Distribuições do produto e razão de variáveis aleatórias Pareto e beta

Jailson Araujo Rodrigues
Instituto Federal da Bahia
jailsondearaujo@yahoo.com.br

Ana Paula Madeira Silva
Universidade Federal de São João del-Rei
apcmadeira@hotmail.com

Jaime Santos Filho
Instituto Federal da Bahia
jsf_ba@yahoo.com.br

Angela Lima Silva
Instituto Federal da Bahia
angelalimadasilva@yahoo.com.br

RESUMO

As distribuições do produto e razão de variáveis aleatórias são utilizadas em muitas áreas das ciências aplicadas. Nesse contexto, são deduzidas as distribuições exatas do produto XY e da razão X/Y quando X e Y são variáveis Pareto e beta independentes. Utilizando a função hipergeométrica de Gauss, são apresentadas expressões exatas para as funções de distribuição e de densidade de probabilidade associadas. Os resultados obtidos são aplicados na tabulação de quantis que podem ser diretamente utilizados em problemas práticos.

ABSTRACT

The distributions of the product and the ratio of random variables are used in many areas of applied sciences. In this context, the exact distributions of the product XY and the ratio X/Y are derived when X and Y are independent variables Pareto and beta variables. Using the Gauss hypergeometric function, closed expressions for the cumulative distribution function and probability density function are given. The results are applied in the tabulation of quantiles that can be directly used in practical problems.

Palavras-chave: Distribuições de probabilidade, função hipergeométrica, produto de variáveis aleatórias, razão de variáveis aleatórias.

1 Introdução

A necessidade de determinar as distribuições do produto e da razão de variáveis aleatórias surge naturalmente em diversas áreas do conhecimento. Por exemplo, em física nuclear estuda-se a razão entre a massa e a energia e em genética a razão entre duas variáveis pode ser empregada para o estudo de herança mendeliana. Por outro lado, o produto de variáveis aleatórias pode ser empregado em hidrologia para analisar magnitude de seca que é o produto do período de seca com sua intensidade. Dessa forma, muitos autores tem pesquisado as distribuições de XY e X/Y, especialmente quando X e Y são variáveis aleatórias pertencentes a mesma família de distribuições. Com respeito ao produto variáveis aleatórias tem-se: Sakamoto [30] para a família uniforme; Springer e Thompson [33]; Stuart [35] e Podolski [26] para a família gama; Harter [6] e Wallgren [36] para a família t de Student; Steece [34], Bhargava e Khatri [4] e Tang e Gupta [5] para a família beta; Malik e Trudel [10] para a família exponencial; Nadarajah e Gupta [17] para a família Bessel; Nadarajah e Ali [16] para a família Pareto e Ali *et al.* [2] para a família Pareto exponencializada. Para a razão de variáveis aleatórias tem-se: Marsaglia [11] e Korhonen e Narula [9] para a família normal; Press [27] para a família t de Student; Basu e Lochner [3] para a família Weibull; Provost [28] para a família gama; Pham-Gia [25] para a família beta; Nadarajah e Gupta [17] para a família Bessel e Nadarajah e Ali [16] para a família Pareto.

Diversos trabalhos também foram publicados sobre as distribuições de XY e X/Y quando X e Y provém de famílias diferentes de distribuições. Os mais recentes são: Nadarajah e Ali [15] para a família t de Student e a família logística; Nadarajah [12] para as famílias Laplace e Bessel; Nadarajah e Kotz [18] para as famílias gama e beta; Nadarajah e Kotz [19] para as famílias Pearson tipo VII e Laplace; Nadarajah e Kotz [20] para as famílias gama e Weibull; Nadarajah e Kotz [21] ara as famílias gama e Levy; Nadarajah e Kotz [22] para as famílias t de Student e Bessel; Shakil e Kibria [31] para as famílias gama e Rayleigh; Shakil *et al.* [32] para as famílias Maxwell e Rayleigh; Nadarajah [13] e Nadarajah [14] para as famílias Pareto e gama e Nadarajah e Kotz [23] para as famílias normal e Laplace.

Nesse trabalho, é apresentado um estudo das distribuições de XY e X/Y quando X e Y são, respectivamente, variáveis aleatórias Pareto e beta independentes.

O texto é organizado da seguinte forma: na Seção 2 são apresentados o modelo Pareto, os modelos beta tipo I, beta tipo II e algumas funções especiais envolvidas nos cálculos das distribuições, nas Seções 3 e 4 são deduzidas as funções de distribuição (fd) e as funções densidade de probabilidade das variáveis XY e X/Y, gráficos dessas funções também são exibidos para diferentes valores paramétricos . Finalmente, na Seção 5 os resultados obtidos são aplicados na tabulação de quantis que podem ser diretamente utilizados na resolução de problemas práticos.

2 DISTRIBUIÇÕES PARETO E BETA.

Distribuição Pareto: Uma variável aleatória X tem distribuição Pareto com parâmetros $\theta > 0$ e $\lambda > 0$ quando sua função densidade de probabilidade (fdp) é da forma:

$$f(x) = \lambda\theta^{\lambda}(x+\theta)^{-(\lambda+1)} \tag{1}$$

em que $x > 0$. Neste caso, escreve-se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$.

