UMA INTRODUÇÃO AO ESTUDO DE FIBRADOS PRINCIPAIS E ASSOCIADOS

Luciana Aparecida Alves
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
lualves@famat.ufu.br

Neiton Pereira da Silva
Universidade Federal de Uberlândia - Faculdade de Matemática
neiton@famat.ufu.br

RESUMO

Fibrados e fibrações, de um modo geral, são objetos básicos de estudo em muitas áreas da matemática. O presente trabalho trata de uma maneira detalhada dos chamados fibrados principais e associados. Descrevemos e apresentamos aqui exemplos de algumas construções em tais fibrados. Além disso, estudamos também alguns resultados sobre reduções de fibrados principais que, sob alguns aspectos, fornecem informações importantes tais como existência de seções locais. Este trabalho tem um caráter informativo, no sentido em que ele fornece diversos exemplos de fibrados, em detalhes, que em geral não são encontrados (ou são apenas citados) na literatura. Procuramos mostrar como a condição da trivialidade local é satisfeita em vários exemplos de fibrados principais. No caso de fibrados associados, tomamos alguns exemplos anteriores para fornecer novos exemplos.

ABSTRACT

Fibre bundles, in general, are basic objects of study in many areas of mathematics. The present work provides a detailed way of the so-called principal fiber bundles and associated fiber bundles. We describe and present here some examples of constructions in such fiber bundles. Furthermore, we also studied some results on principal reductions of fiber bundles, in some ways, such as providing important informations on existence of local sections.
This work is informative in the sense that it provides several examples of fiber bundles, in detail, which are generally not found (or are just cited) in the literature. We seek to show how the condition of locally trivial is satisfied in many examples of principal fiber bundles. In case associated fiber bundles, we took some previous examples to provide new examples.

Palavras-chave: fibrados, ações, variedades diferenciáveis.

1 INTRODUÇÃO

O principal objetivo deste artigo é introduzir a linguagem de fibrados principais, associados e reduções em variedades diferenciáveis. Dados M uma variedade e G um grupo de Lie, dizemos que um *fibrado principal sobre M com grupo estrutural G* consiste de uma variedade P e de uma ação livre à direita de G em P, onde M é o espaço das órbitas dessa ação; assim, existe uma aplicação diferenciável sobrejetora $\pi : P \longrightarrow M$. Além disso, P é localmente trivial. O fibrado principal será denotado por $P(M, G)$. A partir de um fibrado principal $P(M, G)$ e de uma ação à esquerda de G em uma variedade F, construiremos o chamado *fibrado associado com fibra típica F e base M*. Tal fibrado será denotado por $E = P \times_G F$.

Mostraremos exemplos canônicos, como por exemplo, dado um fibrado tangente de uma variedade diferenciável M, construiremos o chamado *fibrado das bases* BM, um fibrado principal com grupo estrutural $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e base M, constituído de todas as bases de TM. Além disso, relacionaremos fibrados associados com os clássicos fibrados vetoriais. Outro exemplo que trabalharemos são os chamados *fibrados flag*, cuja fibra típica é uma variedade flag. Finalizaremos o artigo com alguns resultados sobre reduções de fibrados principais a subgrupos fechados.

2 AÇÕES DE GRUPOS

Definição 2.1: *Sejam G um grupo e X um conjunto. Um ação à esquerda de G em X é uma aplicação $\Phi : G \times X \longrightarrow X$ satisfazendo as seguintes propriedades:*
(a) $\Phi(e, x) = x$, *para todo* $x \in X$, *onde* e *é a identidade de* G*;*
(b) $\Phi(g_2, \Phi(g_1, x)) = \Phi(g_2g_1, x)$, *para todo* g_1, $g_2 \in G$ *e* $x \in X$.

Para cada $g \in G$, seja $\Phi_g : X \longrightarrow X$ uma aplicação definida por $\Phi_g(x) := \Phi(g, x)$. Note que Φ_g é uma bijeção com inversa $\Phi_{g^{-1}}$ (para $x \in X$, $\Phi_g \circ \Phi_{g^{-1}}(x) = \Phi_g(\Phi(g^{-1}, x)) = \Phi(g, \Phi(g^{-1}, x)) = \Phi(e, x) = x = \Phi_{g^{-1}} \circ \Phi_g(x)$). Além disso, a aplicação $g \in G \longmapsto \Phi_g \in \mathcal{B}(X)$ é um homomorfismo de grupos, onde $\mathcal{B}(X)$ é o grupo das bijeções de X com o produto dado pela composição de duas aplicações.

Uma *ação à direita* $\Phi : X \times G \longrightarrow$ pode ser definida da mesma forma: (a) $\Phi(x, e) = x$, para todo $x \in X$; (b) $\Phi(\Phi(x, g_1), g_2) = \Phi(x, g_1g_2)$, para todo g_1, $g_2 \in G$ e $x \in X$. Para $g \in G$ e $x \in X$, é usual denotarmos $\Phi(g, x)$ por gx ou $g \cdot x$.

Dado $x \in X$, definimos a *órbita de* x por

$$Gx = \{gx;\, g \in G\}.$$

Note que cada órbita é uma classe (de equivalência) da seguinte relação de equivalência:

$$x \sim y \Leftrightarrow y = gx, \text{ para algum } g \in G.$$

Com isto, as órbitas de X particionam o conjunto X em conjuntos disjuntos. A ação Φ é dita *transitiva* se X é uma órbita de G pela referida ação, ou seja, se existe $x \in X$ tal que $G \cdot x = X$.

