lambda\beta t^{\beta-1} \quad (1)$$

Note que no caso particular em que $\beta = 1$, a equação (1) se resume à constante λ , recaindo no Processo de Poisson Homogêneo.

No caso geral do PPNH, a função de intensidade $u(t)$ depende da idade t do sistema. O sistema pode apresentar uma fase de melhoramento, onde $u(t)$ decresce, uma fase estável, com função de intensidade constante, ou uma fase de desgaste do sistema, quando $u(t)$ cresce. Em termos matemáticos, isso significa que a função de intensidade de falha cresce quando $\beta > 1$, decresce com $\beta < 1$ e se torna constante com $\beta = 1$ [3].

Os gráficos da função de intensidade de falha com $\beta < 1$ (decrecente) e $\beta > 1$ (crescente), fixando $\lambda = 1$, são mostrados nas Figuras 2 e 3, respectivamente.

Se as falhas de um sistema reparável seguem um PPNH, então o número de falhas e o tipo de reparo tomado durante um período de tempo $(0, t)$ não afeta a probabilidade de falhas em $(t, t + \Delta t)$, ou seja, caso um sistema falhe no tempo t e subsequentemente seja reparado, ele volta à operação com a mesma confiabilidade de antes da falha. De acordo com o PPNH, a probabilidade de o sistema falhar durante $(t, t + \Delta t)$ é $u(t)\Delta t$, e seria igual a esse valor mesmo se o sistema não falhasse no tempo t .

Na prática, contudo, se o reparo for de boa qualidade, é de se esperar uma diminuição na probabilidade de falha depois do reparo em relação ao valor no momento da falha,

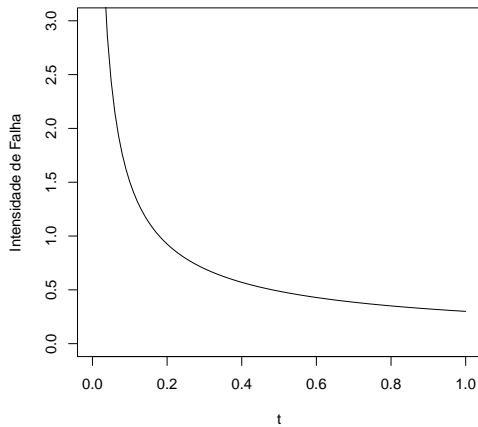


FIGURA 2: Intensidade de Falha Decrescente, com $\beta = 0.8$

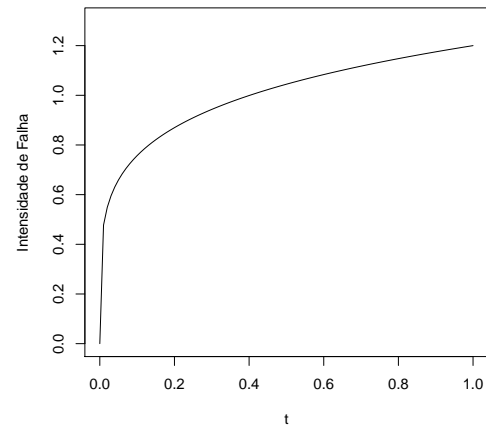


FIGURA 3: Intensidade de Falha Crescente, com $\beta = 1.2$

porém, em sistemas complexos constituídos por muitos componentes, a substituição ou reparo de um único componente não diminui significativamente a probabilidade de falha [1].

Nesse artigo, o interesse particular está no conceito de "Missão de Confiabilidade" para sistemas reparáveis complexos, que significa a probabilidade $R(t)$ de que um sistema de idade t complete uma missão de duração fixa T com sucesso. Se o sistema é reparável e as falhas que o afetam seguem um Processo de Weibull Poisson, então a probabilidade de que um sistema com idade t não falhe em $(t, t + \Delta t)$ é dada na equação (2).

$$R(t) = e^{-[\lambda(t+\Delta t)^\beta - \lambda t^\beta]} \tag{2}$$

3.1 MÉTODOS DE ESTIMAÇÃO

Quando analisamos sistemas reparáveis, os dados de falha são coletados quando o sistema está em uso, porém essas falhas são geradas por todos os componentes que operam o sistema durante períodos de tempo que podem ser diferentes. Para modelar a confiabilidade desse tipo de sistema é utilizado um procedimento que considera o número k de componentes do sistema, cada um com seu tempo de operação, até um tempo T máximo de funcionamento do sistema. O período de tempo, nesse caso, é representado por $(0, T)$. Assume-se que os componentes do sistema fazem parte de uma mesma população, ou seja, o tempo de vida de cada componente possui a mesma distribuição de probabilidade. Esse método pode ser adaptado para o comportamento de sistemas com múltiplos componentes através da superposição dos tempos de falhas dos k componentes em uma única linha de tempo. Figura 4 mostrada a superposição com $k = 3$.