A seguir são apresentados os dois tipos de distribuições beta considerados neste trabalho. Para maiores informações sobre o modelo Pareto e os modelos beta, ver Johson *et al.* [7, 8].

Distribuição beta tipo I: Uma variável aleatória Y tem distribuição beta tipo I com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f_Y(y) = \frac{y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}}{B(\alpha,\beta)} \tag{2}$$

em que $0 < y < 1$ e $B(\alpha, \beta)$ representa a função beta,

$$B(\alpha,\beta) = \int_0^1 t^{\alpha-1}(1-t)^{\beta-1}\,dt$$

Se Y tem distribuição dada por (2), escreve-se $Y \sim BetaI(\alpha, \beta)$.

Distribuição beta tipo II: Uma variável aleatória Y tem distribuição beta tipo II com parâmetros $\alpha > 0$ e $\beta > 0$ quando sua função densidade de probabilidade é da forma:

$$f_Y\left(y\right) = \frac{y^{\alpha-1}\left(1+y\right)^{-(\alpha+\beta)}}{B\left(\alpha,\beta\right)} \tag{3}$$

em que $y > 0$. Neste caso, escreve-se $Y \sim BetaII(\alpha, \beta)$.

Incluindo a função beta, os cálculos envolvidos no trabalho requerem o uso de outras funções especiais como a função gama,

$$\Gamma\left(\alpha\right) = \int_0^\infty t^{\alpha-1}\exp\left(-t\right)dt \tag{4}$$

e a função hipergeométrica de Gauss,

$${}_2F_1\left(a,b;c;x\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\left(a\right)_k\left(b\right)_k x^k}{\left(c\right)_k k!} \tag{5}$$

em que $\mid x \mid < 1$ e $\left(d\right)_k = d\left(d+1\right)\ldots\left(d+k-1\right)$ denota o fatorial ascendente com $k = 1, 2, \ldots$ e $\left(d\right)_0 = 1$. As propriedades dessas funções especiais podem ser vistas em Oldham *et al.* [24].

3 PRODUTO E RAZÃO DE PARETO E BETA TIPO I.

Nesta sessão são deduzidas, com o auxílio de um lema, as fd e as fdp de $P = XY$ e $R = X/Y$ quando X e Y distribuídas de acordo com (1) e (2).

Lema 1: *(Equação (2.2.6.15), Prudnikov [29]). Se $a, \alpha, \beta, z > 0$ e ρ é um real qualquer, então,*

$$\int_0^a x^{\alpha-1}\left(a-x\right)^{\beta-1}\left(x+z\right)^{-\rho}dx = z^{-\rho}a^{\alpha+\beta-1}B\left(\alpha,\beta\right)\ {}_2F_1\left(\alpha,\rho;\alpha+\beta;-\frac{a}{z}\right)$$

Teorema 1: *Se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha, \beta)$ são independentes, então, a fd de $P = XY$ pode ser escrita como:*

$$F_P(p) = 1 - \frac{B\left(\alpha+\lambda,\beta\right)\theta^\lambda}{B\left(\alpha,\beta\right)p^\lambda}\ {}_2F_1\left(\alpha+\lambda,\lambda;\alpha+\beta+\lambda;-\frac{\theta}{p}\right) \tag{6}$$

sendo que $p > 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_P\left(p\right) &= P\left(XY < p\right) \\ &= \int_0^1 F_X\left(p/y\right)f_Y\left(y\right)dy \\ &= \frac{1}{B\left(\alpha,\beta\right)}\int_0^1\left[1-\left(\frac{\theta y}{p+\theta y}\right)^\lambda\right]y^{\alpha-1}\left(1-y\right)^{\beta-1}dy \\ &= 1-\frac{1}{B\left(\alpha,\beta\right)}\int_0^1 y^{\alpha+\lambda-1}\left(1-y\right)^{\beta-1}\left(\frac{p}{\theta}+y\right)^{-\lambda}dy \end{aligned} \tag{7}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 2 na integral ([24]).

□

Teorema 2: *Se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha, \beta)$ são independentes, então, a fdp de $P = XY$ pode ser escrita como:*

$$f_P(p) = \frac{B\left(\alpha+\lambda,\beta\right)\lambda\theta^\lambda}{B\left(\alpha,\beta\right)p^{\lambda+1}}\ {}_2F_1\left(\alpha+\lambda,\lambda+1;\alpha+\beta+\lambda;-\frac{\theta}{p}\right) \tag{8}$$

sendo que $p > 0$. Em particular, se $\alpha + \beta = \theta = 1$, então, $P \sim BetaII\left(\alpha,\lambda\right)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} f_P(p) &= \int_0^1 (1/y)\, f_X(p/y)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{\lambda}{\theta B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha+\lambda-1} (1-y)^{\beta-1} \left(\frac{p}{\theta}+y\right)^{-(\lambda+1)} dy. \qquad (9) \end{aligned}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 2 na integral (9).