Exemplo 2.1 (Ação em flags): Seja $\Theta = (k_1, k_2, \ldots, k_r)$ uma sequência de inteiros tais que $0 < k_1 < k_2 < \ldots < k_r \leq k$. Um *flag* de subespaços de tipo Θ é uma sequência de subespaços encaixantes de $\mathbb{R}^k$

$$(V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r)$$

tais que $\dim V_i = k_i$. Defina $\mathbb{F}_\Theta$ como o conjunto de todos os flags de tipo Θ.
Considere a seguinte ação de $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ em $\mathbb{F}_\Theta$:

$$(g, (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r)) \in \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}) \times \mathbb{F}_\Theta \longmapsto (gV_1 \subset gV_2 \subset \cdots \subset gV_r) \in \mathbb{F}_\Theta.$$

Essa ação é transitiva. De fato, considere $\{e_1, \ldots, e_k\}$ base canônica de $\mathbb{R}^k$ e o flag $b_\Theta = (E_1 \subset \ldots \subset E_r)$, onde $E_i = \mathrm{span}\{e_1, \ldots, e_{k_i}\}$. Seja $b = (V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_r) \in \mathbb{F}_\Theta$. Tome $\{v_1, v_2, \ldots, v_k\}$ base ortonormal de $\mathbb{R}^k$ tal que $\{v_1, v_2, \ldots, v_{k_i}\}$ é base de V_i e considere a matriz (ortogonal) g cujas colunas são formadas pelos vetores v_i. Dessa forma, é claro que $gb_\Theta = b$.
Observe que, se $\Theta = (n)$, então $\mathbb{F}_\Theta = \mathrm{Gr}_n(k)$, ou seja, $\mathbb{F}_n$ é formado pelos subespaços de dimensão n em $\mathbb{R}^k$. Assim como, se $\Theta = (1)$, temos que $\mathbb{F}_\Theta = \mathbb{P}^{k-1}$.

Defina, para cada $x \in X$, o *grupo de isotropia de* x

$$G_x = \{g \in G;\, gx = x\}.$$

Note que G_x é um subgrupo de G e que $G_{gx} = gG_xg^{-1}$, para todo $g \in G$ e $x \in X$. De fato:

$$h \in G_{gx} \Leftrightarrow h(gx) = gx \Leftrightarrow (g^{-1}hg)x = x \Leftrightarrow h \in gG_xg^{-1}.$$

Definição 2.2: *Seja Φ uma ação de G em X.*
(a) *A ação é dita efetiva se $\{g \in G;\, gx = x, \forall\, x \in X\} = \{e\}$. Em outras palavras, se o homomorfismo de grupos $g \longmapsto \Phi_g$ possui o kernel trivial;*
(b) *A ação é dita livre se os subgrupos de isotropia são dados pelo elemento neutro de G, ou seja, se $gx = x$ para algum $x \in X$, então $g = e$.*

Observe que, toda ação livre é efetiva, já que $G_x = \{e\}$, para todo $x \in X$ e, assim, $\mathrm{Ker}(\Phi) = \bigcap\limits_{x \in X} G_x = \{e\}$.

Exemplo 2.2: O grupo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ das matrizes reais $n \times n$ inversíveis age à esquerda em $\mathbb{R}^n$ por $g \cdot v = g(v)$, com $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e $v \in \mathbb{R}^n$. Não é difícil ver que essa ação é efetiva.

Exemplo 2.3: Seja H um subgrupo de G. Considere o espaço quociente $G/H = \{gH;\, g \in G\}$. A aplicação

$$(g_1, g_2H) \in G \times G/H \longmapsto g_1(g_2H) = (g_1g_2)H$$

define uma ação natural à esquerda de G em G/H. Note que esta ação é transitiva. Além disso, um cálculo simples mostra que os subgrupos de isotropia desta ação são dados por $G_{gH} = gHg^{-1}$.

Proposição 2.1: *Suponha que a ação de G em X é transitiva e tome $x \in X$. Então, a aplicação dada por*

$$gG_x \in G/G_x \longmapsto gx \in X$$

é bijetora.

Demonstração. Note que, para g, $g' \in G_x$:

$$gG_x = g'G_x \Leftrightarrow g(g')^{-1} \in G_x.$$

Isto mostra que a aplicação em questão está bem definida e é injetora. A sobrejetividade segue claramente do fato de que a ação de G em X é transitiva. ☐

No exemplo visto anteriormente, note que, temos uma bijeção entre G/H e G/gHg^{-1}.

3 FIBRAÇÕES LOCALMENTE TRIVIAIS

Sejam E um espaço, um espaço topológico X e uma aplicação contínua $\pi : E \longrightarrow X$.

Definição 3.1: *A aplicação $\pi : E \longrightarrow X$ é chamada de fibração localmente trivial com fibra F se satisfaz as seguintes propriedades:*
(i) *$\pi : E \longrightarrow X$ é sobrejetiva;*
(ii) *para todo $x \in X$, existe um aberto U de x e um homeomorfismo $\varphi : U \times F \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ tais que $\pi \circ \varphi(y, v) = y$, para todo $v \in F$ e $y \in U$;*
(iii) *para todo $x \in X$, $\pi^{-1}\{x\}$ é homeomorfo a F.*

Exemplo 3.1: Seja S^1 o círculo unitário. Considere a aplicação $\exp : \mathbb{R} \longrightarrow S^1$ dada por $\exp(t) = e^{2\pi i t}$. Tal aplicação é uma fibração localmente trivial tendo como fibra os inteiros $\mathbb{Z}$.

Exemplo 3.2: Considere o espaço projetivo $\mathbb{P}^n$, definido pelo espaço quociente $\mathbb{P}^n = S^n/\sim$, onde $x \sim -x$, para $x \in S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$. A projeção $\pi : S^n \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é uma fibração localmente trivial tendo como fibra um conjunto com dois elementos.

3.1 FIBRADOS VETORIAIS

Definição 3.2: *Um fibrado vetorial n-dimensional sobre um corpo K consiste de um espaço E (espaço total), um espaço topológico X (espaço base) e um $\mathbf{K}$-espaço vetorial V de dimensão n tais que:*
(i) existe uma projeção contínua $\pi : E \longrightarrow X$;
(ii) para todo $x \in X$, existe um aberto U de x e um homeomorfismo $\varphi : U \times V \longrightarrow \pi^{-1}(U)$ tais que $\pi \circ \varphi(y, v) = y$, para todo $v \in V$ e $y \in U$;
(iii) a aplicação $v \in V \longmapsto \varphi(x, v)$ é um isomorfismo entre V e a fibra $\pi^{-1}\{x\}$.

Exemplo 3.3: Dada uma variedade k-dimensional, $TM \longrightarrow M$ é um fibrado vetorial real de dimensão k.

3.2 FIBRADOS PRINCIPAIS

Sejam M uma variedade diferenciável e G um grupo de Lie.

