

UMA APLICAÇÃO DO MODELO DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA USANDO ABORDAGEM BAYESIANA

Bruna Cristina Braga

Universidade Federal de São Paulo
crisbragamc@yahoo.com.br

Juliana Garcia Cespedes

Universidade Federal de São Paulo
cespedes.juliana@gmail.com

RESUMO

No Brasil os cursos de pós-graduação stricto sensu (mestrado e doutorado) são avaliados, trienalmente, pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) com o intuito de se estabelecer um padrão de qualidade de ensino e pesquisa no país. Neste trabalho, com base em informações disponíveis pela CAPES, se estabeleceu uma classificação de eficiência dos cursos de pós-graduação da área de Matemática/Probabilidade e Estatística utilizando os modelos de fronteira estocástica. A abordagem bayesiana foi utilizada para a obtenção dos resumos de interesse e observou-se que a eficiência das instituições depende do número de artigos publicados em periódicos indexados pelo Qualis, da quantidade de livros e capítulos de livros publicados e, também, de publicações em reuniões e eventos científicos.

ABSTRACT

The courses of post-graduate (masters and doctorate) at Brazil are evaluated every three years for the Coordination and Improvement of Higher Level or Education Personnel (CAPES) in order to establish a standard of quality teaching and research in the country. In this paper, based on information available by CAPES ourselves a efficiency rating of graduate courses in the area of Mathematics /Probability and Statistics using stochastic frontier models. The bayesian approach was used to obtain summaries of interest and observed that the effectiveness of institutions depends on the number of articles published in journals indexed by Qualis, quantity of books and book chapters published, and published in meetings and scientific events.

Palavras-chave: Inferência bayesiana, função de produção, eficiência técnica.

1 INTRODUÇÃO

Os cursos de pós-graduação, do Brasil, são avaliados pela CAPES (Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior) trienalmente, com o objetivo, fundamentalmente, de estabelecer o padrão de qualidade exigido dos cursos de mestrado e de doutorado do país e identificar os cursos que atendem a tal padrão.

Na literatura encontram-se, com mais facilidade, artigos que medem a eficiência de instituições de ensino utilizando a metodologia não paramétrica chamada análise envoltória de dados (DEA) [19] e [2]. Nesta metodologia estimam-se os coeficientes de eficiência

das instituições limitando-se às informações contidas na amostra em estudo, propiciando maior chance de cometer erros de medida [13] e [10].

Nos modelos de fronteira estocástica (abordagem paramétrica) pode-se obter uma estimativa da eficiência global dos cursos e, em vantagem sobre a abordagem não paramétrica, consideram que a ineficiência da instituição depende não somente de fatores controláveis, tais como, número de docentes no programa, quantidade de artigos publicados, número de defesas, etc, mas também de uma variação natural que os dados podem conter, tais como, um aluno desistir da pós-graduação, um professor ficar doente, efeitos de tempo, greve, sorte etc [6]. Pereira e Moreira [17] utilizam modelos de fronteira estocástica para classificar a eficiência das escolas secundárias portuguesas, tanto públicas como privadas, usando os exames nacionais como indicador do desempenho. Para as escolas do ensino básico brasileiras, [22] analisa os principais determinantes da eficiência técnica das escolas usando dois tipos de modelos de fronteira estocástica: o primeiro inclui variáveis ambientais como regressoras e o segundo especifica a ineficiência como dependente dessas variáveis ambientais.

Um dos primeiros artigos que utilizam a inferência bayesiana nos modelos de fronteira estocástica foi apresentado por van den Broeck et al. [4]. Nesse trabalho, incorpora-se a incerteza relativa à ineficiência técnica considerando-se a distribuição exponencial com parâmetro de forma conhecido. Outros trabalhos relevantes que empregam a abordagem Bayesiana são de Koop et al. [14] que utilizam o amostrador de Gibbs para analisar o modelo de fronteira estocástica com distribuição gama para a ineficiência, Steel e Koop [20] apresentam uma revisão da abordagem, Migon [16] utiliza a distribuição log-normal para o termo de ineficiência da firma. Fernández et al. [8] generalizam o modelo de fronteira de produção estocástica para dados que apresentam múltiplos produtos (um estudo detalhado desse artigo pode ser encontrado em Cespedes [5]), Cespedes e Leandro [7] comparam os modelos de fronteira estocástica com erro normal e com erro t-Student e aplicam a dados de fazendas produtoras de carne, dentre outros.