□

Teorema 3: *Se $X \sim Pareto(\theta,\lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha,\beta)$ são independentes, então, a fd de $R = X/Y$ pode ser escrita como:*

$$F_R(r) = 1 - {}_2F_1\left(\alpha,\lambda;\alpha+\beta;-\frac{r}{\theta}\right) \qquad (10)$$

sendo que $r > 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(X/Y < r) \\ &= \int_0^1 F_X(yr)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 \left[1 - \frac{\theta^\lambda}{(ry+\theta)^\lambda}\right] y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\, dy \\ &= 1 - \frac{\theta^\lambda r^{-\lambda}}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^{\alpha-1}(1-y)^{\beta-1}\left(\frac{\theta}{r}+y\right)^{-\lambda} dy \qquad (11) \end{aligned}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 1 na integral (11).

□

Teorema 4: *Se $X \sim Pareto(\theta,\lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha,\beta)$ são independentes, então, a fdp de $R = X/Y$ pode ser escrita como:*

$$f_R(r) = \frac{\alpha\lambda}{\theta(\alpha+\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1,\lambda+1;\alpha+\beta+1;-\frac{r}{\theta}\right) \qquad (12)$$

sendo que $r > 0$. Em particular, se $\lambda = \alpha+\beta$ e $|r| < \theta$, então, $R \sim Pareto(\theta,\alpha)$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^1 y f_X(ry)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{\lambda\theta^\lambda}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^\alpha (1-y)^{\beta-1}(ry+\theta)^{-(\lambda+1)}\, dy \\ &= \frac{\lambda\theta^\lambda r^{-(\lambda+1)}}{B(\alpha,\beta)} \int_0^1 y^\alpha (1-y)^{\beta-1}\left(y+\frac{\theta}{r}\right)^{-(\lambda+1)} dy \qquad (13) \end{aligned}$$

Aplicando o Lema 1 na integral (13), tem-se:

$$f_R(r) = \frac{\lambda B(\alpha+1,\beta)}{\theta B(\alpha,\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1,\lambda+1;\alpha+\beta+1;-\frac{r}{\theta}\right)$$

Utilizando as propriedades, $\Gamma(t+1) = t\Gamma(t)$ e $B(t,z) = \Gamma(t)\Gamma(z)/\Gamma(t+z)$, tem-se:

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \frac{\lambda\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta)\Gamma(\alpha+\beta)}{\theta\Gamma(\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1,\lambda+1;\alpha+\beta+1;-\frac{r}{\theta}\right) \\ &= \frac{\alpha\lambda}{\theta(\alpha+\beta)}\, {}_2F_1\left(\alpha+1,\lambda+1;\alpha+\beta+1;-\frac{r}{\theta}\right) \qquad (14) \end{aligned}$$

Para o caso particular $\lambda = \alpha + \beta$, empregando a expressão (5), a série obtida converge e sua convergência é baseada na expressão:

$$(1-\nu x)^{-b} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(b)_k (\nu x)^k}{k!} \tag{15}$$

com $|\nu x| < 1$. Dessa forma, quando $|r| < \theta$, segue que $R \sim Pareto(\theta, \alpha)$. □

As formas possíveis das fd e fdp de $P = XY$ e $R = X/Y$ quando $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha, \beta)$ são independentes podem ser visualizadas nas Figuras 1 e 2.

4 PRODUTO E RAZÃO DE PARETO E BETA TIPO II.

Nesta sessão são deduzidas, com o auxilio de um lema, as fd e as fdp de $P = XY$ e $R = X/Y$ quando X e Y distribuídas de acordo com (1) e (3).

Lema 2: *(Equação (2.2.6.24), Prudnikov [29]). Se $y, z > 0$ e $\rho + \lambda > \alpha > 0$, então,*

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} (x+y)^{-\rho} (x+z)^{-\lambda} dx = z^{-\lambda} y^{\alpha-\rho} B(\alpha, \rho+\lambda-\alpha) \ {}_2F_1\left(\alpha, \lambda; \rho+\lambda; 1-\frac{y}{z}\right)$$

Teorema 5: *Se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaII(\alpha, \beta)$ são independentes então, a fd de $P = XY$ pode ser escrita como::*

$$F_P(p) = 1 - \frac{B(\alpha+\lambda, \beta)\,\theta^{\lambda}}{B(\alpha, \beta)\,p^{\lambda}} \ {}_2F_1\left(\alpha+\lambda, \lambda; \alpha+\beta+\lambda; 1-\frac{\theta}{p}\right) \tag{16}$$

sendo que $p > 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_P(p) &= P(XY < p) \\ &= \int_0^{\infty} F_X(p/y)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^{\infty} \left[1 - \left(\frac{\theta y}{p+\theta y}\right)^{\lambda}\right] y^{\alpha-1} (1+y)^{-(\alpha+\beta)} dy \\ &= 1 - \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^{\infty} y^{\alpha+\lambda-1} (1+y)^{-(\alpha+\beta)} \left(\frac{p}{\theta}+y\right)^{-\lambda} dy \end{aligned} \tag{17}$$