Isso permite que, para a superposição dos componentes, a falha do sistema seja observada sempre que um dos componentes falhar. Desta forma, de acordo com [7], a intensidade de falha $u(t)$ do sistema é representada pela equação (3).

$$u^*(t) = ku(t) = k\lambda\beta t^{\beta-1}, \tag{3}$$

onde $u^*(t)$ tem um parâmetro $\lambda^* = k\lambda$.

3.1.1 ESTIMADOR DE MÁXIMA VEROSSIMILHANÇA

Suponha que o q -ésimo componente de um sistema seja observado de um tempo $S_q = 0$ até um tempo $T_q = T$, $q = 1, 2, \dots, k$, e N_q seja o número de falhas de cada componente.

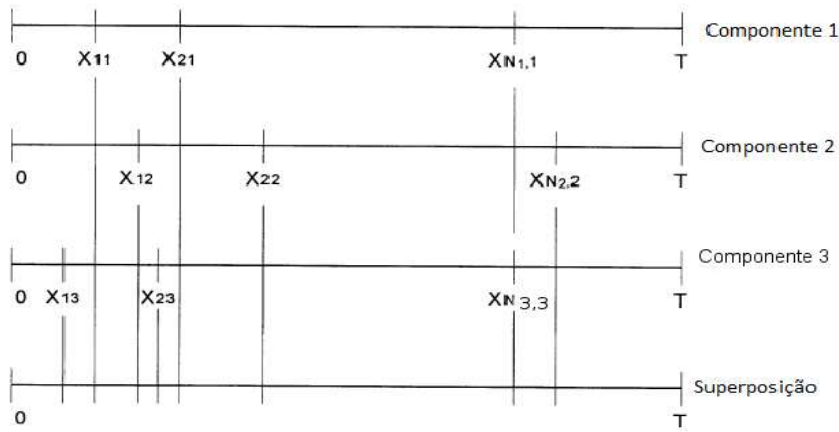


FIGURA 4: Superposição de k Componentes

Segundo Crow [1], os estimadores de máxima verossimilhança de λ e β da equação (3) são os valores $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$ que satisfazem as equações (4) e (5).

$$\hat{\lambda} = \frac{N}{kT\hat{\beta}} \quad (4)$$

$$\hat{\beta} = \frac{N}{\sum_{q=1}^k \sum_{i=1}^{N_q} \ln \frac{T}{X_{iq}}}, \quad (5)$$

onde $N = \sum_{q=1}^k N_q$.

Assim, o estimador da função de intensidade $u(t)$ é dado pela equação (6).

$$\hat{u}(t) = \hat{\lambda}\hat{\beta}t^{\hat{\beta}-1} \quad (6)$$

O Apêndice A apresenta uma função, em linguagem C++, que permite obter o estimador de máxima verossimilhança para os parâmetros λ e β .

3.1.2 INTERVALO DE CONFIANÇA

De acordo com Crow [1], para a construção de intervalo de confiança de β usa-se o estimador não-viesado de β , $\bar{\beta}$, apresentado na equação (7).

$$\bar{\beta} = \frac{N-1}{N} \hat{\beta}. \quad (7)$$

Uma função em C++, que permite calcular $\bar{\beta}$ é dada no Apêndice A.

Os limites inferior e superior do intervalo de confiança para β , com $1 - \alpha$ de confiança, são apresentados nas equações (8) e (9), respectivamente.

$$\beta_I = \bar{\beta} \frac{\chi^2_{(\frac{\alpha}{2}, 2N)}}{2(N-1)} \quad (8)$$

$$\beta_S = \bar{\beta} \frac{\chi^2_{(1-\frac{\alpha}{2}, 2N)}}{2(N-1)} \quad (9)$$

Onde $\chi^2_{(\alpha, gl)}$ representa o percentil α de uma distribuição de qui-quadrado com gl graus de liberdade. O Apêndice A apresenta uma função em R [5] que calcula os intervalos de confiança para β .

