HISTÓRIA DO NÚMERO e: GÊNESE E APLICAÇÕES

Juliana Conceição Precioso
UNESP - IBILCE - Departamento de Matemática
precioso@ibilce.unesp.br

Hermes Antonio Pedroso
UNESP - IBILCE - Departamento de Matemática
pedroso@ibilce.unesp.br

RESUMO

O objetivo desse trabalho é apresentar alguns aspectos fundamentais da história do número e, em especial, os relacionados à sua origem, um pouco incerta, e sua presença inevitável nas mais diversas aplicações em vários ramos da ciência. Destacaremos a importância desse número em problemas sobre juros compostos, nos logaritmos de Napier, na quadratura da hipérbole, no problema da catenária e principalmente na exuberante contribuição de Euler ao assunto.

ABSTRACT

The aim of this paper is to present some fundamental aspects of the history of the number e, in particular those related to its origin, a little uncertain, and their unavoidable presence in the most diverse applications in various branches of science. We will highlight the importance of this number in compound interest problems, in the Napier's logarithms, in the quadrature of the hyperbola, in the catenary problem and mostly in the lush Euler's contribution to the subject.

Palavras-chave: O número e, exponencial, logaritmo.

1 INTRODUÇÃO

É difícil abordar a história do número e, cuja aproximação mais usual é 2,7182 sem se referir ao seu parente mais famoso, o número π.

Devido a simplicidade do aparecimento do π, quociente do comprimento pelo diâmetro de uma dada circunferência, sua história se reporta à antiguidade, inclusive com citações bíblicas e de uma forma bem consciente nos trabalhos de Arquimedes (287 a 212 a.C.). O número e por sua vez, só foi reconhecido, praticamente, cem anos após a criação do cálculo diferencial e integral.

Estudos recentes dão conta de que a primeira vez que o número e apareceu na matemática foi no início do século XVII em problemas práticos sobre juros compostos e, assim, iniciaremos exatamente nesse ponto com uma situação típica de acumulação capitalista.

A seguir analisaremos situações em que o e aparece na matemática, especialmente no Cálculo Diferencial e Integral, em conceitos fundamentais para o seu desenvolvimento. Uma das grandes invenções no campo computacional, foram os logaritmos de Napier (1550-1617), e através do cálculo atual, constataremos que o inventor não considerou, a priori, o e como base, mas há a presença de $1/e$ nos estranhos cálculos do matemático escocês. Na quadratura da hipérbole, realizada pelos matemáticos belgas Gregorius de Saint-Vincent

(1584-1667) e Alfonso A. de Sarasa (1618-1667) registra-se uma das primeiras ocasiões em que se fez uso de uma função logarítmica, quando, até então, os logaritmos eram considerados apenas uma ferramenta de cálculo. A grande contribuição ao estudo do *e* foi dada pelos trabalhos de Euler (1707-1783), que preocupado em resolver problemas da época, com seu cálculo formal, definiu importantes funções, que compõe até os dias de hoje programas de algumas disciplinas da graduação. Provou inclusive, a sua irracionalidade, usando frações contínuas.

FIGURA 1: Gregorius de Saint-Vincent

2 O NÚMERO *e* EM QUESTÕES FINANCEIRAS

Desde épocas imemoriais as questões financeiras tem-se encontrado no centro das preocupações humanas. Nem um outro aspecto da vida tem uma característica mais comum do que o impulso para acumular riqueza e conseguir a independência financeira. Assim, não deve supreender a ninguém que algum matemático anônimo, ou talvez um mercador, no início do século XVII, tenha notado uma relação curiosa entre o modo como o dinheiro se acumula e o comportamento de uma certa expressão matemática no infinito.

Central em qualquer consideração sobre o dinheiro, encontra-se o conceito de *juros*, ou valor pago sobre um empréstimo.

Em um tablete de argila da Mesopotâmia, hoje no Louvre, datado de 1700 a.C., encontra-se um exemplo esclarecedor que propõe o seguinte problema:

Quanto tempo levaria uma quantia em dinheiro para dobrar, a 20% ao ano?

A resposta dada, na base 60, $3; 47, 13, 20 = 3 + \frac{47}{60} + \frac{13}{60^2} + \frac{20}{60^3} = 3,7870$, encontra-se próxima do valor correto que é $3,8018$, isto é, cerca de 3 anos e 9 meses e 18 dias.

Ao considerar a fórmula para juros compostos, é provável que o escriba tenha usado interpolação linear entre os valores $(1,2)^3$ e $(1,2)^4$, de uma tabela de potências de $1,2$. Assim, fazendo $C_t = 2C_0$ em $C_t = C_0(1+r)^t$, em que $r = 20$ % e C_0 é a quantia inicial colocada a juros, tem-se $2C_0 = C_0(1,2)^t$, ou seja,

$$2 = (1,2)^t. \tag{1}$$

Vale ressaltar que já eram utilizadas na Mesopotâmia, para resolver questões específicas, tabelas de potências sucessivas de um dado número, semelhantes às atuais de logaritmos que resolvem facilmente a equação (1). É interessante observar também, que o resultado acima abordado não depende do valor inicial colocado a juros.