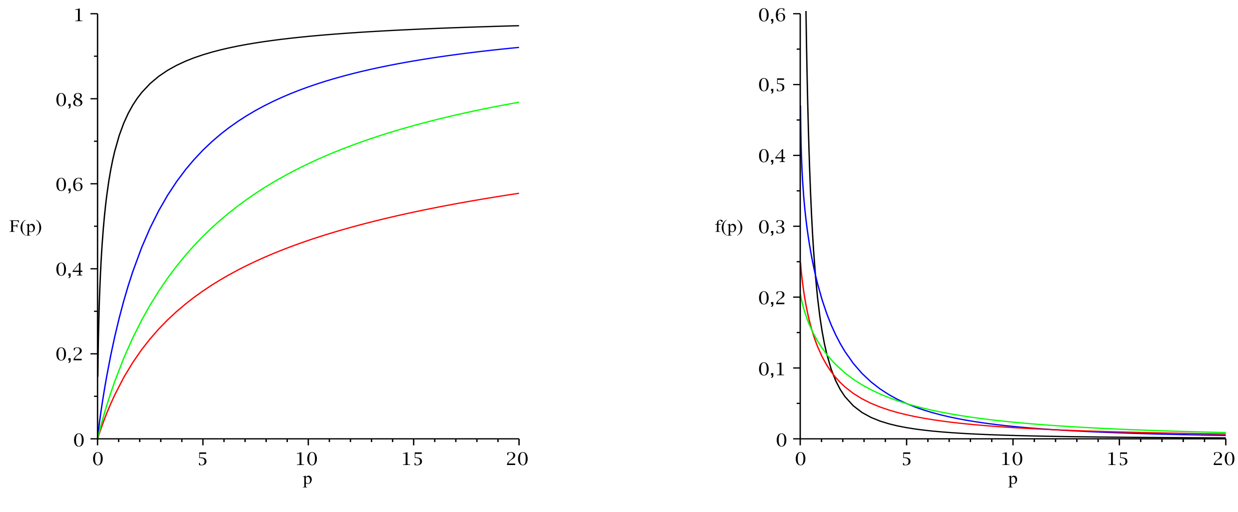

FIGURA 1: Gráficos da fd (6) e de sua fdp (8) para $\alpha = 0,5$, $\beta = 2,0$, $\theta = 3,0$, $\lambda = 1,0$ (preta); $\alpha = 0,9$, $\beta = 0,1$, $\theta = 5,0$, $\lambda = 1,5$ (azul), $\alpha = 7,0$, $\beta = 0,7$, $\theta = 2,9$, $\lambda = 0,4$ (vermelha) e $\alpha = 2,0$, $\beta = 0,9$, $\theta = 11,0$, $\lambda = 1,2$ (verde).

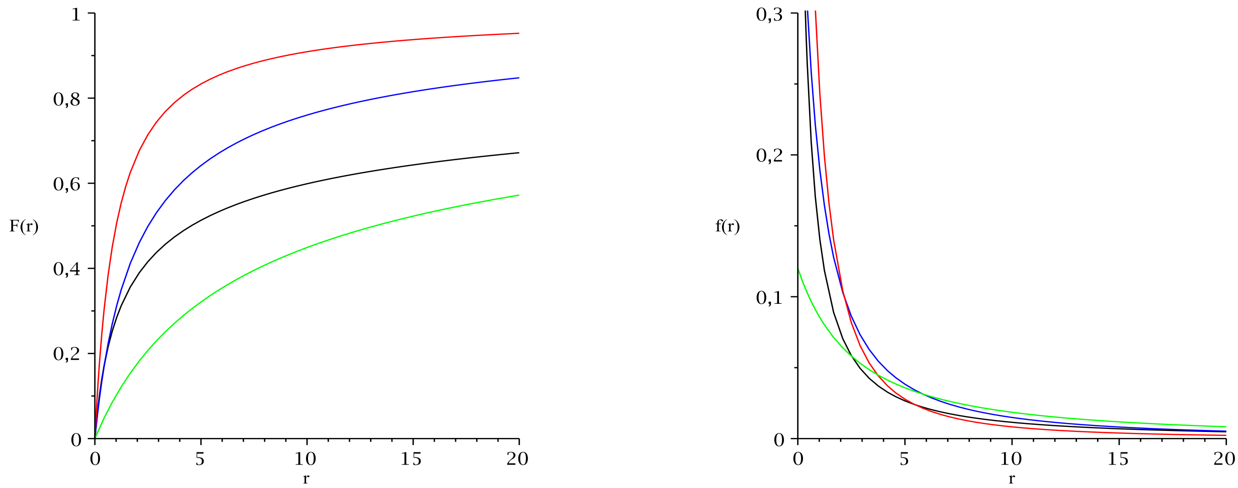

Figura 2: Gráficos da fd de (10) e de sua fdp (12) para $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,7$, $\theta = 0,5$, $\lambda = 1,0$ (preta); $\alpha = 1,0$, $\beta = 1,0$, $\theta = 1,0$, $\lambda = 1,0$ (azul), $\alpha = 1,0$, $\beta = 3,0$, $\theta = 1,0$, $\lambda = 4,0$ (vermelha) e $\alpha = 0,4$, $\beta = 0,1$, $\theta = 4,0$, $\lambda = 0,6$ (verde).