Assim, o intervalo de confiança para β com $1 - \alpha$ de confiança é dado por:

$$IC(\beta)_{1-\alpha} = (\beta_I, \beta_S)$$

3.2 PROCEDIMENTOS DE BONDADDE DE AJUSTE

Na prática, é desejável que se faça a verificação do ajustamento entre o modelo obtido e os dados coletados através de um teste de bondade de ajuste. Para o Processo de Weibull Poisson usa-se o Teste de Cramér-von Mises. Este teste é apropriado sempre que o tempo inicial de cada componente do sistema começar em $t = 0$ e os dados de falhas estejam contidos em um intervalo de tempo $(0, T)$. Um teste de bondade de ajuste que pode ser aplicado sobre circunstâncias mais gerais é o Teste Qui-Quadrado [2].

3.2.1 TESTE DE CRAMÉR-VON MISES

Suponha um conjunto de dados de falhas para o q -ésimo componente de um sistema ao longo do intervalo $(0, T)$ com sucessivos tempos de falhas $0 < X_{1,q} < X_{2,q} < \dots < X_{N_q,q} < T$ ($q = 1, \dots, k$).

Considere o caso em que a observação das falhas se inicia em $t = 0$ e termina em um tempo truncado T . Admita-se que $N = \sum_{q=1}^k N_q$, e $Z_j = \frac{X_{iq}}{T}$, $i = 1, \dots, q$, ($q = 1, \dots, k$) e $j = 1, \dots, N$.

O parâmetro de Cramér-von Mises é representado na equação (10), onde $\bar{\beta}$ é dado na equação (7).

$$C_N^2 = \frac{1}{12N} + \sum_{j=1}^N \left(Z_j^{\bar{\beta}} - \frac{2j-1}{2N} \right)^2 \quad (10)$$

Valores críticos para o Teste de Cramér-von Mises são apresentados na Tabela 3 do Apêndice B, para valores de N entre 2 e 100, com níveis de significância de 20%, 10% e 5%.

Se C_N^2 calculado for menor que o valor crítico correspondente a ele na Tabela 3 do Apêndice B, então aceita-se a hipótese de que os dados de falhas dos k componentes do sistema seguem o Processo de Weibull Poisson [2].

O Apêndice A apresenta uma função em R [5] para calcular o parâmetro de Cramér-von Mises.

3.2.2 TESTE QUI-QUADRADO

Diferentemente do Teste de Cramér-von Mises, onde é necessário que o tempo inicial de coleta dos dados de falhas comece em $t = 0$, o Teste Qui-Quadrado é mais geral e pode ser aplicado em qualquer situação, independentemente do tempo de funcionamento do sistema.

O Teste Qui-Quadrado considera que o número de falhas esperadas ($\hat{\theta}$) para um componente ao longo de intervalo de tempo (a, b) é estimado pela equação (11), onde $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$ são os estimadores de máxima verossimilhança calculados pelas equações (4) e (5).

$$\hat{\theta} = \hat{\lambda} b^{\hat{\beta}} - \hat{\lambda} a^{\hat{\beta}} \quad (11)$$

Para esse teste, o período de tempo de coleta de dados de falhas do sistema é dividido em pelo menos três intervalos e os comprimentos desses intervalos não precisam ser necessariamente iguais.

Para um dado intervalo (a_j, b_j) , o número de falhas esperadas do sistema $\hat{\theta}(j)$ ($j = 1, \dots, d$), onde d é o número de intervalos, é representado na equação (12).

$$\hat{\theta}(j) = k(\hat{\lambda} b_j^{\hat{\beta}} - \hat{\lambda} a_j^{\hat{\beta}}) \quad (12)$$

onde k representa o número de componentes considerados no sistema.