Explorando um pouco mais a fórmula de capitalização $C_t = C_0(1+r)^t$, suponha um investimento de $C_0 =$ R\$ 100 (o principal) em uma conta que paga 5 % de juros compostos anualmente. No final de um ano o saldo será $100 \times 1,05 =$ R\$ 105. O Banco então considerará esta nova soma como um novo principal que será reinvestido à mesma taxa. No final do segundo ano, o saldo será $105 \times 1,05 =$ R\$ $110,25$, e no final do terceiro ano $110,25 \times 1,05 =$ R\$ $115,76$. Continuando esse processo de composição nota-se que o saldo cresce numa progressão geométrica com razão de $1,05$.

Por outro lado, em uma conta que pague juros simples, a taxa anual é aplicada sobre a soma original, sendo, portanto, a mesma a cada ano. No caso do investimento de R\$ 100 a juros simples, de 5 %, o saldo aumentará a cada ano R\$ 5 resultando numa progressão aritmética de razão 5.

Na comunidade bancária pode-se encontrar todos os tipos de composição de juros, ou seja, anual, semestral, trimestral, semanal e mesmo diário. Suponha que a composição é feita n vezes ao ano. Para cada período de conversão o banco usa a taxa de juros anual dividida por n, que é $\frac{r}{n}$. E como em t anos existem nt períodos de conversão, um principal C_0, após t anos renderá

$$C_t = C_0 \left(1 + \frac{r}{n}\right)^{nt}. \tag{2}$$

Retomando o exemplo acima, de $C_0 =$R\$ 100 e $r = 5$ %, a Tabela 1, fornece um demonstrativo dos resultados de composição em diversos períodos.

Tabela 1

Período de conversão	n	r/n	C_t
Anual	1	$0,05$	$105,00$
Semestral	2	$0,025$	$105,06$
Trimestral	4	$0,0125$	$105,09$
Mensal	12	$0,004166$	$105,12$
Semanal	52	$0,0009615$	$105,12$
Diário	365	$0,0001370$	$105,13$

Para explorar ainda mais essa questão, considera-se um caso especial da equação (2), em que $r = 1, C_0 =$ R\$ 1 e $t = 1$ ano, ou seja, $C_1 = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$.

O objetivo agora é investigar o comportamento desta fórmula para valores crescentes de n. Os resultados são dados na Tabela 2.

Tabela 2

n	$(1+1/n)^n$
1	2
2	$2,25$
3	$2,37037$
4	$2,44141$
5	$2,48832$
10	$2,59374$
50	$2,69159$
100	$2,70481$
1.000	$2,71692$
10.000	$2,71815$
100.000	$2,71827$
$1.000.000$	$2,71828$
$10.000.000$	$2,71828$

Observando a Tabela 2, nota-se que a sequência $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ converge muito lentamente, e que foi preciso fazer $n = 100.000$ para que uma aproximação do e fosse atingida.

A questão que se coloca é se a convergência para o número e de fato se confirma. Uma cuidadosa análise matemática, através de expansão binomial, frações contínuas e séries de potências, mostrou que isso de fato acontece, inclusive noutras questões não relacionadas aos juros compostos.

3 Os logaritmos de Napier

Muitos matemáticos do século XVI confrontaram-se com a possibilidade de relacionar progressões aritméticas e geométricas, principalmente no que diz respeito a facilitar o trabalho com as complicadas tabelas trigonométricas. Uma importante contribuição para esse objetivo foi empreendida por um matemático e proprietário de terras escocês, John Napier (ou Neper) (1550 - 1617), que em 1614 publicou em Edimburgo, a *Merifici logarithmorum canonis descriptio* (uma descrição da maravilhosa regra dos logaritmos).

FIGURA 2: John Napier

Napier tomara conhecimento, lendo um trabalho de Michael Stifel (1486 - 1567), de que em alguns cálculos seria possível substituir multiplicações e divisões por adições e subtrações.

Para tal, usava-se uma tabela de duas colunas (ou duas linhas), que colocava em correspondência os termos de uma progressão geométrica (na verdade potências de um certo número) com os de uma progressão aritmética.

Abaixo temos um exemplo simples de uma tábua de logaritmos:

1	2	4	8	16	32	64	128	256	512	1024	2048	4096
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

Observe que esta "tábua de logaritmos" tem a seguinte estrutura

a^0	a^1	a^2	a^3	a^4	a^5	a^6	a^7	a^8	a^9	a^{10}	a^{11}	a^{12}
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12

sendo, no exemplo, $a = 2$.