As distribuições utilizadas para o termo de ineficiência são: a distribuição exponencial [15] e [1], a distribuição meia normal [1], a distribuição gama [21], [12] e [11], a distribuição normal truncada [21] e a distribuição log-normal [16].

O objetivo deste artigo consiste em estabelecer uma classificação dos cursos de pós-graduação avaliados pela CAPES na área de Matemática/Probabilidade e Estatística em relação a sua eficiência, utilizando os modelos de fronteira estocástica com abordagem bayesiana, a partir das informações disponíveis no site da CAPES.

2 MATERIAIS E MÉTODOS

Os cursos escolhidos para serem avaliados no projeto foram os cursos da área de Matemática/ Probabilidade e Estatística que possuíam programa de pós-graduação de mestrado ou doutorado ativo no triênio 2007-2009, que receberam nota final da Capes na avaliação em 2010.

As instituições que ofereciam tais cursos e foram classificadas, são as seguintes: Universidade Estadual de Londrina (curso: Matemática Aplicada e Computacional); Universidade Federal do Paraná (curso: Matemática / Matemática Aplicada); Universidade Federal do ABC (curso: Matemática Aplicada); Universidade Federal do Rio Grande do Sul (curso: Matemática / Matemática Aplicada); Universidade Estadual de Campinas (curso: Matemática / Matemática Aplicada / Estatística / Matemática Universitária); Universidade de São Paulo (curso: Estatística / Matemática Aplicada); Universidade de São Paulo - campus São Carlos (curso: Matemática); Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (curso: Matemática / Matemática Aplicada); Universidade Federal de Minas Gerais (curso: Matemática / Estatística); Universidade Federal do Rio de Janeiro (curso: Matemática / Estatística / Matemática Aplicada); Universidade de Brasília (curso: Matemática / Estatística); Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (curso: Matemática); Universidade Federal

do Ceará (curso: Matemática); Universidade Federal de Pernambuco (curso: Matemática / Estatística); Universidade Federal de São Carlos (curso: Matemática / Estatística); Universidade Estadual de Maringá (curso: Matemática); Universidade Federal de Alagoas (curso: Matemática); Universidade Federal do Amazonas (curso: Matemática); Universidade Federal da Bahia (curso: Matemática); Universidade Federal de Campina Grande (curso: Matemática); Universidade Federal Fluminense (curso: Matemática); Universidade Federal de Goiás (curso: Matemática); Universidade Federal do Pará (curso: Matemática e Estatística); Universidade Federal da Paraíba/João Pessoa (curso: Matemática); Universidade Federal de Santa Catarina (curso: Matemática e Computação Científica); Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Campus São José do Rio Preto (curso: Matemática); Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" Campus Rio Claro (curso: Matemática Universitária); Universidade Federal do Piauí (curso: Matemática); Universidade Federal do Espírito Santo (curso: Matemática); Universidade Federal do Rio Grande do Norte (curso: Matemática Aplicada e Estatística); Universidade Federal de Santa Maria (curso: Matemática); Universidade Federal de Uberlândia (curso: Matemática); Universidade Federal de Viçosa (curso: Matemática).

Foram consideradas como variáveis regressoras (insumos) as informações disponibilizadas no site da CAPES¹: número de docentes permanentes no triênio (2007-2009); número de dissertações e teses defendidas no triênio; artigos publicados Qualis A no triênio (inclui Qualis A1 e A2); artigos publicados Qualis B no triênio (inclui Qualis B1, B2, B3, B4, B5); trabalhos completos publicados em anais de eventos técnico-científicos e capítulos de livros, texto integral, coletâneas, verbetes e outros. O produto considerado na análise foi a nota da CAPES no triênio 2010.

2.1 INFERÊNCIA BAYESIANA

A inferência bayesiana teve seu início em 1763, com o artigo do Rev. Thomas Bayes: An essay towards solving a problem in doctrine of chances [3]. Pode-se definir inferência bayesiana como sendo o processo de encontrar um modelo de probabilidade para um conjunto de dados e resumir o resultado do mesmo por uma distribuição de probabilidade sobre os parâmetros do modelo e sobre quantidades não observadas, tais como, predição para novas observações [9].