Seja $N(j)$ ($j = 1, \dots, d$) o número de falhas observadas ao longo de cada intervalo. Assim o valor da estatística de teste χ_{calc}^2 é dada pela equação (13).

$$\chi_{calc}^2 = \sum_{j=1}^d \frac{[N(j) - \hat{\theta}(j)]^2}{\hat{\theta}(j)} \quad (13)$$

A variável aleatória χ_{calc}^2 segue, aproximadamente, uma distribuição Qui-Quadrado com $d - 2$ graus de liberdade. A hipótese a ser testada é H_0 : os dados seguem o Processo de Weibull Poisson.

No Apêndice A está disponível um programa em R [5] que realiza o Teste Qui-quadrado, fornecendo o valor p para o teste. Se o valor p for menor que o nível de significância considerado, rejeita-se H_0 .

4 APLICAÇÕES

4.1 SISTEMA REPARÁVEL COM TRÊS COMPONENTES

Esse problema foi abordado por Crow [2] e considera um sistema reparável com três componentes. Os tempos de falha desses componentes, em horas, são mostrados na Tabela 1.

TABELA 1: Tempos de Falha dos Três Componentes do Sistema

Componente 1	Componente 2	Componente 3
X_{i1}	X_{i2}	X_{i3}
1.2	1.4	0.3
55.6	35.0	32.6
72.7	46.8	33.4
111.9	65.9	214.7
121.9	181.1	396.2
303.6	712.6	480.0
326.9	10005.7	588.9
1568.4	1029.9	1043.9
1913.5	1675.7	1136.1
	1787.5	1288.1
	1867.0	1408.1
		1439.4
		1604.8

Para cada componente, o tempo inicial de funcionamento é 0 e o tempo final, 2000, ou seja, $S_q = 0, T_q = 2000, q = 1, 2, 3$.

Considerando que o sistema segue um Processo de Weibull Poisson, os valores de $\hat{\lambda}$ e $\hat{\beta}$, calculados através das equações (4) e (5), respectivamente, são:

$$\hat{\lambda} = 0.363477 \quad e \quad \hat{\beta} = 0.448622$$

A função de intensidade de falha é estimada pela equação (6). Para esse sistema, $\hat{u}(t)$ é apresentada na equação (14).

$$\hat{u}(t) = 0.163t^{-0.551}. \quad (14)$$

O gráfico de $\hat{u}(t)$ é mostrado na Figura 5.

Note que a função de intensidade de falha decrescente indica que o sistema melhora com o tempo, ou seja, o número de falhas dos componentes do sistema tende a diminuir.

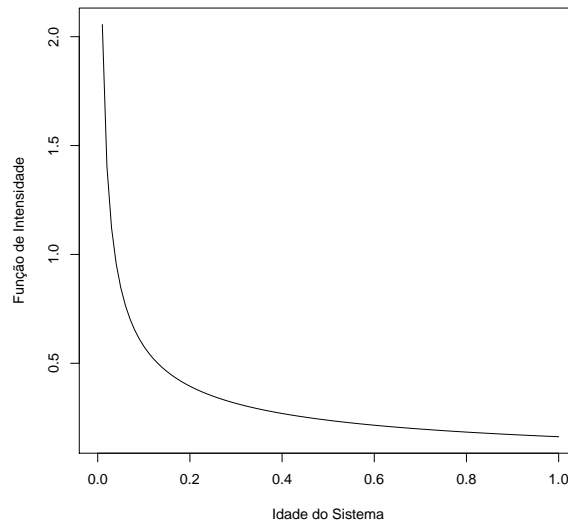


FIGURA 5: Função de Intensidade de Falha do Sistema

Para a estimação da função de confiabilidade do sistema, a equação (2) é utilizada. A equação (15) apresenta $\hat{R}(t)$ para um intervalo de tempo $(t, \Delta t)$.

$$\hat{R}(t) = e^{-[0.363(t+\Delta t)^{0.449} - 0.363t^{0.449}]} \tag{15}$$

Suponha que o sistema tenha uma garantia contra falhas nas primeiras 500 horas de operação, ou seja, começando em $t = 0$ durante um período de tempo $\Delta t = 500$, então a equação (15), com $t = 0$ e $\Delta t = 500$, deve ser usada para avaliar a probabilidade de que não ocorram falhas durante esse período, chamada de Missão de Confiabilidade. Neste caso, $\hat{R}(0) = 0.00275$. Como há um crescimento na confiabilidade, se o tempo de vida do sistema é maior, a confiabilidade também é maior, por exemplo, para $t = 1000$ horas, $\hat{R}(1000) = 0.19958$.