Para multiplicar, por exemplo, 16 por 256, procura-se na tabela os números correspondentes na segunda linha, que são 4 e 8. Somando-se 4 e 8 obtemos 12. Localizando 12 na segunda linha, vemos que seu correspondente na primeira linha é 4096. Conclui-se então, que $16 \times 256 = 4096$.

Para dividir 2048 por 128, toma-se os os números correspondentes, 11 e 7 e calcula-se 11-7=4. O número da primeira linha correspondente a 4 é 16. Portanto $2048 \div 128 = 16$.

O sucesso do método provém das conhecidas leis:

$$a^m \times a^n = a^{m+n} \text{ e } a^m \div a^n = a^{m-n}.$$

Assim,

$$16 \times 256 = 2^4 \times 2^8 = 2^{4+8} = 2^{12} = 4096.$$

e

$$2048 \div 128 = 2^{11} \div 2^7 = 2^{11-7} = 2^4 = 16.$$

O inconveniente dessa tábua é que ela nos permite um número restrito de multiplicações e divisões, pois as potências de 2 crescem muito rapidamente.

Napier então pensou em considerar um número bem próximo de 1, cujas potências crescessem lentamente, proporcionando um grande número de produtos e quocientes "instantâneos". Como naquela época, os valores numéricos que os astrônomos mais manipulavam eram valores de senos e cossenos, seria interessante, pensou Napier, uma tábua com grande quantidade de números entre 0 e 1.

Segundo consta, Napier dedicou-se por vinte anos antes da publicação desse sistema que viria facilitar consideravelmente os cálculos com senos na astronomia. Sua definição do logaritmo, termo por ele criado, (*logos* que é razão e *arithmos* que é número) repousa sobre a seguinte base cinemática:

Napier supôs que em uma reta TS, a qual consiste de 10^7 unidades (o raio do círculo no qual os senos eram medidos), um ponto P se move da esquerda para a direita, tal que sua velocidade é igual, em cada ponto, a sua distância de S. Ele supôs ainda, que em uma outra reta, um ponto Q se move com velocidade uniforme igual a de P, quando em T. Se P tem qualquer outra posição particular no curso de seu movimento, digamos P_1, o logaritmo do seno ou do comprimento SP_1 é definido como sendo o comprimento de OQ_1 de O para a posição Q_1 de Q, no tempo em que P está em P_1.

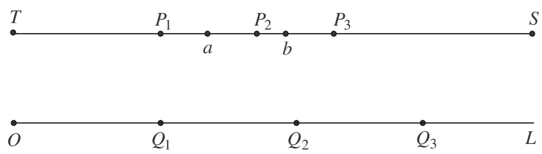

FIGURA 3

Sejam $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, \ldots$ posições de Q, tais que $Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 = \ldots$ e $P_1, P_2, P_3, P_4, \ldots$ as correspondentes posições de P, tais que $P_1P_2, P_2P_3, P_3P_4, \ldots$ são espaços descritos por P em tempos iguais.

Napier então estabeleceu, por meio de uma ilustração especial, que $SP_1 : SP_2 = SP_2 : SP_3 = \ldots$ e, portanto, que correspondendo a uma série de valores de OQ que estão em progressão aritmética, existe uma série de valores de SP que estão em progressão geométrica.

A questão pode ser colocada de forma concisa, a qual representa a essência do raciocínio de Napier.

Considere

$$\frac{P_1S}{P_2S} = \frac{P_2S}{P_3S} \tag{3}$$

e sejam a um ponto arbitrário em P_1P_2 e b o ponto correspondente em P_2P_3, tal que

$$P_1a : aP_2 = P_2b : bP_3. \tag{4}$$

Note que, $P_1P_2 = P_1S - P_2S$ e $P_2P3 = P_2S - P_3S$ e, portanto,

$$\begin{aligned} \frac{P_1P_2}{P_1S} &= \frac{P_1S - P_2S}{P_1S} = 1 - \frac{P_2S}{P_1S} \\ &\text{e} \\ \frac{P_2P_3}{P_2S} &= \frac{P_2S - P_3S}{P_2S} = 1 - \frac{P_3S}{P_2S}. \end{aligned}$$

Então, de (3), tem-se

$$\frac{P_1S}{P_2S} = \frac{P_1P_2}{P_2P_3} = \lambda, \tag{5}$$

em que λ é uma constante.