Diferentemente da abordagem clássica, que considera o parâmetro uma quantidade fixa e desconhecida, do ponto de vista bayesiano o parâmetro é considerado uma quantidade de incerteza onde se atribui uma distribuição de probabilidade chamada distribuição a priori.

A distribuição a priori é então atualizada pela função de verossimilhança (informação dada pela amostra) resultando na distribuição a posteriori:

$$P(\theta|y) \propto L(\theta|y)P(\theta),$$

em que θ é a quantidade de incerteza de interesse, $P(\theta|Y)$ refere-se à distribuição a posteriori, $L(\theta, Y)$ função de verossimilhança e $P(\theta)$ distribuição a priori da quantidade de incerteza θ .

Pode-se dizer que a distribuição a posteriori é proporcional a função de verossimilhança multiplicada pela distribuição a priori.

2.2 MODELO DE FRONTEIRA ESTOCÁSTICA

Os modelos de fronteira estocástica foram propostos, independente e quase simultaneamente, por Meeusen e van den Broeck [15] e Aigner et al. [1]. Esses modelos possuem duas fontes de variação, sendo uma medida de incerteza que se refere à ineficiência da

¹<http://www.capes.gov.br/component/content/article/44-avaliacao/4355-planilhas-comparativas-da-avaliacao-trienal-2010>

instituição e um erro aleatório responsável pela variação natural dos dados que não podem ser controladas:

$$y_i = f(x_{ik}, \beta_k) e^{-u_i + v_i}, \quad (1)$$

em que y_i refere-se à variável resposta do i -ésimo curso de pós-graduação, também chamado de produto, $i = 1, \dots, n$, $f(x_{ik}, \beta_k)$ é a forma funcional das $k = 1, \dots, K$ variáveis regressoras chamada de função de produção², u_i é um componente aleatório que refere-se à ineficiência do programa e v_i refere-se à uma variação natural que os dados podem conter e que não são controladas, tais como, um aluno desistir da pós-graduação, um professor ficar doente, efeitos de tempo, greves etc, sobre os valores do produto, juntamente aos efeitos combinados de insumos não-especificados na função de produção, tais como, cargos administrativos dos docentes, quantidade de horas aula ministrada pelo docente, número de orientandos, etc.

A eficiência do programa será medida como a razão entre a nota observada relativa à nota esperada do curso (definida pela função de produção), dado a combinação de insumos:

$$ET_i = \frac{f(x_{ik}, \beta_k) e^{v_i - u_i}}{f(x_{ik}, \beta_k) e^{v_i}} = e^{-u_i}. \quad (2)$$

A equação (2) indica a magnitude do produto do i -ésimo curso relativo ao produto que poderia ser obtido por um curso eficiente usando a mesma combinação de insumos. Os cursos de pós-graduação serão considerados tecnicamente eficientes se eles estiverem sobre a fronteira de produção. Os cursos que estiverem abaixo da fronteira serão considerados tecnicamente ineficientes.

A função de produção utilizada no trabalho será a função Cobb-Douglas [5] dada por:

$$f(x_{ik}, \beta_k) = A \prod_{k=1}^K x_{ik} \beta_k, \quad (3)$$

sendo A e β_k quantidades de incertezas a serem estimadas.

A fim de se obter as estimativas das quantidades de incertezas do modelo (1) pode-se utilizar a transformação logarítmica para torná-lo linear:

$$\ln(y_i) = \ln(f(x_{ik}, \beta_k)) - u_i + v_i,$$

e assim definir a distribuição de probabilidade dos dados, chamada função de verossimilhança. Greene [12] define a função de verossimilhança como:

$$\begin{aligned} \ln(y_i | u_i) &\sim N(\ln(f(x_{ik}, \beta_k)) - u_i, \sigma_v^2) \\ u_i &\sim \exp(\alpha), \end{aligned} \quad (4)$$

em que $N(\cdot, \cdot)$ representa a função densidade da distribuição normal com média $\ln(f(x_{ik}, \beta_k)) - u_i$ e variância σ_v^2 , e $\exp(\cdot)$ é a função densidade da distribuição exponencial com parâmetro α .

O modelo definido em (4) é um modelo hierárquico que pode ser facilmente estimado utilizando a inferência bayesiana, por meio de programas computacionais gratuitos, tal como o Winbugs [18], onde definem-se a função de verossimilhança, as distribuições a priori para as quantidades de incerteza do modelo, e ainda, obtém-se os valores preditos das ineficiências das instituições u_i .