O gráfico da missão de confiabilidade para um intervalo de 500 horas de operação é mostrado na Figura 6.

Para verificar se os tempos de falha do sistema realmente seguem um Processo de Weibull Poisson é necessário que se faça um teste de bondade de ajuste. Nesse caso, o teste de Cramér-von Mises pode ser aplicado, pois o sistema é observado no intervalo de tempo $(0, 2000)$. Através da equação (8), $C_N^2 = 0.08167$. Observando a Tabela 3, com $N=33$, e adotando 5% de nível de significância, o valor crítico de Cramér-von Mises é aproximadamente 0.218. Como C_N^2 é menor que o valor crítico, aceita-se que os dados de falha do sistema seguem um Processo de Weibull Poisson.

Outro teste de bondade de ajuste que pode ser realizado é o Teste Qui-Quadrado. Com os valores estimados de λ e β , dividindo o tempo de operação do sistema em cinco intervalos iguais, cada um com 400 horas, e considerando um nível de significância de 5%, obteve-se o valor $p = 0.4562026$. Como o valor p é maior que o nível de significância, aceita-se H_0 , ou seja, aceita-se que os dados seguem um Processo de Weibull Poisson.

O intervalo de confiança para β , com 95% de confiança, usando os resultados das equações (8) e (9), é dado por:

$$IC(\beta)_{95\%} = (0.309, 0.614)$$

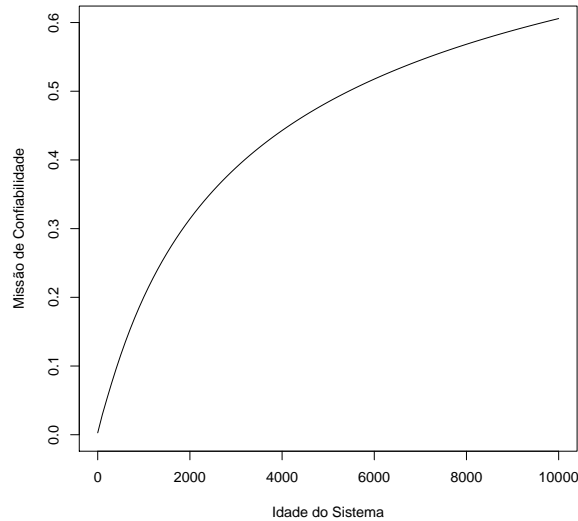


FIGURA 6: Missão de Confiabilidade para Intervalo de 500 Horas de Operação do Sistema

4.2 SISTEMA REPARÁVEL EM UM MOTOR A JATO

Motores a jato representam a vanguarda da tecnologia mundial, pois possuem avançadas técnicas de produção, alto controle de qualidade e são testados extensivamente. Esses motores, com componentes cada vez mais complexos e modernos, podem alcançar altos níveis de confiabilidade. Porém, alguns desses sistemas podem apresentar falhas, que dependem de fatores internos e externos como fatores específicos do componente (design e produção); fatores de operação (pressão, temperatura); fatores ambientes (condições ambientais como umidade e temperatura) e; fatores de manutenção (frequência e estratégias de inspeção).

O problema, introduzido em [7], considera 25 motores a jato de uma companhia aérea. Como são considerados indivíduos idênticos, de uma mesma população, podem ser modelados como sistemas reparáveis complexos que seguem o Processo de Weibull Poisson, considerando k como sendo o número de indivíduos dessa população. A Tabela 2 disponibiliza os dados de falha dos motores a jato.

Considerando as equações (4) e (5), os valores estimados para os parâmetros da função de intensidade de falha, dada na equação (1), são:

$$\hat{\lambda} = 0.000554658 \text{ e } \hat{\beta} = 1.342$$

Observando que o valor de β é maior que 1, pode-se concluir que os sistemas possuem uma função de intensidade de falha crescente, ou seja, se desgastam com o tempo. A função $\hat{u}(t)$ para os motores a jato é mostrada na equação (16). A Figura 7 apresenta o gráfico de $\hat{u}(t)$.

$$\hat{u}(t) = 0.000744t^{0.342}. \tag{16}$$

A missão de confiabilidade, para o caso estudado, refere-se à probabilidade de que os motores a jato estejam em funcionamento durante um período de tempo Δt até a próxima manutenção, que é estimado baseado na idade dos sistemas, ou seja, quanto maior a idade dos sistemas, mais desgaste eles apresentam, e menor o período entre as manutenções. Então, a função $R(t)$ é a probabilidade de que os motores com idade t não apresentem falhas até a próxima manutenção, que ocorrerá no tempo $t + \Delta t$.