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 2 na integral (17). □

Teorema 6: *Se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaII(\alpha, \beta)$ são independentes, então, a fdp de $P = XY$ pode ser escrita como:*

$$f_P(p) = \frac{B(\alpha+\lambda, \beta+1)\,\lambda\theta^\lambda}{B(\alpha,\beta)\,p^{\lambda+1}}\ {}_2F_1\left(\alpha+\lambda, \lambda+1; \alpha+\beta+\lambda+1; 1-\frac{\theta}{p}\right) \tag{18}$$

sendo que $p > 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} f_P(p) &= \int_0^\infty (1/y)\, f_X(p/y)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{\lambda\theta^\lambda}{B(\alpha,\beta)} \int_0^\infty \left(\frac{p}{y}+\theta\right)^{-(\lambda+1)} y^{\alpha-2}(1+y)^{-(\alpha+\beta)}\, dy \\ &= \frac{\lambda}{\theta B(\alpha,\beta)} \int_0^\infty y^{\alpha+\lambda-1}(1+y)^{-(\alpha+\beta)} \left(\frac{p}{\theta}+y\right)^{-(\lambda+1)} dy. \end{aligned} \tag{19}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 2 na integral (19). □

Teorema 7: *Se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaII(\alpha, \beta)$ são independentes, então, a fd de $R = X/Y$ pode ser escrita como:*

$$F_R(r) = 1 - \frac{B(\alpha, \beta+\lambda)}{B(\alpha,\beta)}\ {}_2F_1\left(\alpha, \lambda; \alpha+\beta+\lambda; 1-\frac{r}{\theta}\right) \tag{20}$$

sendo que $r > 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} F_R(r) &= P(X/Y < r) \\ &= \int_0^\infty F_X(yr)\, f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{1}{B(\alpha,\beta)} \int_0^\infty \left[1 - \frac{\theta^\lambda}{(ry+\theta)^\lambda}\right] y^{\alpha-1}(1+y)^{-(\alpha+\beta)}\, dy \\ &= 1 - \frac{\theta^\lambda r^{-\lambda}}{B(\alpha,\beta)} \int_0^\infty y^{\alpha-1}(1+y)^{-(\alpha+\beta)} \left(\frac{\theta}{r}+y\right)^{-\lambda} dy \end{aligned} \tag{21}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do Lema 2 na integral (21). □

Teorema 8: *Se $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaII(\alpha, \beta)$ são independentes, então, a fdp de $R = X/Y$ pode ser escrita como:*

$$f_R(r) = \frac{\lambda B(\alpha+1, \beta+\lambda)}{\theta B(\alpha, \beta)} \, {}_2F_1\left(\alpha+1, \lambda+1; \alpha+\beta+\lambda+1; 1-\frac{r}{\theta}\right) \tag{22}$$

sendo que $r > 0$.

Demonstração.

$$\begin{aligned} f_R(r) &= \int_0^\infty y f_X(ry) f_Y(y)\, dy \\ &= \frac{\lambda\theta^\lambda}{B(\alpha,\beta)} \int_0^\infty (ry+\theta)^{-(\lambda+1)} y^\alpha (1+y)^{-(\alpha+\beta)}\, dy \\ &= \frac{\lambda\theta^\lambda r^{-(\lambda+1)}}{B(\alpha,\beta)} \int_0^\infty y^\alpha (1+y)^{-(\alpha+\beta)} \left(y+\frac{\theta}{r}\right)^{-(\lambda+1)} dy \end{aligned} \tag{23}$$

A conclusão do teorema decorre da aplicação do lema 1 na integral (13). □

Nas Figuras 3 e 4 são ilustradas as formas das fd e fdp de $P = XY$ e $R = X/Y$ quando $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaII(\alpha, \beta)$ independentes, o efeito dos parâmetros sobre o comportamento das distribuições é evidente.

Da mesma forma como ocorrido na Seção 3, pode-se observar que apesar dos quatro parâmetros, as distribuições deduzidas apresentam pouca flexibilidade.

5 CÁLCULO DOS QUANTIS

Nesta seção, são fornecidas rotinas para o cálculo dos quantis p_γ e r_γ das distribuições de P e R. Esses quantis são computados numericamente resolvendo as equações:

$$F_P(p_\gamma) = \int_0^{p_\gamma} f_P(t)\, dt = \gamma \tag{24}$$

e

$$F_R(r_\gamma) = \int_0^{r_\gamma} f_R(t)\, dt = \gamma \tag{25}$$

em que $0 < \gamma < 1$. Evidentemente, isso envolve o cálculo da função hipergeométrica de Gauss, sendo necessário o uso de recursos computacionais. Dessa forma, foi utilizada a função `hypergeom([·],[·], ·)` do software Maple, ver Adams [1]. As rotinas apresentadas a seguir calculam os quantis p_γ e r_γ para α, β, θ e λ dados, referentes a $\gamma = 0,01; 0,05; 0,1; 0,9; 0,95; 0,99$.

```
# Cálculo dos quantis de P=XY quando Y~Pareto(θ,λ) e X ~BetaI(α,β).
    f1:=Beta(α+λ,β)*θ**λ/(Beta(α,β)*p**λ)
    f2:=1 − f1*hypergeom( [α+λ,λ],[α+β],−θ/p)
     p1:=fsolve(f2=0.01,p)
     p2:=fsolve(f2=0.05,p)
     p3:=fsolve(f2=0.1,p)
     p4:=fsolve(f2=0.9,p)
     p5:=fsolve(f2=0.95,p)
     p6:=fsolve(f2=0.99,p)
    print(p1,p2,p3,p4,p5,p6)

# Cálculo dos quantis de P=X/Y quando Y~Pareto(θ,λ) e X ~BetaI(α,β).
```

