

## **PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS ROBÓTICAS DEFINIDAS POR SEGMENTOS DE RETA CONCORDANTES POR POLINOMIAIS**

CARLOS EDUARDO FANTI<sup>1</sup>, WERLEY ROCHERTER BORGES FERREIRA<sup>2</sup>, JOÃO CARLOS MENDES CARVALHO<sup>3</sup>

**RESUMO:** O planejamento de trajetórias robóticas é uma ferramenta importante na indústria para o aumento da produtividade através da redução do tempo no processo, para evitar colisões no ambiente de trabalho e otimizar a capacidade dos atuadores. O presente trabalho refere-se ao estudo das trajetórias robóticas compostas por segmentos lineares com concordâncias por polinomiais, utilizando polinômios de alta ordem para garantir continuidade da aceleração e jerk nos extremos e uma suavidade no trajeto. Na análise é considerada uma condição de “proximidade” da polinomial ao ponto que define a trajetória para estudo de seu comportamento. Os resultados mostram que é possível planejar uma trajetória admitindo a continuidade da aceleração e jerk nos extremos do trajeto. No entanto, novos estudos devem ser realizados para verificar o comportamento do torque nos atuadores.

**PALAVRAS-CHAVE:** Robótica; Trajetórias robóticas; Planejamento de trajetórias; LSPB;

**ABSTRACT:** The planning of robot trajectories is an important tool in the industry to increase productivity by reducing the processing time, avoiding collisions in the environment and optimize the actuators capacity. The present work concerns the study of robotic trajectories composed of linear segments with polynomial blends, using high-order polynomials to ensure continuity of the acceleration and jerk at the extremes and a smooth path. For the analysis a "closeness" condition is considered to the point that defines the path from the polynomial in order to study its behavior. The results show that it is possible to plan a trajectory assuming the continuity of the acceleration and jerk in the extreme of the path. However, further studies should be performed to verify the behavior of the torque on actuators.

**KEYWORDS:** Robotics; Robotic trajectories; Trajectories planning; LSPB

1 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia - MG, CEP 38400-902 – [carlosfanti@hotmail.com](mailto:carlosfanti@hotmail.com)

2 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia - MG, CEP 38400-902 – [wrbferreira@mecanica.ufu.br](mailto:wrbferreira@mecanica.ufu.br)

3 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 1M, Uberlândia - MG, CEP 38400-902 – [jcmendes@mecanica.ufu.br](mailto:jcmendes@mecanica.ufu.br)

## 1. INTRODUÇÃO

Um robô pode ser visto como sendo composto por duas partes: um mecanismo físico composto por segmentos e atuadores, e um sistema de controle. A quantidade de atuadores presente na estrutura robótica depende do número de seus eixos ativos. Por exemplo, um manipulador de cadeia serial com seis graus de liberdade contém seis atuadores.

O movimento relativo a uma tarefa a ser executado pelo robô deve ser representado como um sinal de referência, o qual é enviado ao sistema de controle. O sistema de controle age no sentido de fazer com que o robô acompanhe o sinal de referência ativando o atuador adequado. Se o sinal de referência muda muito rapidamente, o acompanhamento do sinal de referência poderá ser pobre, em vista do projeto do sistema de controle e pelas limitações dinâmicas do sistema. Algoritmos computacionais são projetados para calcular o sinal de referência apropriado baseado na trajetória da tarefa a ser executada e nos limites de tempo relacionados (tais como velocidade e aceleração). Este sinal de referência corresponde à trajetória e pode ser definido como o local de pontos no espaço operacional (espaço da tarefa, relativo ao elemento terminal), ou no espaço das articulações, na qual uma lei temporal é especificada (Sciavicco e Siciliano, 1996).

O percurso que define a trajetória pode ser ponto-a-ponto, isto é, o elemento terminal do robô se movimenta entre dois pontos consecutivos, mas não é fornecido qualquer caminho intermediário. Este tipo de trajeto é útil em operações do tipo “pick-and-place” onde o robô pega o objeto em uma posição e o coloca em outra. O trajeto pode também ser completamente especificado por meio de funções geométricas. Este tipo de trajeto é normalmente utilizado em aplicações de manipulação quando obstáculos estão presentes, ou quando é necessário garantir que o elemento terminal siga uma trajetória específica.

O controle do movimento do robô pode ser dividido em duas partes: o planejamento do movimento e o acompanhamento do sinal. O planejamento do movimento envolve a geração do trajeto e sua lei temporal, fornecendo o sinal de referência ao controlador. O acompanhamento do sinal, como o próprio nome diz, consiste no acompanhamento do sinal de referência.