Definição 3.3: *Um fibrado principal sobre M com grupo G consiste de uma variedade P e de uma ação livre à direita de G em P satisfazendo as seguintes condições:*
(i) o espaço das órbitas dessa ação é M, ou seja, existe uma aplicação sobrejetora (diferenciável)

$$\pi : P \longrightarrow M,$$

de tal forma que $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$, são as órbitas de G pela ação citada anteriormente;
(ii) P é localmente trivial, isto é, para todo ponto $x \in M$, existem uma vizinhança U e um difeomorfismo ψ dado por

$$\begin{array}{rcl} \psi : \pi^{-1}(U) & \longrightarrow & U \times G \\ u & \longmapsto & \psi(u) = (\pi(u), \phi(u)), \end{array}$$

onde $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ é uma aplicação que possui a seguinte propriedade:

$$\phi(ug) = \phi(u)g,$$

para todo $u \in \pi^{-1}(U)$ e $g \in G$.

Notação: Um fibrado principal será denotado por $P(M, G, \pi)$, $P(M, G)$ ou simplesmente por P. Diremos que P é o *espaço total*, M o *espaço base*, G o *grupo estrutural* e π a *projeção.*

Observação 3.1: Como já vimos anteriormente, para cada $p \in P$, a órbita $p \cdot G$ define uma classe de equivalência da seguinte relação de equivalência:

$$p_1 \sim p_2 \Leftrightarrow p_2 = p_1 g, \text{ para algum } g \in G.$$

Desse modo, M pode ser visto como o espaço quociente $M = P/\sim$ (ou ainda, podemos denotar $M = P/G$). É fácil ver que, para cada $x \in M$, $\pi^{-1}(x) = \{p \cdot g;\, g \in G\} \simeq G$, dita *fibra sobre x*. A fibra sobre um ponto $x \in M$ pode ser denotada também por P_x.

Exemplo 3.4: Dados um grupo de Lie G e uma variedade diferenciável M, a ação definida por

$$\begin{array}{rcl} (M \times G) \times G & \longrightarrow & (M \times G) \\ ((x, g_1), g_2) & \longmapsto & (x, g_1 g_2), \end{array}$$

é claramente livre. O produto cartesiano $P = M \times G$ é um fibrado principal com grupo estrutural G, dito *fibrado trivial.*

Vamos introduzir agora um exemplo muito importante de fibrado principal, dito *fibrado dos referenciais* ou *fibrado das bases.*

Exemplo 3.5: Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n e TM seu fibrado tangente. Um *referencial* em $x \in M$ é um isomorfismo linear $\sigma_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$. Denote por BM o conjunto de todas as bases em todos os pontos de M, ou seja,

$$BM = \{\sigma_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM; \, \sigma_x \text{ é isomorfimo linear, } \forall\, x \in M\}.$$

Note que $\mathrm{Gl(n,\mathbb{R})}$ age livremente e transitivamente à direita em BM:

$$(\sigma, g) \in BM \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}) \longmapsto \sigma g := \sigma \circ g \in BM,$$

ou seja, para todo $v \in \mathbb{R}^n$, $(\sigma g)(v) = \sigma(gv)$.
Existe uma projeção natural $\pi : BM \longrightarrow M$ que associa a cada $\sigma_x : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$ o ponto $x \in M$. Note que $\pi(\sigma_1) = \pi(\sigma_2)$, então existe $g \in \mathrm{Gl(n,\mathbb{R})}$ tal que $\sigma_2 = \sigma_1 g$.
Observemos que BM tem uma estrutura de variedade diferenciável. De fato, seja $u = (u^1, \ldots, u^n)$ um sistema de coordenadas locais em uma vizinhança U de $y \in M$. O conjunto

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial u^1}\right)_x, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial u^n}\right)_x \right\}$$

é uma base de T_xM, para todo $x \in U$, onde $\left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_x$ é uma derivação que a cada $f \in \mathcal{F}(x)$ associa o número real $\dfrac{\partial(f \circ u^{-1})}{\partial u^i}$, onde $\mathcal{F}(x)$ é a álgebra das funções diferenciáveis de classe $\mathcal{C}^1$ definidas em alguma vizinhança de x. Seja $\sigma_u : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$ a aplicação linear tal que $\sigma_u(e_i) = \left(\dfrac{\partial}{\partial u^i}\right)_x$, $i = 1, \ldots, n$. Então, para cada $\sigma \in \pi^{-1}(U)$ tal que $\pi(\sigma) = x$, existe $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ tal que $\sigma = \sigma_u g$. Dessa forma, existe uma correspondência biunívoca entre $\pi^{-1}(U)$ e $U \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ e assim, $\sigma \in \pi^{-1}(U) \longmapsto (x, g) \in U \times \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$ é um sistema de coordenadas locais em $\pi^{-1}(U)$. Portanto, BM é um fibrado principal com base M e grupo estrutural $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$.

Note que, na literatura, usamos BM como o conjunto das bases de T_xM, para todo $x \in M$. Claramente, esta descrição de BM e a descrição dada no exemplo anterior são equivalentes.

A condição de trivialidade local na definição de fibrado principal está, de certa forma, ligada à definição de variedade diferenciável. Para esclarecer melhor isso, considere $P(M, G)$ um fibrado principal; pela trivialidade local de P, existe uma cobertura aberta $\mathcal{C} = \{U_\alpha\}$ de M, de modo que

$$\begin{aligned} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow U_\alpha \times G \\ u &\longmapsto \psi_\alpha(u) = (\pi(u), \phi_\alpha(u)), \end{aligned}$$

é um difeomorfismo, onde $\phi_\alpha(ug) = \phi_\alpha(u)g$, para todo $g \in G$. Observe que, se $u \in \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, então

$$\phi_\beta(ug)(\phi_\alpha(ug))^{-1} = \phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1},$$

para todo $g \in G$. Dessa forma, a aplicação $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ dada por $\varphi_{\beta\alpha}(x) = \phi_\beta(u)(\phi_\alpha(u))^{-1}$, $x = \pi(u)$, está bem definida. A família de aplicações $\varphi_{\beta\alpha}$ são chamadas de *funções de transição* do fibrado $P(M, G)$ relacionadas à cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M. Temos ainda que,

$$\varphi_{\gamma\alpha}(x) = \varphi_{\gamma\beta}(x) \cdot \varphi_{\beta\alpha}(x), \tag{1}$$

para todo $x \in U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma$.