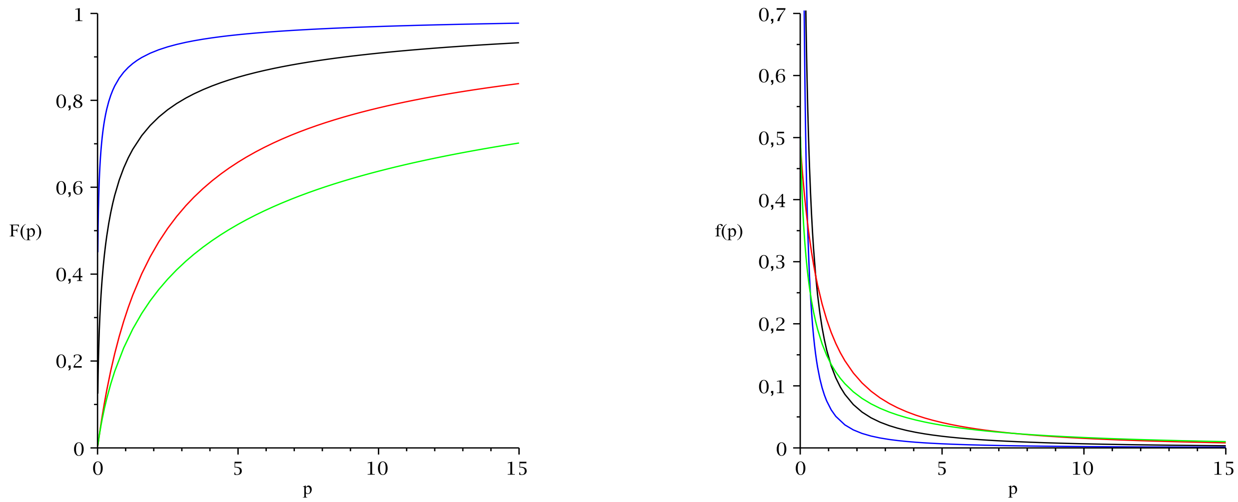

FIGURA 3: Gráficos da fd (16) e de sua fdp (18) para $\alpha = 0,5$, $\beta = 2,0$, $\theta = 3,0$, $\lambda = 1,0$ (preta); $\alpha = 0,2$, $\beta = 0,8$, $\theta = 2,0$, $\lambda = 3,0$ (azul), $\alpha = 7,0$, $\beta = 0,9$, $\theta = 2,9$, $\lambda = 9,5$ (vermelha) e $\alpha = 2,0$, $\beta = 0,9$, $\theta = 2,0$, $\lambda = 1,2$ (verde).