TABELA 2: Tempos de Falha dos Componentes do Motor a Jato

Componentes	Tempos de Falha			
1	150	407	526	
2	291	439		
3	93	179	357	547
4	53	203	275	395
5	2	188	265	364
6	65	250	370	550
7	183	290	545	
8	144	338	523	
9	223	531		
10	197	397		
11	187	215	357	
12	197	356		
13	213	370		
14	171	332	539	
15	197	213	435	
16	200	312		
17	262	509		
18	255	395		
19	286	452		
20	206	383	479	
21	179	444		
22	232	488		
23	165	417		
24	155	373		
25	203	292	469	

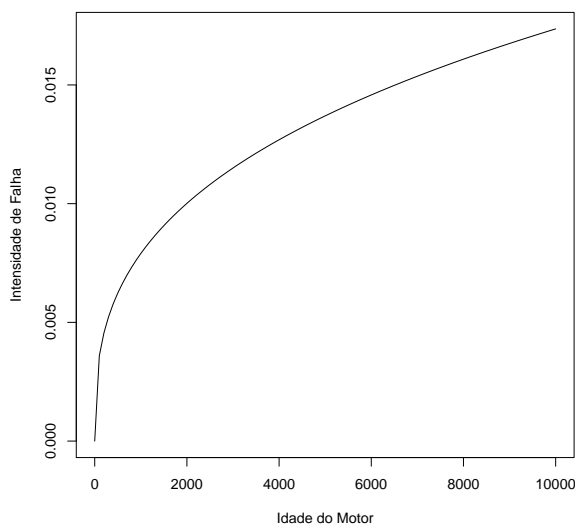


FIGURA 7: Função de Intensidade de Falha para o Motor a Jato

Supondo que a manutenção dos motores esteja fixada no tempo $\Delta t = 200$ horas, a função de confiabilidade é dada na equação (17).

$$\hat{R}(t) = e^{-[0.00055(t+200)^{1.342} - 0.00055t^{1.342}]} \tag{17}$$

No gráfico de $\hat{R}(t)$ mostrado na Figura 8, nota-se que missão de confiabilidade dos motores a jato diminui com o aumento da idade dos sistemas. Para se obter os mesmos níveis de confiabilidade durante toda a vida útil do motor, os fabricantes recomendam uma redução do intervalo de tempo entre as sucessivas manutenções de acordo com o envelhecimento do motor.

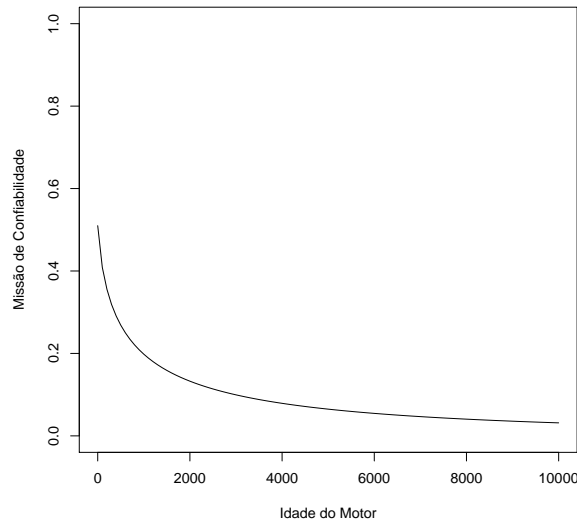


FIGURA 8: Missão de Confiabilidade para Intervalo de 200 Horas de Operação do Motor

Realizando o teste de Cramér-von Mises para avaliar se os dados de falha do motor seguem um Processo de Weibull Poisson, tem-se que o parâmetro $C_N^2 = 0.1910326$. Para um nível de significância de 5% e $N = 66$, o valor crítico para o teste é de 0.220. Como o parâmetro calculado é menor que o valor crítico, pode-se afirmar que os dados seguem um Processo de Weibull Poisson.