Proposição 3.1: *Seja M uma variedade diferenciável, $\{U_\alpha\}$ uma cobertura aberta de M e G um grupo de Lie. Dados índices α, β tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ e uma aplicação $\varphi_{\beta\alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \longrightarrow G$ de tal maneira que as relações dadas por (1) são satisfeitas, então existe um fibrado principal (diferenciável) $P(M, G)$ com funções de transição $\varphi_{\beta\alpha}$.*

Demonstração. Para cada índice α, seja $X_\alpha = U_\alpha \times G$ e considere $X = \coprod_\alpha X_\alpha$ a soma topológica de X_α. Desde que X_α é uma variedade diferenciável e X é uma união disjunta de X_α, segue que X é uma variedade diferenciável. Defina a seguinte relação de equivalência em X:

$$(\alpha, x, g_1) \sim (\beta, y, g_2) \Longleftrightarrow x = y \in U_\alpha \cap U_\beta \text{ e } g_2 = \varphi_{\beta\alpha}(x) g_1.$$

Seja P o espaço quociente de X pela relação de equivalência definida anteriormente. Mostremos agora que $P(M, G)$ é um fibrado principal.
(i) A ação $([(\alpha, x, g)], g') \in P \times G \longmapsto [(\alpha, x, gg')]$ é claramente uma ação livre.
(ii) A projeção natural

$$\pi : [(\alpha, x, g)] \in P \longmapsto x \in M$$

é tal que, para u, $v \in P$, tem-se que:

$$\pi(u) = \pi(v) \text{ se, e só se, } v = uc, \text{ para algum } c \in G.$$

Isto mostra que o espaço das órbitas da ação de G em P é M.
(iii) Considere a projeção canônica $\pi_{\mathbf{can}} : X \longrightarrow P = X/\sim$. Note que $P = \bigcup_\alpha \pi^{-1}(U_\alpha)$ e $\pi_{\mathbf{can}|_{X_\alpha}} : U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha)$ é um difeomorfismo. Dessa forma, P é uma variedade diferenciável. É fácil ver que a ação de G em P é diferenciável.
(iv) A trivialização local de P é dada da seguinte forma: para cada α, considere a aplicação

$$\psi_\alpha : [(\alpha, x, g)] \in \pi^{-1}(U_\alpha) \longmapsto (x, g) \in U_\alpha \times G.$$

Fazendo os cálculos, temos que, claramente, $\varphi_{\beta\alpha}$ são as funções de transição para o fibrado P. □

Proposição 3.2: *Sejam uma ação livre à direita de um grupo de Lie G em uma variedade P e uma aplicação*

$$\pi : P \longrightarrow M,$$

onde M é variedade e de tal forma que $\pi^{-1}\{x\}$, $x \in M$, são as órbitas de G pela ação dada. Para todo $x \in M$, existe uma vizinhança U de x e uma aplicação $\sigma : U \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ \sigma(x) = x$, para todo $x \in U$, se e só se, P é localmente trivial. Neste caso, $P(M, G)$ é um fibrado principal.

Demonstração. Seja U uma vizinhança de $x \in M$ e $\sigma : U \longrightarrow M$ tal que $\pi \circ \sigma(x) = x$, para todo $x \in U$. Dessa forma, para todo $p \in \bigcap_{x \in U} P_x$, temos que $p = \sigma(x)g$, para algum $g \in G$. Logo, defina a seguinte trivialização de P:

$$\begin{aligned} \psi : \pi^{-1}(U) &\longrightarrow U \times G \\ \sigma(x)g &\longmapsto (x, g). \end{aligned}$$

Note que $\phi((\sigma(x)g)g') = gg' = \phi(\sigma(x)g)g'$, para todo $x \in U$ e g, $g' \in G$. Por outro lado, seja $\psi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow U \times G$ trivialização local de P e $\phi : \pi^{-1}(U) \longrightarrow G$ a segunda coordenada de ψ. Defina o seguinte subconjunto de $\pi^{-1}(U)$:

$$\psi^{-1}(\{(x, 1);\ x \in U\});$$

tal conjunto é uma subvariedade em $\pi^{-1}(U)$ e cruza cada fibra $\pi^{-1}\{x\}$ em único ponto $\sigma(x) \in P$. Isto define a aplicação $\sigma\colon x \in U \longmapsto \sigma(x) \in P$. □

A aplicação σ obtida é chamada *seção local* do fibrado P. Note ainda que, no exemplo 3.5, a aplicação σ_u define uma seção local do fibrado BM.

A seguir, veremos um resultado que nos auxiliará no desenvolvimento do próximo exemplo.

Teorema 3.1: *Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Então, H é um subgrupo de Lie. Além disso, o espaço quociente G/H possui uma única estrutura diferenciável tal que:*
(i) a projeção $\pi : G \longrightarrow G/H$ é diferenciável;
(ii) para cada $x \in G/H$, existe uma vizinhança W e uma aplicação diferenciável $\sigma : W \longrightarrow G$ (seção local) tal que $\pi \circ \sigma(x) = x$, para todo $x \in W$;
(iii) a translação à esquerda por qualquer elemento de G é um difeomorfismo de G/H.

Demonstração. Veja [2], Teorema 3.6.4, pág. 47. □

Exemplo 3.6: Sejam G um grupo de Lie e H um subgrupo fechado de G. Note que existe uma ação natural à direita de H em G:

$$\begin{array}{rcl} G \times H & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \longmapsto & gh. \end{array}$$

Claramente, tal ação é livre. Além disso, considere a seguinte projeção natural

$$\begin{array}{rcl} \pi : G & \longrightarrow & G/H \\ g & \longmapsto & gH. \end{array}$$

Note que, por definição, G/H é o espaço das órbitas da ação definida anteriormente. Temos que G é um fibrado principal sobre G/H com grupo estrutural H. De fato, pelo Teorema 3.1, G/H possui uma estrutura de variedade diferenciável e $\pi : G \longrightarrow G/H$ é diferenciável. A existência da trivialização local segue da existência da seção local dada pelo item (ii) do resultado anterior; para cada $x \in G/H$, sejam W a vizinhança de x e $\sigma : W \longrightarrow G$ a aplicação tal que $\pi \circ \sigma = id_W$. Observe que, para todo $g \in \pi^{-1}(W)$, $g = \sigma(x)h$, para algum $h \in H$. Assim, defina a trivialização local pela seguinte aplicação:

$$\begin{array}{rcl} \psi : \pi^{-1}(W) & \longrightarrow & W \times H \\ g = \sigma(x)h & \longmapsto & (\pi(\sigma(x)h), h). \end{array}$$