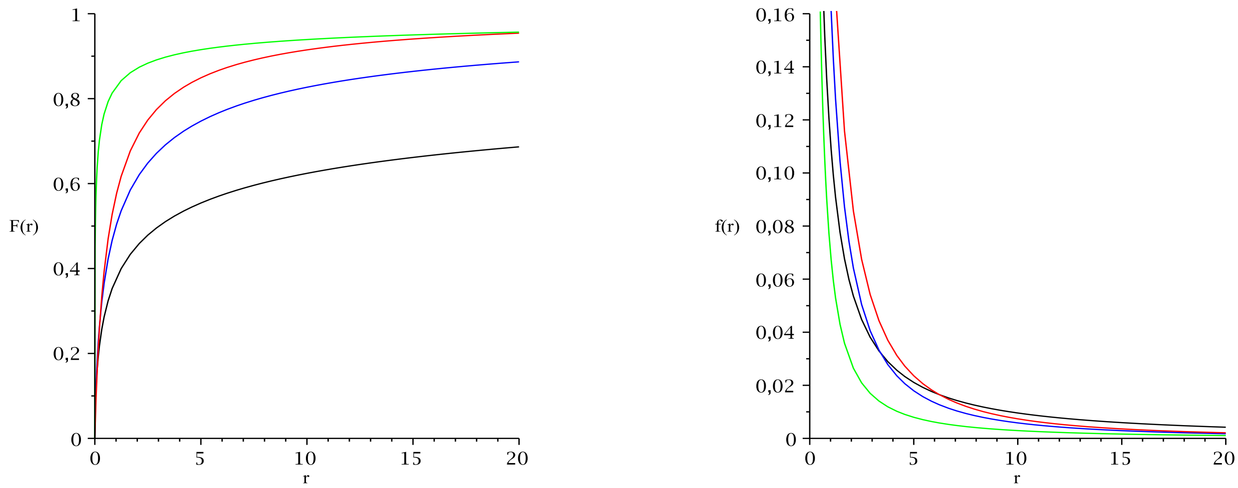

FIGURA 4: Gráficos da fd (20) e de sua fdp (22) para $\alpha = 0,3$, $\beta = 0,7$, $\theta = 0,5$, $\lambda = 1,0$ (preta); $\alpha = 1,0$, $\beta = 1,0$, $\theta = 1,0$, $\lambda = 2,0$ (azul), $\alpha = 1,0$, $\beta = 3,0$, $\theta = 1,0$, $\lambda = 4,0$ (vermelha) e $\alpha = 0,5$, $\beta = 0,2$, $\theta = 3,0$, $\lambda = 7,0$ (verde).

```
f:=1-hypergeom( [α, λ], [α + β], -p/θ)
 p1:=fsolve(f=0.01,p)
 p2:=fsolve(f=0.05,p)
 p3:=fsolve(f=0.1,p)
 p4:=fsolve(f=0.9,p)
 p5:=fsolve(f=0.95,p)
 p6:=fsolve(f=0.99,p)
print(p1,p2,p3,p4,p5,p6)

# Cálculo dos quantis de P=XY quando Y∼Pareto(θ,λ) e X ∼BetaII(α,β).
 f1:=Beta(α + λ, β) * θ * *λ/(Beta(α, β) * p * *λ)
f2:=1 − f1 * hypergeom( [α + λ, λ], [α + β], 1 − θ/p)
 p1:=fsolve(f2=0.01,p)
 p2:=fsolve(f2=0.05,p)
```

```
p3:=fsolve(f2=0.1,p)
p4:=fsolve(f2=0.9,p)
p5:=fsolve(f2=0.95,p)
p6:=fsolve(f2=0.99,p)
print(p1,p2,p3,p4,p5,p6)

# Cálculo dos quantis de P=X/Y quando Y~Pareto(θ,λ) e X ~BetaII(α,β).
f1:=Beta(α,β+λ)/Beta(α,β)
f2:=1-f1*hypergeom([α,λ],[α+β+λ],1-r/θ)
p1:=fsolve(f2=0.01,p)
p2:=fsolve(f2=0.05,p)
p3:=fsolve(f2=0.1,p)
p4:=fsolve(f2=0.9,p)
p5:=fsolve(f2=0.95,p)
p6:=fsolve(f2=0.99,p)
print(p1,p2,p3,p4,p5,p6)
```

Na Tabela 1 são apresentados os quantis da distribuição de $P = XY$ quando $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha, \beta)$ independentes para $\alpha = 1$, $\lambda = 1$ e determinados valores paramétricos β e λ.

Tabela 1. Quantis de $P = XY$ com $X \sim Pareto(\theta, \lambda)$ e $Y \sim BetaI(\alpha, \beta)$.

β	θ	1%	5%	10%	90%	95%	99%
0,5	0,1	0,000275	0,001880	0,004544	0,587381	1,253683	6,586736
	0,4	0,001100	0,007519	0,018178	2,349525	5,014733	26.346942
	1,5	0,004124	0,028196	0,068166	8,810718	18,805248	98,801036
	3,0	0,008249	0,056392	0,136331	17,621435	37,610496	197,602060
1,0	0,1	0,000155	0,001108	0.002766	0,434475	0,933896	4,933445
	0,4	0,000618	0,004431	0,011065	1,737900	3,735586	19,733779
	1,5	0,002317	0,016615	0,041494	6,517127	14,008446	74,001671
	3,0	0,004634	0,033231	0,082989	13,034253	28,016892	148,003344
1,5	0,1	0,000107	0,000781	0,001977	0,344236	0,743542	3,942993
	0,4	0,000428	0,003125	0,007908	1,376944	2,974168	15,771973
	1,5	0,001605	0,011719	0,029656	5,163541	11,153131	59,145190
	3,0	0,003210	0,023438	0,059312	10,327081	22,306258	118,289801
2,0	0,1	0,000082	0,000603	0,001536	0,284834	0,617417	3,283483
	0,4	0,000327	0,002411	0,006143	1,139337	2,469667	13,133934
	1,5	0,001226	0,009040	0,023036	4,272515	9,261252	49,252251
	3,0	0,002453	0,018079	0,046072	8,545029	18,522504	98,504500

AGRADECIMENTOS

Agradecemos aos revisores e ao editor pela leitura e sugestões que contribuíram para o aprimoramento deste artigo.

REFERÊNCIAS

[1] P. Adams, K. Smith e R. Vyborny: *Introduction to mathematics with MAPLE*. Singapore: World Scientific Publishing Company, 2004.

[2] M. M. Ali, M. Pal e J. Woo: *On the ratio of two independent exponentiated Pareto variables*. Austrian J. Stat., 39:329–340, 2010.

[3] A. P. Basu e R. H. Lochner: *On distribution of the ratio of two random variables having generalized life distributions*. Technometrics, 111113:1971, 1971.

[4] R. P. Bhargava e C. G. Khatri: *The distribution of product of independent beta random variables with application to multivariate analysis*. Ann. Inst. Stat. Math, 33:287–296, 1981.