Para este caso, o Teste Qui-Quadrado também pode ser realizado. Com os valores estimados de λ e β , dividindo o tempo de operação do motor a jato em cinco intervalos iguais, cada um com 110 horas, e considerando um nível de significância de 5%, o teste fornece o valor $p = 0.097$. Como o valor p é maior que o nível de significância, não há evidência para rejeitar H_0 , ou seja, pode-se aceitar que os dados seguem um Processo de Weibull Poisson.

O intervalo de confiança para β , com 95% de confiança, é dado por:

$$IC(\beta)_{95\%} = (1.054, 1.710)$$

5 CONCLUSÃO

Sistemas Reparáveis são sistemas complexos compostos por diversos componentes, onde a falha de alguns desses componentes resulta na falha de todo o sistema. Nesse caso, o Processo de Poisson, com função de intensidade de falha variável que segue uma Distribuição de Weibull, é utilizado para o modelagem de confiabilidade. Esse processo também pode ser aplicado à sistemas reparáveis complexos que fazem parte de uma mesma população, ou seja, são idênticos.

Para sistemas reparáveis, a estimação dos parâmetros da função de intensidade de falha mostra se o sistema apresenta melhoramento ou desgaste com o passar do tempo, ou seja, caso o parâmetro β seja menor que 1, o sistema melhora com o tempo, caso contrário, se desgasta. Isso é extramamente importante quando se deve tomar decisões a respeito

de manutenções preventivas ou inspeções. Sistemas em fase inicial de projeto também utilizam o Processo de Weibull de Poisson para identificar falhas de projeto ou melhorar o desenvolvimento do sistema.

A modelagem de confiabilidade de sistemas reparáveis é muito importante, pois é a partir dela que os fabricantes e empresas de manutenção aplicam reparos e manutenções da forma mais otimizada e econômica possível, o que significa um menor custo de operação desses sistemas sem que os níveis de confiabilidade e segurança diminuam. Para o caso específico da Subseção 4.2, a confiabilidade dos motores a jato depende do tempo até a próxima manutenção e do tempo de vida dos motores, quanto maior são esses períodos, menor é a confiabilidade dos sistemas. Então, a missão de confiabilidade refere-se à probabilidade de que os motores estejam em funcionamento até a próxima manutenção. Com essa informação, os fabricantes podem estimar o tempo que os motores a jato deve permanecer em operação sem que seja necessária uma manutenção, otimizando ao máximo esse serviço.

REFERÊNCIAS

- [1] L. H. Crow: *Reliability Analysis for Complex, Repairable Systems*. Rel. Téc., AMSAA - Army Materiel Systems Analysis Activity, 1975.
- [2] L. H. Crow: *Evaluating the Reliability of Repairable Systems*. In *Reliability and Maintainability Symposium - RAMS*, 1990.
- [3] L. H. Crow: *Confidence Intervals on the Reliability of Repairable Systems*. In *Reliability and Maintainability Symposium - RAMS*, 1993.
- [4] K. Muralidharan: *A Review of Repairable Systems and Point Process Models*. ProbStat Forum, 01:26–49, 2008.
- [5] R Development Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2008. <http://www.R-project.org>, ISBN 3-900051-07-0.
- [6] P. Wang e D.W. Coit: *Repairable Systems Reliability Trend Tests and Evaluation*. In *Reliability and Maintainability Symposium - RAMS*, 2005.
- [7] G. R. Weckaman: *Modeling the Reliability of Repairable Systems in the Aviation Industry*. Computers & Industrial Engineering, 40:51–63, 2001.

APÊNDICE A

Listagem de programas para estimação dos parâmetros e testes de bondade de ajuste do modelo.