Por outro lado, uma vez que $P_1a = P_1S - aS$, $aP_2 = aS - P_2S$, $P_2b = P_2S - bS$ e $bP_3 = bS - P_3S$, por (4) segue que

$$\frac{P_1a}{aP_2} = \frac{P_1S - aS}{aS - P_2S} = \frac{P_2b}{bP_3} = \frac{P_2S - bS}{bS - P_3S},$$

donde conclui-se que

$$\begin{aligned} & (P_1S - aS)(bS - P_3S) = (aS - P_2S)(P_2S - bS) \\ \Rightarrow\; & P_1SbS - P_1SP_3S - aSbS + aSP_3S = aSP_2S - aSbS - (P_2S)^2 + P_2SbS \\ \Rightarrow\; & aS(P_2S - P_3S) + bS(P_2S - P_1S) + (P_1SP_3S - (P_2S)^2) = 0 \\ \Rightarrow\; & aSP_2P_3 - bSP_1P_2 = 0 \quad \text{(por (3))} \\ \Rightarrow\; & \frac{aS}{bS} = \frac{P_1P_2}{P_2P_3} = \lambda. \end{aligned} \tag{6}$$

Seja v_x a velocidade do ponto P, quando ele está em x. Por construção, tem-se

$$\frac{v_a}{v_b} = \frac{aS}{bS} = \lambda.$$

Uma vez que $P_1P_2 : P_2P_3 = \lambda$, é plausível assumir, e de fato Napier assumiu, que o ponto a percorre o segmento P_1P_2 no mesmo tempo que b percorre P_2P_3.

Como a velocidade em OL é constante e mostramos que o tempo para percorrer P_1P_2 e P_2P_3 é o mesmo, segue que

$$OQ_2 - OQ_1 = OQ_3 - OQ_2.$$

Seguindo uma prática usada na trigonometria da sua época, Napier dividiu o raio de um círculo unitário em 10^7 partes. A seguir escolheu $q = 1 - 10^{-7}$ ou $0,9999999$ como a razão para construir sua tabela. Desse modo, segundo a Figura 3, Napier considerou $TS = 10^7$ e potências inteiras de q multiplicadas por 10^7, obtendo-se a expressão $N = 10^7\left(1 - \frac{1}{10^7}\right)^L$, em que L é o logaritmo de N.

Por exemplo, $0, 1$ e 2 são, respectivamente, os logaritmos neperianos de 10^7, $9.999.999$ e de $9.999.998,0000001$. O número que tinha logaritmo 100 era aproximadamente $9.999.900$.

3.1 A PRESENÇA DO *e* NOS LOGARITMOS DE NAPIER

Deve-se lembrar que Napier não tinha consciência do conceito de base de um sistema de logaritmos, mas pode-se verificar que os seus dados levam a um sistema de base $\frac{1}{e}$. De fato, com notações atuais, na Figura 4, sejam $PS = x$ e $OQ = y$, em que a velocidade inicial de P é 10^7. Assim, para cada instante t, $TP = 10^7 - x$ e a velocidade de P é $\frac{d}{dt}(10^7 - x) = -\frac{dx}{dt} = x$. Logo, $-\frac{dx}{x} = dt$, ou seja $-\int \frac{dx}{x} = \int dt$, donde conlui-se que $-\ln x = t + c$.

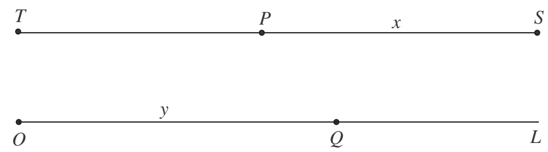

FIGURA 4

Assim, para $t = 0$, $T = P$, $x = 10^7$, $c = -\ln 10^7$, ou seja,

$$-\ln x = t - \ln 10^7. \tag{7}$$

Por outro lado, Q se move uniformemente com velocidade $\dfrac{dy}{dt} = 10^7$ o que implica que $y = 10^7 t + \overline{c}$. Para $t = 0$, tem-se $y = 0$ e assim, $\overline{c} = 0$ e $t = \dfrac{y}{10^7}$.

Em (7), fazendo $t = \dfrac{y}{10^7}$, tem-se

$$-\ln x = \frac{y}{10^7} - \ln 10^7 \Rightarrow \frac{y}{10^7} = -\ln x + \ln 10^7 \Rightarrow \frac{y}{10^7} = \ln \frac{10^7}{x} = \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^7} \Rightarrow y = 10^7 \log_{\frac{1}{e}} \frac{x}{10^7}.$$

Portanto, o logaritmo de Napier, a menos do fator 10^7, é de base $\dfrac{1}{e}$.

3.2 BRIGGS E OS LOGARITMOS DECIMAIS

Henry Briggs (1561 - 1631), professor de geometria em Oxford, foi um dos admiradores mais entusiásticos de Napier, tanto que o visitou na Escócia em 1615. Durante a visita discutiram possíveis modificações no método dos logaritmos e inclusive concordaram em fazer o logaritmo de 1 igual a zero e o logaritmo de 10 igual a 1. Isto significa que se um número positivo N for escrito como $N = 10^L$, então L é o logaritmo "comum" de N, escrito como $\log_{10} N$, ou simplesmente, $\log N$. Assim, nasceu o conceito de base.