Note que, pela definição de ψ, $\phi(g) = h$, ou seja, $\phi(\sigma(x)) = 1$. Com isto:

$$\phi(\sigma(x)h) = h = \phi(\sigma(x))h.$$

Exemplo 3.7: Seja $k < n$. Considere o seguinte conjunto de transformações lineares injetoras

$$B_k(n) = \left\{ p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n);\ p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ é injetora} \right\}.$$

Podemos definir uma ação à direita $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ em $B_k(n)$ por multiplicação à direita de matrizes:

$$(p, a) \in B_k(n) \times \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})) \longmapsto p \cdot a.$$

Pela injetividade de $p \in B_k(n)$, segue que essa ação é livre. Denote por $\mathrm{Gr}_k(n)$ o conjunto de todos os subespaços de $\mathbb{R}^n$ de dimensão k. Temos que $\mathrm{Gr}_k(n)$ é uma variedade diferenciável de dimensão $k(n-k)$, chamada *variedade Grassmanniana*.
Vejamos que $B_k(n)(\mathrm{Gr}_k(n), \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}))$ é um fibrado principal com grupo estrutural $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$. Inicialmente, denote por $\mathrm{Im}(p)$ a imagem da transformação $p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n$. Agora, para cada $p \in B_k(n)$, tem-se que $\mathrm{Im}(p)$ é um elemento de $\mathrm{Gr}_k(n)$, pela injetividade de p. Além disso, duas aplicações p, $q \in B_k(n)$ estão na mesma órbita de $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ se, e somente se, possuem a mesma imagem. Isto define uma aplicação

$$\begin{array}{rcl} \pi \colon B_k(n) & \longrightarrow & \mathrm{Gr}_k(n) \\ p & \longmapsto & \mathrm{Im}(p), \end{array}$$

onde cada fibra $\pi^{-1}(\mathrm{Im}(p)) = \{p \cdot a; a \in \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})\}$ é uma órbita de $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$.
Para ver que esse fibrado é localmente trivial, note que dado $x \in \mathrm{Gr}_k(n)$, podemos tomar k campos de vetores

$$\{X_1, \ldots, X_k\}$$

linearmente independentes em todos os pontos de uma vizinhaça W de x em $\mathrm{Gr}_k(n)$ (os k primeiros campos coordenados). Então, a cada $y \in W$, podemos associar um conjunto de k vetores linearmente independentes

$$\{X_1(y), \ldots, X_k(y)\}$$

em $\mathbb{R}^n$, os quais geram o espaço y, a menos de isomorfismo. Assim, a seção local $\sigma \colon W \longrightarrow B_k(n)$ que a cada $y \in W$ associa uma única transformação linear injetora $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n)$ definida na base canônica de $\mathbb{R}^k$ por $p(e_i) = X_i(y)$, para $i = 1, \ldots, k$, fica bem definida. Note que $\pi(\sigma(y)) = \mathrm{Im}(p) = y$. Agora, se $\pi(\sigma(y)) = \pi(q)$, então existe $a \in \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ tal que $q = \sigma(y) \cdot a$; desta forma podemos definir $\phi \colon \pi^{-1}(W) \longrightarrow \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ por $\phi(\sigma(y) \cdot a) = a$ e a bijeção $\psi \colon \pi^{-1}(W) \longrightarrow W \times \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ por $\psi(\sigma(y) \cdot a) = (y, a)$. Note que $\phi(\sigma(y)) = 1$ e $\phi(\sigma(y) \cdot a) = \phi(\sigma(y)) \cdot a$.

Exemplo 3.8: Fixe um produto interno em $\mathbb{R}^n$. Com uma pequena variação do exemplo anterior, considere

$$\mathrm{St}_k(n) = \left\{p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n);\ p : \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R}^n \text{ é isometria}\right\}.$$

Tal conjunto é dito *variedade de Stiefel*. A variedade de Stiefel pode ser vista como o conjunto das bases ortonormais em $\mathbb{R}^n$ de um subespaço de dimensão k. Ou ainda, como o conjunto das transformações lineares $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^k; \mathbb{R}^n)$ que satisfazem

$$p^t p = 1.$$

O grupo $O(k)$ age livremente à direita em $\mathrm{St}_k(n)$ e a projeção $\pi \colon \mathrm{St}_k(n) \longrightarrow \mathrm{Gr}_k(n)$, dada por $\pi(p) = \mathrm{Im}(p)$, define o fibrado principal $\mathrm{St}_k(n)(\mathrm{Gr}_k(n), O(k))$. Se $k = 1$, a projeção $S^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ associa pontos antipodais de S^{n-1} à reta em $\mathbb{R}^n$ que passa por esses pontos.

Exemplo 3.9: Sejam M, N variedades diferenciáveis e $f : N \longrightarrow M$ uma aplicação diferenciável. Considere $P(M, G)$ um fibrado principal. O pull-back

$$f^*P = \{(x, p) \in N \times P;\ f(x) = \pi(p)\}$$

de P por f é um fibrado principal com base N e grupo estrutural G. De fato, o grupo G age livremente à direita em f^*P por $(x, p) \cdot g := (x, p \cdot g)$ e a projeção $\pi_N \colon f^*P \longrightarrow N$ é dada por $\pi(x, p) = x$. Para verificar a trivialidade local desse fibrado, seja $x \in N$ e considere uma seção local $\sigma \colon U \longrightarrow P$ definida em vizinhaça U de $f(x)$ em M. Já sabemos que, para cada elemento $p \in \pi^{-1}(U)$, existe um único $g \in G$ tal que $p = \sigma(f(y)) \cdot g$, onde $y \in N$ é tal que $f(y) = \pi(p)$. Com isto, podemos definir $\phi \colon \pi_N^{-1}(V) \longrightarrow G$, por $\phi(y, \sigma(f(y)) \cdot g) = g$, onde $V = f^{-1}(U)$ e ϕ satisfaz $\phi((y, p) \cdot a) = \phi(y, p \cdot a) = \phi(y, \sigma(f(y))g \cdot a) = \phi(y, \sigma(f(y)) \cdot ga) = ga = \phi(y, p) \cdot a$, com $a \in G$. Assim fica definida $\psi \colon \pi_N^{-1}(V) \longrightarrow V \times G$ por $\psi(y, p) = (y, g)$ onde $p = \sigma(f(y)) \cdot g$.