[5] J. T. . A. K. Gupta: *On the distribution of the product of independent beta random variables*. Stat. Probab. Lett., 2:165–168, 1984.

[6] H. L. Harter: *On the distribution of Wald's classification statistic*. Ann. Math Stat., 22:58–67, 1951.

[7] N. L. Johnson, S. Kotz e N. Balakrishnan: *Continuous Univariate Distributions*, vol. 1. New York: John Wiley and Songs, 1994.

[8] N. L. Johnson, S. Kotz e N. Balakrishnan: *Continuous Univariate Distributions*, vol. 2. New York: John Wiley and Songs, 1995.

[9] P. J. Korhonen e S. C. Narula: *The probability distribution of the ratio of the absolute values of two normal variables*. J. Stat. Comput. Simul., 33:173–182, 1989.

[10] H. I. Malik e R. Trudel: *Probability density function of the product and quotient of two correlated exponential random variables*. Can. Math Bull., 29:413–418, 1986.

[11] G. Marsaglia: *Ratios of normal variables and ratios of sums of uniform variables*. J. Am. Stat. Assoc., 60:193–294, 1965.

[12] S. Nadarajah: *On the product and ratio of Laplace and Bessel random variables*. J. Appl. Math, 4:393–402, 2005.

[13] S. Nadarajah: *Sum, product and ratio of Pareto and gamma variables*. J. of Stat. Comp. Simulation, 80:1071–1082, 2010.

[14] S. Nadarajah: *Exact distribution of the product of m gamma and n Pareto random variables*. J. of Comp. and Appl. Mathematics, 235:4496–4512, 2011.

[15] S. Nadarajah e M. M. Ali: *On the product and ratio of t and logistic random variables*. Calcutta Stat. Ass. Bull., 55:1–14, 2004.

[16] S. Nadarajah e M. M. Ali: *Pareto variables for hydrological modeling*. Water Resour Manage, 22:1381–1393, 2008.

[17] S. Nadarajah e A. K. Gupta: *On the product and ratio of Bessel random variables*. Int. J. of Mathematics and Mathematical Sciences, 18:2977–2989, 2005.

[18] S. Nadarajah e S. Kotz: *On the product and ratio of gamma and beta random variables*. Allgemeines Stat. Archiv, 89:435–449, 2005a.

[19] S. Nadarajah e S. Kotz: *On the product and ratio of Pearson Type VII and Laplace random variables*. Austrian J. Stat., 34:11–23, 2005b.

[20] S. Nadarajah e S. Kotz: *On the product and ratio of gamma and Weibull random variables*. Econometric Theory, 22:338–344, 2006a.

[21] S. Nadarajah e S. Kotz: *On the p ratio of gamma and Levy random variables*. Applied Economics Letters, 13:153–157, 2006b.

[22] S. Nadarajah e S. Kotz: *On the product and ratio of t and Bessel random variables.* Bull. Inst. Math Acad. Sinica, 2:55–66, 2007.

[23] S. Nadarajah e S. Kotz: *On the linear combination, product and ratio of normal and Laplace random variables.* J. Franklin Institute, 348:810–822, 2011.

[24] K. Oldham, J. Myland e J. Spanier: *An atlas of functions: with equator, the atlas function calculator.* Canadá: Springer Vergland, 2009.

[25] T. Pham-Gia: *Distributions of the ratios of independent beta variables and applications.* Commun Stat. Theory Methods, 29:2693–2715, 2000.

[26] H. Podolski: *The distribution of a product of n independent random variables with generalized gamma distribution.* Demonstratio Math, 4:119–123, 1972.

[27] S. J. Press: *The t ratio distribution.* J. Am. Stat. Assoc., 64:242–252, 1969.

[28] S. B. Provost: *On the distribution of the ratio of powers of sums of gamma random variables.* Pak. J. Stat., 5:157–174, 1989.

[29] A. P. Prudnikov, Y. A. Brychkov e O. I. Marichev: *Integrals and series*, vol. 1. Amsterdam: Gordon and Breach, 1998.

[30] H. Sakamoto: *On the distributions of the product and the quotient of the independent and uniformly distribibuted random variables.* Tohoku Math J., 49:243–260, 1943.

[31] M. Shakil e B. M. G. Kibria: *Exact distribution of the ratio of gamma and Rayleigh random variables.* Pak. J. Stat. oper. Res., 2:87–98, 2006.

[32] M. Shakil, B. M. G. Kibria e K. C. Chang: *Distributions of the product and ratio of Maxwell and Rayleigh random variables.* Stat. Papers, 49:729–747, 2008.

[33] M. Springer e W. E. Thompson: *The distribution of products of beta, gamma and Gaussian random variables.* SIAM J. Appl. Math., 18:721–737, 1970.

[34] B. M. Steece: *On the exact distribution for the product of two independent Beta-distributed random variables.* Metron, 34:187–190, 1976.

[35] A. Stuart: *Gamma-distributed products of independent random variables.* Biometrika, 49:564–565, 1962.

[36] C. M. Wallgren: *The distribution of the product of two correlated t variables.* J. Am. Stat. Assoc., 75:996–1000, 1980.