FIGURA 5: Henry Briggs

Com a morte de Napier, em 1617, coube a Briggs a tarefa de construir a primeira tabela de logaritmos decimais ou comuns. Iniciando com $\log 10 = 1$, encontrou outros logaritmos tomando raízes quadradas sucessivas (aproximadas).

Uma vez que $\sqrt{10} = 3,1622$, tem-se $\log 3,1622 = \dfrac{1}{2}$; como $\sqrt[4]{10} = \sqrt{3,1622} = 1,7783$, tem-se $\log 1,7783 = \dfrac{1}{4}$. Continuando o processo, Briggs calculou os logaritmos de 1 a 1000, com 14 casas decimais, tendo publicado os resultados nesse mesmo ano.

4 A QUADRATURA DA HIPÉRBOLE E O LOGARITMO COMO FUNÇÃO

No início do século XVII, Fermat $(1601 - 1665)$ e outros matemáticos, usando de procedimentos analíticos, ocupavam-se com o problema de quadraturas (cálculo de áreas). Fermat, por exemplo, determinou a área sob as curvas $y = x^n$, de 0 até $a > 0$ para n inteiro ou fracionário. Em notações atuais, concluiu que $\int_0^a x^n dx = \dfrac{a^{n+1}}{n+1}$. Tais curvas, foram por ele denominadas, parábolas generalizadas.

O resultado de Fermat não inclui o caso da hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$. Coube ao jesuíta belga Saint-Vincent resolver esse caso excepcional.

Em 1647, Saint-Vincent demonstrou pelo método dos infinitésimos de Cavalieri, em seu *Opus Geometricum*, que a área $A(a, b)$ compreendida entre a hipérbole $y = \dfrac{1}{x}$, o eixo dos x e as verticais $x = a$ e $x = b$ (a e b positivos) tem a propriedade de que

$$A(a, b) = A(ta, tb), \tag{8}$$

qualquer que seja $t > 0$.

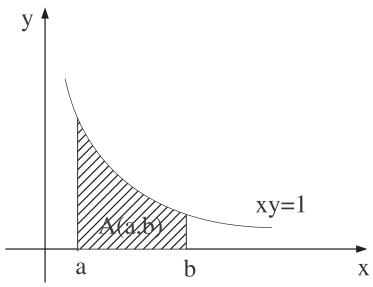

FIGURA 6

Faremos a prova à maneira de somas de Riemann: Para isso considere

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < \cdots < x_n = b,$$

uma partição do intervalo $[a, b]$, em que todos os subintervalos $[x_{i-1}, x_i]$ tem comprimento igual $\dfrac{b-a}{n}$. Então as somas inferior e superior são dadas, respectivamente, pelos somatórios das áreas dos retângulos de base $\dfrac{b-a}{n}$ e alturas $\dfrac{1}{x_i}$ e $\dfrac{1}{x_{i-1}}$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \leq A(a, b) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \tag{9}$$

Analogamente, considera-se a partição

$$ta = tx_0 < tx_1 < \cdots < tx_{i-1} < tx_i < \cdots < tx_n = tb,$$

do intervalo $[ta, tb]$, em que todos os subintervalos $[tx_{i-1}, tx_i]$ tem comprimento igual a $\dfrac{t(b-a)}{n}$. Nesse caso também, as somas inferior e superior são dadas, respectivamente, pelos somatórios das áreas dos retângulos de base $\dfrac{t(b-a)}{n}$ e alturas $\dfrac{1}{tx_i}$ e $\dfrac{1}{tx_{i-1}}$. Portanto,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_i} \leq A(ta, tb) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{nx_{i-1}}. \tag{10}$$

Subtraindo-se, membro a membro, (9) de (10), tem-se

$$0 \leq A(a,b) - A(ta,tb) \leq 0$$

e, portanto, $A(a,b) = A(ta,tb)$.

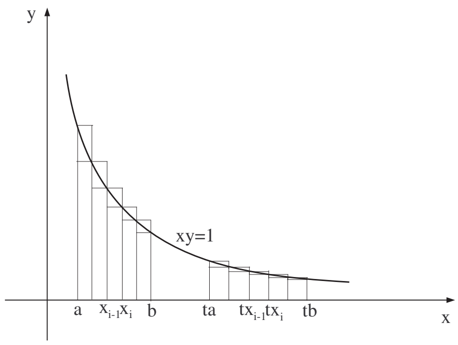

FIGURA 7

Alfonso de Sarasa, um discípulo de Saint-Vincent, observou, numa publicação de 1649, que a propriedade descoberta pelo mestre acarreta a aditividade característica do logaritmo. Então, considerando

$$L(x) = \begin{cases} A(1,x) & \text{se } x \geq 1, \\ -A(x,1) & \text{se } 0 < x < 1, \end{cases}$$

tem-se

$$L(xy) = L(x) + L(y). \tag{11}$$

Para ver isso, no caso $x, y > 1$, observa-se na Figura 8 que

$$\begin{aligned} L(xy) &= A(1,xy) \\ &= A(1,x) + A(x,xy) \\ &= A(1,x) + A(1,y), \quad \text{(ver (8))} \\ &= L(x) + L(y). \end{aligned}$$