Definição 3.4: *Sejam $P(M, G)$ e $P'(M', G')$ fibrados principais. Dizemos que uma aplicação $f' : P' \longrightarrow P$ é um homomorfismo de fibrados principais se existe um homomorfismo $f'' : G' \longrightarrow G$ tal que $f'(u'g') = f'(u')f''(g')$, para todo $u' \in P'$ e $g' \in G'$.*

Observação 3.2: (i) Observe que o homomorfismo $f' \colon P' \longrightarrow P$ leva a fibra sobre $x' \in M'$ na fibra sobre $\pi(f'(q')) \in M$, onde $x' = \pi'(q')$. Com isto, podemos induzir uma aplicação $f : M' \longrightarrow M$.

$$\begin{tikzcd}
G' \arrow[r, "f''"] \arrow[d, dotted, no head] & G \arrow[d, dotted, no head] \\
P' \arrow[r, "f'"] \arrow[d] & P \arrow[d] \\
M' \arrow[r, "f"] & M
\end{tikzcd}$$

(ii) Se $f' : P' \longrightarrow P$ é uma imersão e $f'' : G' \longrightarrow G$ é um monomorfismo, então $f : M' \longrightarrow M$ é uma imersão. Identificando P' com $f'(P')$, G' com $f''(G')$ e M' com $f(M')$, dizemos que $P'(M', G')$ é um **subfibrado** de $P(M, G)$. No caso particular em que $M = M'$ e a aplicação induzida é a identidade, dizemos que o subfibrado $P'(M, G')$ é uma G'-*redução* de $P(M, G)$.

Proposição 3.3: *Sejam um fibrado principal $P \longrightarrow M$ com grupo estrutural G e G' um subgrupo de G. Tem-se que, existe uma G'-redução de $P(M, G)$ se, e somente se, existe uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M, munida de um conjunto de funções de transição $\varphi_{\beta\alpha}$, com valores em G'.*

Demonstração. Sejam $\pi' : P' \longrightarrow M$ uma G'-redução de $P(M, G)$. Considere $\{U_\alpha\}$ cobertura de M tal que

$$\begin{array}{rcl} \psi'_\alpha : (\pi')^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times G' \\ u & \longmapsto & \psi_\alpha(u) = (\pi'(u), (\phi')_\alpha(u)), \end{array}$$

é um difeomorfismo. Podemos estender esta aplicação para obter uma trivialização local de P. Para $x \in U_\alpha$, sejam $v \in P_x$ e $u \in P'_x$; logo, existe $a \in G$ tal que $v = ua$. Defina:

$$\begin{array}{rcl} \psi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) & \longrightarrow & U_\alpha \times G \\ v & \longmapsto & \psi_\alpha(v) = (\pi(v), (\phi')_\alpha(u)a). \end{array}$$

É fácil ver que $\phi_\alpha : \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow G$ não depende da escolha de u. Além disso, para $x \in U_\alpha \cap U_\beta$,

$$\begin{array}{rcl} \varphi_{\beta\alpha}(x) & = & \phi_\beta(v)(\phi_\alpha(v))^{-1} = (\phi'_\beta(u)a)(\phi'_\alpha(u)a)^{-1} \\ & = & \phi'_\beta(u)(\phi'_\alpha(u))^{-1}. \end{array}$$

Reciprocamente, suponha que exista uma cobertura aberta $\{U_\alpha\}$ de M tais que as funções de transição assumem valores em subgrupo G' de G. Para $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, temos que $\varphi_{\beta\alpha}(U_\alpha \cap U_\beta) \subset G'$. Pela Proposição 3.1, podemos construir $P'(M, G')$ a partir de $\{U_\alpha\}$ e $\{\varphi_{\beta\alpha}\}$. A imersão $f : P' \longrightarrow P$ pode ser construída a partir da seguinte composição:

$$(\pi')^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow U_\alpha \times G' \longrightarrow U_\alpha \times G \longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha).$$

$\square$

3.3 FIBRADOS ASSOCIADOS

Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e uma ação à esquerda de G em um conjunto F. O grupo G também age à esquerda em $P \times F$ da seguinte maneira:

$$\begin{array}{rcl} G \times (P \times F) & \longrightarrow & P \times F \\ (g, (p, v)) & \longmapsto & (p \cdot g, g^{-1} \cdot v). \end{array}$$

O espaço quociente de $P \times F$ por esta ação será denotado por $E = P \times_G F$ e chamado de *fibrado associado a P com fibra típica F e base M*. Note que se $(q, w) \in [(p, v)]$, então $q = p \cdot g$ e $w = g^{-1} \cdot v$, para algum $g \in G$. Dessa forma, $\pi(q) = \pi(p)$, ou seja, a aplicação $\pi_E : [(p, v)] \in E \longmapsto \pi(p) \in M$ está bem definida e é chamada de *projeção de E sobre M*. Para cada $x \in M$, a fibra $\pi_E^{-1}(x)$ será denotada por E_x.

Assim como os fibrados principais, os associados também possuem uma trivialidade local herdada daqueles. De fato, seja $\sigma : U \longrightarrow P$ uma seção local de P. Então, a aplicação

$$\begin{array}{rcl} \psi_\sigma : U \times F & \longrightarrow & \pi_E^{-1}(U) \\ (x, v) & \longmapsto & \sigma(x) \cdot v \end{array}$$

é uma bijeção. É claro que ψ_σ está bem definida. Sejam $(x,v),(y,w) \in U \times F$ tais que $\sigma(x)\cdot v = \sigma(y)\cdot w$. Logo, existe $g \in G$ tal que $\sigma(y) = \sigma(x)g$ e $w = g^{-1}v$. Assim,

$$x = \pi(\sigma(x)) = \pi(\sigma(x)g) = \pi(\sigma(y)) = y;$$

daí, como a ação de G em P é livre, temos que $g = 1$. Portanto, ψ_σ é injetora. Para verificarmos que tal aplicação é sobrejetora, seja $p\cdot w \in \pi_E^{-1}(U)$. Como $\pi(\sigma(\pi(p))) = \pi(p)$, segue que existe $g \in G$ tal que $p = \sigma(\pi(p))g$.