Apêndice A_1

Programa em linguagem C++ que calcula os estimadores dos parâmetros λ e β , usando o método de máxima verossimilhança. O estimador não viesado de β também é obtido.

```
#include <iostream>
#include <math.h>
#include <stdio.h>

using namespace std;

int main(){

double t, lambda, betachapeu, soma, lambdachapeu, betabarra, soman, somanq, entrada;
int k, j, elementos;
cout << "Digite T" << endl;
cin >> t;
cout << "Digite k - numero de sistemas - .\nPara terminar uma entrada coloque -1" << end;
cin >> k;

for (int i=0; 1<k; i++){
soma = 0;
j=0;
elementos = 0;
while(1){
cin >> entrada;

if (entrada == -1)
break;

elementos ++;
soma = soma + log(t/entrada);
j++;
}
soma = soman + elementos;
somanq = somanq + soma;
}
betachapeu = soman/somaenq;
lambdachapeu = soman/(k*pow(t,betachapeu));
betabarra = (soman-1)/soman;

cout << "betachapeu =" << betachapeu << endl;
cout << "lambdachapeu =" << lambdachapeu <<endl;

return 0;
system ("pause");

}
```

Apêndice A₂

Função em R [5] que calcula o intervalo de confiança para β .

```
betabarra <- #inserir valor de betabarra
alfa<- #inserir nível de significância
N<- #inserir número total de falhas do sistema

betainferior <- betabarra*(qchisq(alfa/2,2*N)/(2*(N-1)))

betasuperior <- betabarra*(qchisq(1-alfa/2,2*N)/(2*(N-1)))

print (betainferior)
print (betasuperior)
```

Apêndice A₃

Função em R [5] que calcula o valor da estatística para o teste de Cramér-von Mises.

```
tempos <- c(XI1,...,XI1,...XIQ) #entrar com os tempos de falha do sistema
xiq<- sort(tempos) #colocas os dados em ordem crescente
z<-xiq/T #T é o tempo truncado do sistema
N<-length(z)
betabarra<- #inserir valor de betabarra
soma<-0

for (j in 1:N)
{
aux = (z[j]^betabarra - (2*j-1)/(2*N))^2
soma = soma + aux
}

cn2 = 1/(12*N) + soma
print (cn2)
```

Apêndice A₄

Função em R [5] que realiza o teste Qui-Quadrado.

```
xiq<-read.table("arquivo.txt") #lendo o vetor com os tempos de falha do sistema
N<-length(xiq)
#dividindo o tempo de operação do sistema em três intervalos iguais

cont1<-0      #contadores que armazenam as falhas observadas em cada intervalo
cont2<-0
cont3<-0

a<-a         #limites de tempo dos intervalos
```

```

b<-b
c<-c

for (i in 1:N)      #contados as falhas e armazenando-as nos contadores
{
  if (xiq[i]<=b)
  {cont1=cont1+1}
  else if (xiq[i]<=c)
  {cont2=cont2+1}
  else
  {cont3=cont3+1}
}

n<-c(cont1,cont2,cont3) #vetor que armazena as falhas observadas em cada intervalo

lambda<- lambda
beta<- beta
d<-d      #onde d é o número de intervalo
teta<-1:d #vetor que armazena esperadas em cada intervalo

for (j in 1:d){
  b<-t*j #onde t é o tamanho dos intervalos

  teta[j]= lambda*(b^beta)-lambda*((b-t)^beta)
}

teta<-k*teta #multiplicando as falhas esperadas pelo número de componentes

#encontrando qui-quadrado calculado

aux<-0
soma<-0

for(g in 1:d){
  aux = (n[g]-teta[g])^2/teta[g]
  soma=soma+aux
}

#encontrando o valor p

valorp<- 1-pchisq(soma,d-2)

print(valorp)

```


APÊNDICE B**TABELA 3:** Valores Críticos para o Teste de Cramér-von Mises

N^\dagger	Nível de Significância		
	0.10	0.05	0.01
2	0.162	0.175	0.186
3	0.154	0.184	0.23
4	0.155	0.191	0.28
5	0.160	0.199	0.30
6	0.162	0.204	0.31
7	0.165	0.208	0.32
8	0.165	0.210	0.32
9	0.167	0.212	0.32
10	0.167	0.212	0.32
11	0.169	0.214	0.32
12	0.169	0.214	0.32
13	0.169	0.214	0.33
14	0.169	0.214	0.33
15	0.169	0.215	0.33
16	0.171	0.216	0.33
17	0.171	0.217	0.33
18	0.171	0.217	0.33
19	0.171	0.217	0.33
20	0.172	0.217	0.33
30	0.172	0.218	0.33
60	0.173	0.220	0.33
100	0.173	0.220	0.34

† : N é o número total de falhas do sistema.

Fonte: Crow [6].