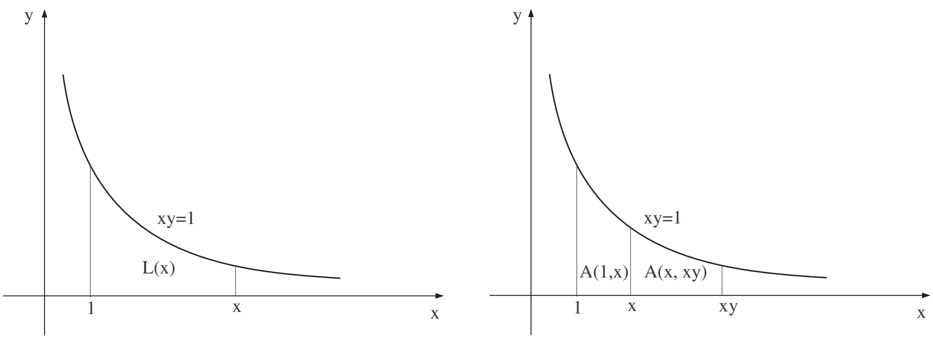

FIGURA 8

A propriedade apresentada anteriormente sugere que se escreva $L(x) = \log x$, porém, sem uma base definida. Esse assunto foi completamente esclarecido somente no século XVIII com os trabalhos de Euler.

Mostraremos agora que a função $L(x)$, na verdade, se comporta como o $\log_e x = \ln x$, em especial, segue abaixo o cálculo de que a sua derivada $L'(x) = \dfrac{1}{x}$:

$$\begin{aligned} L'(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{L(x+h)-L(x)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h} L\left(1+\frac{h}{x}\right), \quad \text{(usando (11))} \\ &= \frac{1}{x}\lim_{h\to 0} \frac{x}{h} L\left(1+\frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0} \frac{1}{k} L(1+k) \quad \left(k=\frac{h}{x}\right) \\ &= \frac{1}{x}\lim_{k\to 0} \frac{L(1+k)-L(1)}{k}, \quad \text{(pois L(1)=0)} \\ &= \frac{L'(1)}{x}. \end{aligned} \tag{12}$$

Resta agora, mostrar que $L'(1) = 1$. De fato,

$$L'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{L(1+h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{A(1,1+h)}{h}.$$

Tem-se pela Figura 9, que

$$\frac{h}{1+h} \le A(1,1+h) \le h,$$

ou seja,

$$\frac{1}{1+h} \le \frac{A(1,1+h)}{h} \le 1,$$

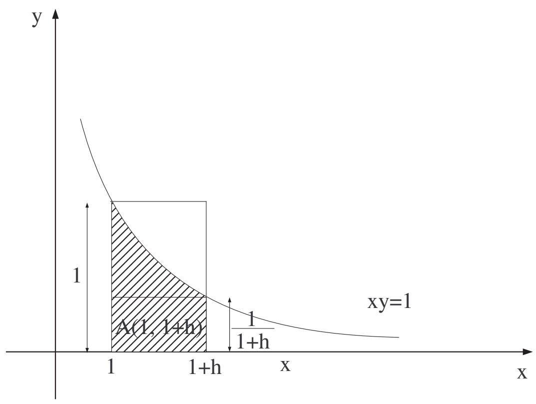

FIGURA 9

Fazendo o limite quando $h \to 0$, conclui-se que $L'(1) = 1$ e, portanto, substituindo em (12), tem-se $L'(x) = \dfrac{1}{x}$.

5 O PROBLEMA DA CATENÁRIA

Como foi dito no início deste trabalho, o número e, ao contrário do π, deve sua existência, praticamente, aos bons resultados conseguidos com os novos métodos e novas técnicas do Cálculo, introduzidos por Isaac Newton (1642 - 1727) e Gottfried W. Leibniz (1646 - 1716).

Muitos problemas de diversas áreas, de mecânica principalmente, foram solucionados no final do século XVII e no decorrer do século XVIII. Isso foi possível, pois as soluções desses problemas dependiam estritamente da resolução de equações diferenciais que, frequentemente, contam com a presença do e como base das exponenciais que constituem as chamadas funções hiperbólicas.

Como ilustração, apresentamos o problema da *catenária*, da palavra latina *catena*, que significa corrente, por ter sido um dos mais difíceis na época e que ocupou a mente de grandes matemáticos.

O problema consiste em determinar a equação da curva descrita por um fio flexível, de densidade uniforme, suspenso entre dois pontos e que se sustenta por seu próprio peso.