Agora, considere $\sigma_1 : U_1 \longrightarrow P$ outra seção local de P de tal modo que $U \cap U_1 \neq \emptyset$. Então, como $\pi(\sigma_1(x)) = \pi(\sigma(x))$, existe $\theta(x) \in G$ tal que $\sigma_1(x) = \sigma(x)\theta(x)$, para todo $x \in U \cap U_1$. Assim, $\sigma_1(x)\cdot v = \sigma(x)\cdot\theta(x)v$ e, tomando ψ_{σ_1} a trivialização correspondente a σ_1, obtemos a seguinte relação entre ψ_σ e ψ_{σ_1}

$$\psi_\sigma^{-1} \circ \psi_{\sigma_1}(x,v) = (x,\theta(x)v), \tag{2}$$

para todo $x \in U \cap U_1$. Portanto, usando essas trivializações locais é possível colocarmos uma estrutura de variedade diferenciável em E.

Proposição 3.4: *Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal diferenciável e F uma variedade diferenciável. Suponha que exista uma ação diferenciável (à esquerda) do grupo estrutural G em F. Então, $E = P \times_G F$ é uma variedade diferenciável tal que a projeção $\pi_E : E \longrightarrow M$ é uma submersão.*

Demonstração. A estrutura diferenciável de E foi mostrada anteriormente (as trivializações ψ_σ formam um atlas diferenciável em E). A projeção π_E é uma submersão, pois ela é identificada com a projeção na primeira coordenada através do difeomorfismo ψ_σ. □

Observação 3.3: Nas condições da proposição anterior, é importante notarmos que as fibras E_x são difeomorfas à variedade F. Notemos, inicialmente, que as fibras E_x são subvariedades fechadas e mergulhadas, visto que π_E é uma submersão. Agora, considere a seguinte bijeção:

$$v \in F \longmapsto p\cdot v \in E_x, \;\; x = \pi(p).$$

Para ver que esta aplicação é um difeomorfismo, basta tomarmos cartas locais de E.

Exemplo 3.10: Sejam $P(M,G)$ um fibrado principal e H um subgrupo fechado de G. Note que, existe uma ação natural de G à esquerda de G/H:

$$(g_1, g_2H) \in G \times G/H \longmapsto (g_1g_2)H \in G/H.$$

Sendo assim, considere o fibrado associado $E = P \times_G G/H \longrightarrow M$ com fibra típica F. Desde que H é subgrupo de G, podemos considerar a ação de H em P à direita. Seja P/H o espaço quociente de P por essa ação de H. Temos que E pode ser identificado ao espaço quociente P/H. De fato, tal identificação é feita da seguinte forma:

$$p\cdot gH \in E \longleftrightarrow (pg)\cdot H \in P/H,$$

onde $(pg)\cdot H \in P/H$ é a órbita de pg pela ação do subgrupo H. Além disso, $P(E,H)$ é um fibrado principal.

Exemplo 3.11 (Fibrado Tangente): Seja M uma variedade diferenciável de dimensão n. Na seção anterior, construímos o fibrado principal $BM(M,\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R}))$ a partir dos referenciais do fibrado tangente TM. Considerando a ação linear canônica de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$, podemos obter TM de BM associando-o ao fibrado associado $BM \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$, ou seja, existe uma bijeção entre TM e $BM \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$.
De fato, considere a aplicação α que a cada elemento $\sigma\cdot v \in BM \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ associa o vetor tangente $\alpha(\sigma\cdot v) = \sigma(v) \in T_xM$, $x = \pi(\sigma)$, onde $\sigma : \mathbb{R}^n \longrightarrow T_xM$ é um elemento de BM. Se $(\sigma,v) \sim (\rho,w)$ então $(\rho,w) = (\sigma g, g^{-1}v)$, para algum $g \in \mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$, e assim pela ação linear canônica de $\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^n$ segue que $\sigma(v) = \rho(w)$, isto é, α está bem definida.

Reciprocamente, sejam $\sigma \cdot v,\ \rho \cdot w \in BM \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathbb{R}^n$ tais que $\sigma(v) = \rho(w)$. Daí, como $\pi(\sigma) = \pi(\rho) = x$, temos que $\rho = \sigma g$, $g \in \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})$. Logo, como σ é injetora, segue que $w = g^{-1}v$, ou seja, $\sigma \cdot v = \rho \cdot w$. Portanto, α é injetora. Resta mostrarmos que α é sobrejetora. Considere $w \in T_xM$, $x = \pi(\sigma)$, para algum $\sigma \in BM$. Assim, como σ é sobrejetora, temos que existe $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $\sigma(v) = w$.

No próximo exemplo, generalizaremos a construção feita acima para fibrados vetoriais quaisquer.

Exemplo 3.12: Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal diferenciável e $\rho : G \longrightarrow \mathrm{Gl}(V)$ uma representação de G no espaço vetorial de dimensão finita V, isto é, um homomorfismo diferenciável entre grupos de Lie no qual o contradomínio é um grupo linear. Considere a ação à esquerda de G em V dada por

$$(g, v) \in G \times V \longmapsto \rho(g)v \in V.$$

Desse modo, obtemos o fibrado associado $E = P \times_G V$. Pelo que vimos anteriormente, podemos notar que E é um fibrado vetorial. De fato, existe uma projeção natural $\pi : E \longrightarrow M$ de modo que, para cada $x \in M$, existe uma vizinhança U de x e um difeomorfismo φ de $\pi_E^{-1}(U)$ em $U \times V$ tal que o diagrama abaixo comuta, isto é, $\pi_1 \circ \varphi = \pi$, onde $\pi_1 : U \times V \longrightarrow U$ é a projeção na primeira coordenada.

$$\begin{tikzcd}
\pi_E^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & U \times V \arrow[dl, "\pi_1"] \\
U &
\end{tikzcd}$$

Além disso, cada fibra E_x, $x \in M$, tem a estrutura de espaço vetorial. E finalmente, segue da equação (2) que $\varphi_\alpha^{-1} \circ \varphi_\beta$ preservam as fibras e são lineares nas mesmas. Portanto, E é um fibrado vetorial.
Reciprocamente, qualquer fibrado vetorial $E \longrightarrow M$ pode ser construído como um fibrado associado. De fato, basta definirmos o fibrado das bases BE de E formado pelos isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$, onde $\dim E_x = k$. Isto é, BE é um fibrado principal com base M e grupo estrutural $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$. Assim, analogamente ao que fizemos no exemplo anterior, considerando a ação linear canônica de $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ em $\mathbb{R}^k$, obtemos E associando-o ao fibrado associado $BE \times_{\mathrm{Gl}(k,\mathbb{R})} \mathbb{R}^k$.