A função de produção (3), após a transformação logarítmica, torna-se:

$$\ln(f(x_{ik}, \beta_k)) = \beta_0 + \sum_{k=1}^K \beta_k \ln(x_{ik}),$$

em que $\beta_0 = \ln(A)$.

²A função de produção relaciona os insumos (variáveis regressoras) com o produto (variável resposta) de um processo de produção, sendo as mais utilizadas chamadas de Cobb-Douglas e translog.

3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

O modelo (4) foi implementado no programa computacional Winbugs³ onde definem-se a função de verossimilhança e as distribuições a priori para cada quantidade de incerteza. As distribuições a priori foram definidas de forma não informativa: $\tau \sim G(0,001;0,001)$, $\beta_i \sim N(0; 1.0E - 6)$ e $\alpha \sim G(0,1;0,1)$.

Em uma primeira análise verificou-se que as variáveis: número de docentes do programa e teses e dissertações defendidas no triênio foram não significativas, ou seja, contribuem pouco para a composição da nota do programa segundo a metodologia utilizada neste trabalho. Na Tabela 1 observa-se o resumo a posteriori das quantidades de incertezas de interesse.

Quantidades de incerteza	Média	Desvio-padrão	2,5 %	Mediana	97,5 %
α	19,43	9,09	8,17	17,32	42,76
β_0	0,78	0,14	0,49	0,77	1,04
β_1	0,01	0,06	-0,11	0,01	0,13
β_2	0,03	0,02	-0,01	0,03	0,06
β_3	0,09	0,03	0,03	0,08	0,14
β_4	0,12	0,04	0,04	0,12	0,20
β_5	-0,05	0,01	-0,07	-0,05	-0,02
β_6	0,06	0,02	0,02	0,06	0,10
τ	75,58	21,53	42,48	72,6	125,8

TABELA 1: Resumo a posteriori das quantidades de incerteza do modelo de fronteira estocástica

Os valores 2,5% e 97,5% presentes na Tabela 1 correspondem ao intervalo de credibilidade de cada quantidade e incerteza em estudo. Em estatística bayesiana o intervalo de credibilidade é um intervalo de probabilidade a posteriori, usado para fins similares aos dos intervalos de confiança em estatística frequentista. Optou-se por incluir os valores da mediana, pois a probabilidade de determinado valor estar abaixo do intervalo é tão provável quanto a probabilidade de estar acima dele. Quando uma quantidade de incerteza não é significativa, seu intervalo de credibilidade contém um valor muito próximo do número zero.

Observa-se na Tabela 1 que as quantidades β_1 e β_2 possuem intervalo de credibilidade centrados em zero, isso mostra que as variáveis correspondentes ao números de docentes no programa e o número de teses e dissertações defendidas contribuem muito pouco no modelo especificado. Observa-se ainda que todas as outras quantidades de incertezas são significativas uma vez que os intervalos de credibilidade das mesmas não contém o valor zero.

As quantidades de incertezas não significativas foram retiradas da análise obtendo-se o modelo de fronteira estocástica:

$$\ln(y_i)|u_i \sim N(\beta_0 + \beta_3 \ln x_3 + \beta_4 \ln x_4 + \beta_5 \ln x_5 + \beta_6 \ln x_6 - u_i, \tau) \tag{5}$$

$$u_i \sim \exp(\alpha)$$

onde y_i refere-se à nota do programa, x_3, x_4, x_5 e x_6 são os insumos que referem-se, respectivamente, ao número de artigos publicados em periódicos qualis A1 e A2, número de artigos publicados em periódicos qualis B1, B2, B3, B4 e B5, número de publicações em eventos científicos e o número de livros (capítulos, livros, coletâneas) produzidos no triênio. O termo u_i refere-se à ineficiência das instituições.

A Tabela 2 apresenta um resumo a posteriori das ineficiências de cada programa de pós-graduação da área Matemática/Probabilidade e Estatística. A identificação dos programas foi suprimida por motivos éticos.