Galileu Galilei (1564 - 1642) foi talvez o primeiro a investigar o problema e a lançar a hipótese de que tal curva era uma parábola. Christiaan Huygens (1629 - 1695), mostrou em 1646, com apenas 17 anos, utilizando raciocínios físicos, que tal hipótese não estava correta, embora ainda não tivesse chegado a solução.

Em 1690, em um artigo publicado na *Acta eruditorum* Jakob Bernoulli (1654 - 1705) desafiou publicamente os matemáticos a resolverem o problema. O desafio de Jakob produziu resultados rápidos, pois em 1691 seriam publicadas pela *Acta* três soluções independentes: uma de Huygens, uma de Leibniz e uma do seu irmão mais novo Johann Bernoulli (1667 - 1748).

Apresentamos aqui a solução ao estilo de Johann Bernoulli com notações já bem próximas das utilizadas atualmente.

Considere um sistema de coordenadas xy em que o eixo y passe pelo ponto mais baixo do fio.

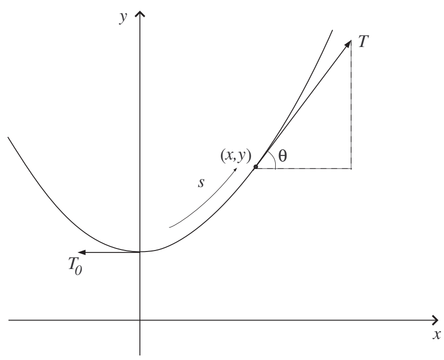

FIGURA 10

Sejam s o comprimento do arco entre esse ponto e um ponto arbitrário (x, y) e ω_0 a densidade linear (peso por unidade de comprimento) do fio. A equação diferencial da catenária é obtida do fato de que a parte da corrente entre o ponto mais baixo e (x, y) está em equilíbrio estático sob a ação de três forças: a tensão T_0 no ponto mais baixo, a tensão variável T em (x, y) que age na direção da tangente, devido a flexibilidade do fio e uma força para baixo $\omega_0 s$ igual ao peso do fio entre esses pontos.

Igualando a componente horizontal de T a T_0 e a componente vertical de T ao peso do fio, obtém-se em módulo $T\cos\theta = T_0$ e $T\sin\theta = \omega_0$ e, portanto, $\tan\theta = \dfrac{\omega_0 s}{T_0}$, ou seja, $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{\omega_0 s}{T_0} = as$, em que $a = \dfrac{\omega_0 s}{T_0}$.

Derivando a equação acima em relação a x e usando o triângulo diferencial de Leibniz, em que $ds^2 = dx^2 + dy^2$, obtém-se

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\frac{ds}{dx} = a\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

e, portanto,

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \tag{13}$$

que é a equação diferencial da catenária.

Para resolver a equação (13) considere primeiramente $p = \dfrac{dy}{dx}$, e assim, $\dfrac{dp}{dx} = a\sqrt{1+p^2}$. Separando as variáveis e integrando, obtem-se

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int a dx.$$

Fazendo a substituição $p = \tan\phi$, obtem-se

$$\ln\left|\sqrt{1+p^2}+p\right| = ax + c_1.$$

Como $p = 0$, quando $x = 0$, tem-se que $c_1 = 0$. Logo $\ln\left(\sqrt{1+p^2}+p\right) = ax$, ou seja,

$$\begin{aligned} &\sqrt{1+p^2}+p = e^{ax} \\ \Rightarrow\quad & 1+p^2 = e^{2ax} - 2e^{ax}p + p^2 \\ \Rightarrow\quad & p = \frac{1-e^{2ax}}{-2e^{ax}} = \frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right) = \sinh(ax). \end{aligned}$$

Uma vez que $p = \dfrac{dy}{dx}$ vem que

$$\begin{aligned} & p = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{2}\left(e^{ax}-e^{-ax}\right) \\ \Rightarrow\quad & y = \frac{1}{2}\int\left(e^{ax}-e^{-ax}\right)dx = \frac{1}{2a}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right) + c_2. \end{aligned}$$

Com uma mudança conveniente do sistema de coordenadas, em que a nova origem encontra-se no nível $y = \dfrac{1}{a}$, quando $x = 0$, conclui-se que $c_2 = 0$ e a equação adquire sua forma final

$$y = \frac{1}{2a}\left(e^{ax}+e^{-ax}\right) = \frac{1}{a}\cosh(ax).$$

6 O *e* NA OBRA DE EULER

Leonhard Euler (1707 - 1783) nasceu em Basel, Suiça, e iniciou seus estudos com a intenção de se tornar ministro religioso, como seu pai. Adquiriu gosto pela matemática e fez dela sua principal ocupação após as aulas que freqüentou como estudante de Johann Bernoulli (1667 - 1748) na universidade local. Passou a maior parte de sua vida nas cortes de São Petersburgo (1727 - 1741 e de 1766 até sua morte) e de Berlim (1741 - 1766).