O planejamento da trajetória é freqüentemente feito “off-line”, tipicamente quando os algoritmos de geração da trajetória são computacionalmente pesados. Entretanto, em geral, é desejável gerar as trajetórias “on-line” de modo que possam ser facilmente executadas mudanças na trajetória do robô, incrementando a robustez e a adaptabilidade de todo o

sistema. Por exemplo, um manipulador pode requerer a habilidade de recalcular sua trajetória “on-line” de forma a evitar um obstáculo inesperado em seu caminho (Bazaz e Tondu, 1998). Em uma estação automatizada com robôs, um grande número de objetivos envolve uma série de tarefas do manipulador em termos de pontos direcionais, pontos de aproximação e pontos de parada. O manipulador deve executar a tarefa gerando caminhos e trajetos para estes pontos e então, seguir estes trajetos utilizando uma lei de controle. O uso de planejador “on-line” reduz o tempo de “setup” e de parada, visto que o tempo necessário para planejar as trajetórias é menor.

Em aplicações industriais é comum o uso de leis de controle do tipo PID, que não levam em conta as não-linearidades do sistema para acompanhar o sinal de referência. Para compensar os erros de acompanhamento introduzidos pelas não-linearidades do sistema, um controlador mais complexo deve ser utilizado (Dahl e Nielson, 1990 e Driedger, 2000). Alternativamente é possível projetar uma trajetória que leva em conta as não-linearidades do sistema e então prover um sinal de referência que pode ser mais facilmente acompanhada pelos controladores industriais mais comuns (Constantinescu, 1998).

Existe a necessidade de algoritmos para geração de trajetórias suaves que possam ser facilmente integráveis nos sistemas industriais existentes, isto é, serem implementados utilizando um controlador típico industrial. Tal algoritmo deveria ser aplicável “on-line”, prever limitações dinâmicas adequadas e permitir a especificação de velocidades em todos os pontos direcionais.

Nos últimos anos a velocidade de operação dos robôs tem crescido e, conseqüentemente, tem aumentado também as acelerações e forças de inércia. Estas forças provocam, inevitavelmente, o surgimento de problemas dinâmicos que devem ser previstos e controlados.

No estudo das trajetórias, considerando ou não restrições cinemáticas, dinâmicas, o problema da flexibilidade, atritos, folgas, contato entre o robô e o ambiente, entre outras, é importante encontrar técnicas que permitam obter soluções ótimas, ou quase ótimas, para estes problemas. No entanto, neste projeto de Iniciação Científica o problema de solução ótima não foi estudado.

### ***Definição de trajetória***

Uma trajetória pode ser definida em termos da posição dos atuadores (especificação no espaço das coordenadas articulares, espaço das coordenadas generalizadas) ou em termos do

local da ferramenta no espaço de trabalho (especificação no espaço da tarefa, espaço das coordenadas operacionais).

A tarefa que um manipulador deve realizar pode ser definida por uma série de pontos por onde o manipulador deve passar (movimento sem restrição entre os pontos). Muitas vezes é necessário especificar o trajeto entre dois pontos de forma a evitar obstáculos presentes no espaço de trabalho, ou para facilitar a tarefa a ser executada. É possível definir o trajeto por pontos, fazendo que estes pontos sejam unidos por polinômios ou por “splines”. As “splines” passam pelo, ou perto dos pontos de modo que o manipulador não necessita parar em cada ponto (Lloyd e Hayward, 1993 e Paul, 1981). O objetivo deste movimento restrito é descrever o trajeto com maior precisão (Shiller et al., 1996).

Como regra geral, os sistemas robóticos devem executar movimentos suaves tanto quanto possíveis, i.e., modificações bruscas de posição, velocidade e aceleração devem ser evitadas.

As alterações bruscas de movimento também podem ocorrer nas colisões do elemento terminal do robô com o objeto a ser manipulado como com o ambiente em que está operando, o que deve ser evitado. Além disso, a modificação brusca do movimento requer grande quantidade de energia, que o atuador pode não suportar.

O ideal seria que o ambiente de trabalho do robô fosse bem planejado, com objetos e máquinas descrevendo trajetórias e operações bem definidas, de forma que todo movimento estivesse sob controle.

Entretanto, na realidade isto não ocorre. Principalmente quando a unidade robótica opera em ambientes não estruturados tais como os robôs de exploração de terrenos e nos casos de presença humana. Para o planejamento de trajetórias em ambientes não estruturados é necessário o uso de técnicas tais como reconhecimento de forma e inteligência artificial.