³<http://www.mrc-bsu.cam.ac.uk/bugs/winbugs/contents.shtml>

Programa	Média	Desvio-padrão	2,5%	Mediana	97,5%
u_1	0,070	0,065	0,002	0,049	0,243
u_2	0,081	0,072	0,002	0,060	0,269
u_3	0,089	0,078	0,002	0,067	0,289
u_4	0,079	0,071	0,002	0,058	0,262
u_5	0,045	0,043	0,001	0,031	0,161
u_6	0,087	0,077	0,002	0,065	0,282
u_7	0,053	0,051	0,001	0,038	0,191
u_8	0,046	0,044	0,001	0,032	0,165
u_9	0,053	0,050	0,001	0,037	0,187
u_{10}	0,050	0,047	0,001	0,035	0,176
u_{11}	0,066	0,061	0,002	0,047	0,226
u_{12}	0,046	0,044	0,001	0,032	0,164
u_{13}	0,080	0,072	0,002	0,059	0,266
u_{14}	0,053	0,050	0,001	0,038	0,186
u_{15}	0,035	0,035	0,001	0,024	0,131
u_{16}	0,057	0,054	0,001	0,041	0,203
u_{17}	0,102	0,086	0,003	0,079	0,315
u_{18}	0,061	0,057	0,002	0,044	0,212
u_{19}	0,087	0,076	0,002	0,066	0,281
u_{20}	0,050	0,048	0,001	0,036	0,179
u_{21}	0,070	0,064	0,002	0,051	0,240
u_{22}	0,055	0,052	0,001	0,040	0,194
u_{23}	0,081	0,073	0,002	0,060	0,268
u_{24}	0,091	0,079	0,002	0,069	0,290
u_{25}	0,068	0,064	0,002	0,048	0,237
u_{26}	0,035	0,034	0,001	0,024	0,128
u_{27}	0,038	0,037	0,001	0,027	0,140
u_{28}	0,035	0,034	0,001	0,024	0,127
u_{29}	0,072	0,066	0,002	0,052	0,245
u_{30}	0,065	0,062	0,001	0,045	0,231
u_{31}	0,113	0,097	0,003	0,086	0,352
u_{32}	0,043	0,041	0,001	0,030	0,154
u_{33}	0,054	0,052	0,001	0,038	0,194
u_{34}	0,036	0,035	0,001	0,024	0,130
u_{35}	0,035	0,034	0,001	0,024	0,129
u_{36}	0,035	0,034	0,001	0,024	0,127
u_{37}	0,069	0,065	0,002	0,048	0,243
u_{38}	0,032	0,031	0,001	0,022	0,118
u_{39}	0,022	0,022	0,000	0,015	0,081
u_{40}	0,046	0,044	0,001	0,032	0,166
u_{41}	0,037	0,036	0,001	0,026	0,136
u_{42}	0,047	0,045	0,001	0,033	0,167
u_{43}	0,047	0,048	0,001	0,032	0,179
u_{44}	0,044	0,042	0,001	0,031	0,160
u_{45}	0,051	0,049	0,001	0,036	0,181
u_{46}	0,051	0,049	0,001	0,036	0,184

TABELA 2: Resumo a posteriori das ineficiências dos programas de pós-graduação

Por meio dos resultados da Tabela 2 é possível ordenar os programas e identificar quais os programas que possuem maior ineficiência técnica. O programa representado pelo u_{31} é o mais ineficiente da área de Matemática/Probabilidade e Estatística.

A eficiência técnica foi calculada conforme expressão (2). Obteve-se uma classificação dos programas eficientes e ineficientes. A Figura 1 apresenta os valores das eficiências para cada programa. No gráfico pode-se observar que quanto mais próximo do valor um, mais eficiente será o programa, e quanto mais próximo de zero, menor eficiência está associada ao programa de pós-graduação. Entre os quarenta e seis resultados obtidos, avaliou-se seis dos quais três representam os primeiros cursos mais eficientes e três os menos eficientes. Os seis programas avaliados estão relacionadas respectivamente pelos seguintes fatores de ineficiência, contando-se da menos eficiente à mais eficiente: u_{31} , u_{17} , u_{24} , u_{36} , u_{38} , u_{39} .