A produção científica de Euler é extensa e variada, superando a de qualquer outro matemático e distribuindo-se por diversas áreas, tais como, matemática, física, astronomia, engenharia e construção naval.

O mais influente entre os numerosos trabalhos de Euler foi sua *Introcutio in analysin infinitorum*, obra em dois volumes publicada em 1748 e considerada o alicerce da moderna análise matemática. Neste trabalho Euler resumiu suas numerosas descobertas sobre séries infinitas, produtos infinitos e frações contínuas e, pela primeira vez, chamou a atenção para o papel central do número e e da função e^x ao dizer: "Para o número cujo logaritmo é a unidade, anotemos e que é $2,718281\ldots$".

Ao estudar o problema da quadratura da hipérbole, na Seção 4, observa-se o comportamento do logaritmo como função e como consequência, foi definida a função exponencial

FIGURA 11: Leonhard Euler

como a inversa do logaritmo. Com Euler, esse procedimento que era usual até então, foi modificado quando colocou as duas funções em uma base igual, dando-lhes definições independentes:

$$e^x = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n, \quad \ln x = \lim_{n\to\infty} n\left(x^{\frac{1}{n}}-1\right).$$

Euler foi, talvez, o maior representante do chamado formalismo matemático. Muitas vezes brincou com símbolos aparentemente sem sentido, porém, tinha suficiente fé em suas fórmulas para dar sentido ao sem significado.

Sem se preocupar com convergências de séries, manipulava-as com grande intuição e um exemplo bem sucedido é o caso da fórmula

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

O raciocínio de Euler consistiu em considerar os desenvolvimentos em séries de potências de $e^x, \cos x$ e $\sin x$, ou seja,

$$e^x = 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\cdots;\quad \cos x = 1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\cdots;\quad \sin x = x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\frac{x^7}{7!}\cdots. \tag{14}$$

Substituindo x por ix na fórmula do e^x tem-se

$$\begin{aligned} e^{ix} &= 1+ix+\frac{(ix)^2}{2!}+\frac{(ix)^3}{3!}+\cdots \\ &= 1+ix-\frac{x^2}{2!}-\frac{ix^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}-\frac{ix^7}{7!}+\cdots \\ &= \left(1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}+\cdots\right)+i\left(x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}+\cdots\right). \end{aligned}$$

Portanto, pela fórmula (14), tem-se

$$e^{ix} = \cos x + i\sin x.$$

Explorando a fórmula acima Euler chegou a vários resultados importantes:

1. Substituindo ix por $-ix$, obteve a fórmula semelhante

$$e^{-ix} = \cos x - i\sin x.$$

2. Somando-se e subtraindo as expressões obtidas para ix e $-ix$, tem-se

$$\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}.$$

3. Em $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, fazendo $x = \pi$, obteve $e^{\pi i} + 1 = 0$. Esse resultado relaciona cinco constantes importantes da matemática que podem simbolizar quatro grandes ramos da matemática: aritmética, representada pelo 0 e pelo 1; a álgebra representado pelo i; a geometria pelo π e a análise pelo e.

Pode-se destacar ainda algumas curiosidades sobre o e.
$e = 1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\frac{1}{3!}+\cdots$. Esta série foi descoberta por Isaac Newton (1642 - 1727), em 1665, e pode ser obtida da expansão binomial de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$. Por exemplo, a soma dos primeiros 9 termos é $2,718281828$. Euler obteve e com 23 casas decimais $e = 2,71828182845904523536028$.

Por sua expansão de e como fração contínua, Euler pode ter sido o primeiro a inferir que e é irracional. Depois que Joseph Lioville (1809 - 1882) provou a existência de números transcendentes, ver [6], Charles Hermite (1822 - 1901) provou que e é um número transcendente.

REFERÊNCIAS

[1] R. Ayoub: *What is a napierian logarithm ?* American Mathematical Monthly, 100:351–364, 1993.

[2] C. B. Boyer: *História da Matemática.* Edgard Blücher, 2ª ed., 1996.

[3] C. H. Edwards Jr.: *The historical development of the calculus.* Springer-Verlag, 1979.

[4] E. L. Lima: *Logaritmos.* SBM, 1985.

[5] E. Maor: *e: A história de um número.* Editora Record, 2008.

[6] H. A. Pedroso e J. C. Precioso: *Construções euclidianas e o desfecho de problemas famosos da geometria.* Revista Ciências Exatas e Naturais, 13(2):163–183, 2011.

[7] J. C. V. Sampaio: *John Napier, Henry Briggs e a invenção dos logaritmos.* UFSCar, São Carlos, 2009. Disponível em http://www.dm.ufscar.br/~sampaio/logshistoria.PDF.

[8] G. F. Simmons: *Cálculo com geometria analítica, Volumes 1 e 2.* McGraw-Hill, 1987.

[9] G. Ávila: *Introdução à Análise Matemática.* Edgard Blücher, 1993.