Exemplo 3.13 (Fibrado flag)**:** Considere a ação natural de $\mathrm{Gl}(k, \mathbb{R})$ em $\mathbb{F}_\Theta$ dada no exemplo 2.1. Seja $E \longrightarrow M$ um fibrado vetorial de dimensão k. Considere $BE(M, \mathrm{Gl}(k, \mathbb{R}))$ o fibrado das bases de E formado pelos isomorfismos lineares $p : \mathbb{R}^k \longrightarrow E_x$. Dessa forma, $BE \times_{\mathrm{Gl}(k,\mathbb{R})} \mathbb{F}_\Theta \longrightarrow M$ é um fibrado associado chamado de *fibrado flag*.

Definição 3.5: *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e $E = P \times_G F$ um fibrado associado a P com fibra típica F. Uma seção (global) de E é uma aplicação $\sigma : M \longrightarrow E$ tal que $\pi_E \circ \sigma$ é a identidade de M.*

Proposição 3.5: *O fibrado principal $P(M, G)$ admite uma redução a um subgrupo fechado H de G se, e somente se, o fibrado associado $E = P \times_G G/H$ admite uma seção $\sigma : M \longrightarrow E = P/H$.*

Demonstração. Suponha que $Q(M, H)$ seja uma H-redução de $P(M, G)$. Considere $f : Q \longrightarrow P$ imersão. Seja $p : P \longrightarrow E = P/H$ projeção natural. Sejam $u, v \in Q_x$; logo, existe $a \in H$ tal que $v = ua$. Observe que:

$$p(f(v)) = p(f(u)a) = p(f(u)),$$

ou seja, $p \circ f$ é constante em cada fibra de Q. Defina:

$$\begin{aligned} \sigma : M &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto \sigma(x) = p(f(u)), \end{aligned}$$

onde $\pi_P(f(u)) = x$. Note que:

$$\pi_E \circ \sigma(x) = \pi_E(p(f(u))) = \pi_P(f(u)) = x.$$

Por outro lado, seja $\sigma : M \longrightarrow E$ uma seção de E. Defina:

$$Q =: \{u \in P;\, p(u) = \sigma(\pi(u))\} = p^{-1}(\sigma(M)).$$

Sejam u, $v \in P_x$. Tem-se que:

$u \in Q$ implica $v \in Q$ se, e somente se, $v = ua$, para algum $a \in H$.

Além disso, Q é uma subvariedade de P. Portanto, $Q(M, H)$ é um fibrado principal. □

Teorema 3.2: *Sejam $P(M, G)$ um fibrado principal e $E = P \times_G F$ um fibrado associado a P com fibra típica F tal que a base M é paracompacta e a fibra F é difeomorfa a algum espaço euclidiano $\mathbb{R}^m$. Então, existe uma seção $\sigma : M \longrightarrow E$.*

Demonstração. Veja Theorem 5.7, pág. 59 de [3]. □

Exemplo 3.14: Considere o fibrado das bases $BM(M, \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R}))$ construído anteriormente. É sabido que o espaço homogêneo $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})/O(n)$ é difeomorfo a um espaço euclidiano $\mathbb{R}^s$, onde $s = n(n + 1)/2$, ([3], pág.59). Pelo teorema anterior, o fibrado associado a BM, $E = BM \times_{\mathrm{Gl}(n,\mathbb{R})} \mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})/O(n)$ com fibra típica $\mathrm{Gl}(n, \mathbb{R})/O(n)$ admite seção $\sigma : M \longrightarrow E$ se M for paracompacto. Então, pela proposição anterior, se M for paracompacto, o fibrado principal BM admite uma redução ao grupo ortogonal $O(n)$, obtendo assim um fibrado $Q(M, O(n))$.

Exemplo 3.15: Seja $P(M, G)$ um fibrado principal sobre uma variedade paracompacta M com grupo estrutural G, um grupo de Lie conexo. Neste caso, G é difeomorfo a um produto direto de qualquer subgrupo compacto maximal H e um espaço euclidiano, (veja [3]). Então, o fibrado $E = P/H$ associado a P admite seção $\sigma : M \longrightarrow E$, de acordo com o teorema anterior. Daí, pela proposição anterior, o fibrado P admite uma H-redução. Note que este exemplo é uma generalização do anterior.

Observação 3.4: Para um fibrado principal $P(M, G)$, uma seção $\sigma : M \longrightarrow P$ existe se, e só se, $P = M \times G$. De fato, se existe uma seção $\sigma : M \longrightarrow P$, podemos definir a função $\Phi\colon M \times G \longrightarrow P$ por $\Phi(x, g) = \sigma(x) \cdot g$. Note que $\Phi((x, g) \cdot g') = \Phi(x, g) \cdot g'$, o que mostra que Φ é um homomorfismo. Como todo elemento na fibra sobre x é da forma $\sigma(x) \cdot g$, com $g \in G$, é fácil ver que Φ é uma bijeção. Portanto, o fibrado principal $P(M, G)$ é isomorfo ao fibrado trivial $(M \times G)(M, G)$. Reciprocamente, basta definir a seção $\sigma : M \longrightarrow M \times G$ por $\sigma(x) = (x, 1)$.

REFERÊNCIAS

[1] R. L. Cohen: *The Topology of Fiber Bundles*. Lecture Notes.

[2] R. Feres: *Dynamical systems and semisimple Groups: an introduction*. Cambridge University Press, 1998.

[3] S. Kobayashi e K. Nomizu: *Foundations of differential geometry, vol. I*. InterScience Publishers, 1963.

[4] E. L. Lima: *Variedades Diferenciáveis*. Publicações Matemáticas, IMPA, 2011.

[5] L. A. B. S. Martin: *Apostila de Grupos de Lie*. Notas de aula.