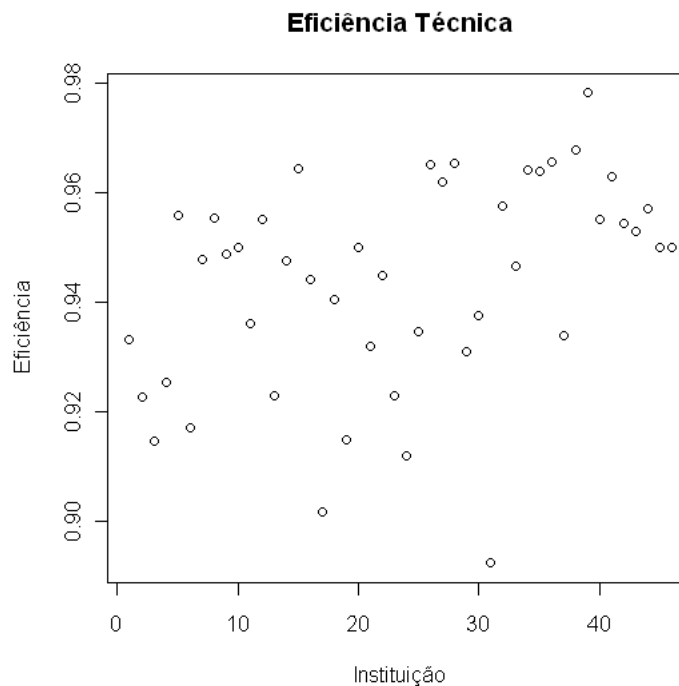


FIGURA 1: Eficiência Técnica

A nota CAPES para os cursos de pós-graduação varia em um intervalo de no mínimo 3 e máximo 7. Observou-se no decorrer da análise que as instituições mais eficientes não se encontram necessariamente entre as que possuem notas acima de 5, mas sim, em faixas menores. Isso pode ter ocorrido, pois, foram consideradas na análise apenas as informações das variáveis disponíveis no site da Capes. Buscando entender as causas que levaram à eficiência destas instituições notou-se que as mesmas são instituições novas, com início entre os anos de 2007 e 2008 e, além disso, os docentes vinculados ao programa possuem alto número de artigos publicados e alta participação em eventos decorrentes, em grande maioria, à sua pesquisa de mestrado ou doutorado. Portanto essas publicações não são decorrentes de orientações no programa.

Entre os cursos menos eficientes encontram-se os programas com mais de 10 anos de existência. O número de publicações dos docentes desses programas, por sua vez, é menor, mas são publicações oriundas de orientações no programa de pós-graduação, com os alunos do programa como autores. É possível que as publicações oriundas de orientações no programa de pós-graduação possam ser avaliadas pela CAPES com maior peso do que as publicações individuais dos docentes.

A Figura 2 apresenta as densidades a posteriori para os parâmetros da fronteira. Estas densidades podem ser utilizadas como ferramenta para estudar a convergência das distribuições em questão. Quanto mais simétrico, melhor o resultado. Observa-se nos gráficos

(com excessão do primeiro da esquerda e último da direita) que apresentam a simetria desejada.

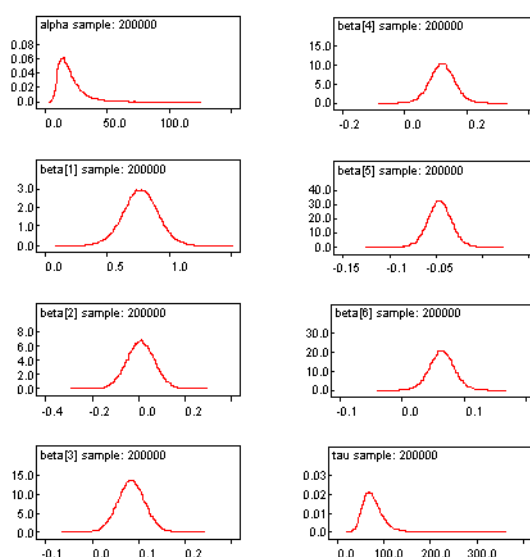


FIGURA 2: Densidade a posteriori para as quantidades de incerteza do modelo de fronteira

4 CONCLUSÕES

Através da abordagem bayesiana, estudou-se a eficiência dos cursos de pós-graduação de determinadas instituições do Brasil. A partir da combinação dos dados com as informações a priori, obteve-se um resumo da distribuição a posteriori das quantidades de incerteza do modelo. Com esta metodologia conclui-se que a eficiência dos cursos baseia-se, principalmente, no número de artigos publicados e a mesma independe do número de docentes do programa e do número de teses e dissertações defendidas.

Os resultados e impactos deste projeto vão além dos resultados analíticos, tais como, verificar quais são os cursos de pós-graduação da área de Matemática/Probabilidade e Estatística que são mais eficientes e quais são os fatores que influenciam na nota CAPES do determinado curso, mas sim estudar uma metodologia interdisciplinar que envolva conceitos econômicos e estatísticos.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo auxílio financeiro recebido no desenvolvimento desse trabalho.

REFERÊNCIAS

- [1] D. J. Aigner, C. A. K. Lovell e P. Schmidt: *Formulation and estimation of stochastic frontier production function models*. *Journal of Econometrics*, 6(1):21–37, 1977.
- [2] L. D. Alencastro e A. Fochezatto: *Eficiência técnica na gestão de recursos em instituições privadas de ensino superior*. *Análise*, 17:234–242, 2006.
- [3] T. Bayes: *An essay towards solving a problem in the doctrine of chances*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 53:370–418, 1763.
- [4] J. van den Broeck, G. Koop, J. Osiewalski e M. F. J. Steel: *Stochastic frontier models: a Bayesian perspective*. *Journal of Econometrics*, 61(2):273–303, 1994.

- [5] J. G. Cespedes: *Eficiência de Produção: um enfoque Bayesiano*. Tese de Mestrado, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, São Paulo, 2003.
- [6] J. G. Cespedes: *Modelos de fronteira estocástica: uma abordagem Bayesiana*. Tese de Doutorado, Escola Superior de Agricultura "Luiz de Queiroz", Universidade de São Paulo, Piracicaba, São Paulo, 2008.
- [7] J. G. Cespedes e R. A. Leandro: *Uma aplicação de modelos de fronteira de produção estocástica com erro normal e com erro t-student*. Revista de Matemática e Estatística, 24(3):25–34, 2006.
- [8] C. Fernandez, G. Koop e M. F. J. Steel: *A Bayesian analysis of multiple-output production frontiers*. Journal of Econometrics, 98(1):47–79, 2000.
- [9] A. Gelman, J. B. Carlin, H. S. Stern e D. B. Rubin: *Bayesian data analysis*. Chapman and Hall, London, 2003.
- [10] J. C. Glass, D. Mackillop e N. Hyndman: *Efficiency in the prevision of university teaching and research: an empirical analysis of UK Universities*. Journal of Applied Econometrics, 10:61–72, 1995.
- [11] W. Greene: *estimation of a flexible frontier production model*. Journal of Econometrics, 13(1):101–115, 1980.
- [12] W. Greene: *Maximum likelihood estimation of econometric frontier functions*. Journal of Econometrics, 13(1):27–56, 1980.
- [13] J. Johnes: *Measuring efficiency: a comparison of multilevel modeling and data envelopment analysis in the context of higher education*. Bulletin of Economic Research, 58(2):75–104, 2006.
- [14] G. Koop, M. F. J. Steel e J. Osiewalski: *Posterior analysis of stochastic frontier models using Gibbs sampling*. Computational Statistics, 10:353–373, 1995.
- [15] W. Meeusen e J. van den Broeck: *Efficiency estimation from Cobb-Douglas production functions with composed error*. International Economic Review, 18(2):435–444, 1977.
- [16] H. Migon: *Bayesian hierarchical models for stochastic production frontier*. Estadística, 56:10–30, 2004.
- [17] M. C. Pereira e S. Moreira: *Bayesian hierarchical models for stochastic production frontier*. Boletim Económico: Banco de Portugal, Primavera 2007:101–118, 2007.
- [18] R Development Core Team: *R: A Language and Environment for Statistical Computing*. R Foundation for Statistical Computing, Vienna, Austria, 2010. <http://www.R-project.org>, ISBN 3-900051-07-0.
- [19] B. Sampaio e J. Guimarães: *Diferenças de eficiência entre ensino público e privado no Brasil*. Economia Aplicada, 13(1):45–68, 2009.
- [20] M. F. J. Steel e G. Koop: *Bayesian analysis of stochastic frontier models in: A Companion to Theoretical Econometrics*, pp. 520–537. Baltagi B, 2001.
- [21] R. E. Stevenson: *Likelihood functions for generalized stochastic frontier estimation*. Journal of Econometrics, 13(1):57–66, 1980.
- [22] P. P. Trigo: *Avaliação da eficiência técnica no ensino básico brasileiro*. Tese de Mestrado, Faculdade de Economia, Administração e Contabilidade, Universidade de São Paulo, Ribeirão Preto, São Paulo, 2010.