### ***Planejamento de trajetória no espaço das articulações versus planejamento no espaço da tarefa***

Em operações tais como soldagem, colagem e corte, o trajeto especificado deve ser seguido corretamente. Então, nestes casos, é melhor planejar toda a trajetória no espaço da tarefa do que aproximar o trajeto por interpolações entre os pontos no espaço das articulações. Movimentos planejados no espaço da tarefa também são mais previsíveis isto é, é mais fácil para o usuário dizer se o elemento terminal do manipulador vai tocar em algum obstáculo. Um trajeto no espaço das articulações não é intuitivamente previsível. Além disso, para certas aplicações é necessário manter o elemento terminal com uma orientação constante tais como

no transporte de objetos contendo fluidos. Isto pode ser facilmente especificado no espaço da tarefa, ao passo que no espaço das articulações não se tem esta garantia. Então, a carga computacional adicional para resolver a cinemática inversa, a cada intervalo de controle, é justificável.

O planejamento do trajeto no espaço das articulações não pode ser menosprezado. O movimento é mais rápido quando é realizado por segmentos de reta que unem dois pontos definidos no espaço das articulações (Sahar e Hollerbach, 1986). Então, em ambientes de trabalho onde não existem obstáculos é desejável que o movimento ocorra o mais rápido possível, além do trajeto através de trechos lineares do espaço articular ser a melhor opção para a programação “on-line”. Além disso, movimentos planejados no espaço das articulações atingirão os pontos definidos no espaço das articulações com melhor acuracidade visto que erros devido à solução dos modelos cinemáticos direto e inverso não são introduzidos no sistema. Descrevendo um trajeto com trechos lineares descritos no espaço articular permite um movimento suave e bem comportado do elemento terminal cujo trajeto é invariável com a velocidade do manipulador (Fisher e Mujtaba, 1988). Isto significa que o robô seguirá o mesmo trajeto tanto em alta como em baixa velocidade de operação.

Assim, o usuário pode utilizar movimentos no espaço das articulações para movimentos grosseiros quando o manipulador não está carregando nada e está simplesmente num movimento transitório entre duas tarefas. Em áreas onde existem obstáculos ou quando o manipulador está portando algo, movimentos por segmentos lineares no espaço da tarefa podem ser utilizados para garantir que nenhum obstáculo seja tocado e/ou o objeto transportado não seja danificado.

Movimentos por segmentos lineares são facilmente previsíveis do ponto de vista do usuário, simplificando a tarefa de planejamento. Entretanto, se linhas retas são usadas para unir dois pontos, o manipulador deve parar em cada ponto devido à inabilidade do atuador prever a descontinuidade de velocidade. Então, é comum conectar as linhas retas com curvas que passam perto dos pontos, mas não necessariamente sobre eles (Lloyd e Hayward, 1993 e Paul, 1981). Nos sistemas industriais é utilizada uma concordância no ângulo definido pelas duas linhas retas. Isto é feito tanto no espaço articular como da tarefa. Em qualquer caso é necessário garantir que os limites cinemáticos sejam respeitados durante a parte curva do movimento.

O planejamento no espaço da tarefa possui uma dificuldade adicional que consiste no planejamento da orientação do elemento terminal ao longo da trajetória. A orientação não pode ser tratada como um vetor, sendo que a suavidade dos ângulos que a definem (em geral

os ângulos de Euler) não necessariamente garante um movimento suave do elemento terminal (Fang et al., 1998).

De uma forma geral, os pontos que definem a trajetória são definidos no espaço da tarefa. Assim, os pontos definidos no espaço da tarefa são convertidos em pontos correspondentes no espaço das coordenadas articulares utilizando o modelo cinemático inverso.

### ***Operações do tipo “pick-and-place”***

No tipo de operação “pick-and-place” o manipulador deve se mover de uma posição inicial para uma outra final sendo que o trajeto intermediário não é definido. Em geral, neste tipo de trajetória além do conhecimento dos pontos inicial e final, as velocidades são nulas nestes pontos e a configuração pode ser definida no espaço de coordenadas da tarefa ou em coordenadas articulares. Para o planejamento de coordenadas da tarefa, os pontos são convertidos em coordenadas articulares, onde a trajetória é planejada, de forma a reduzir a complexidade computacional dos algoritmos. Diversos trabalhos com esta aplicação têm sido publicados, considerando a trajetória definida por “splines” cúbicas, função hiperbólica, polinomiais de quinta, sétima e nona ordem (Müller-Karger et al., 2000 e Paul, 1981). Se uma maior quantidade de pontos deve ser definida de forma a evitar obstáculos, a polinomial necessária para unir todos os pontos deve ser de alta ordem cujo perfil é difícil de se prever pois dependem da localização dos pontos.

### ***Múltiplos pontos com caminho pré-definido***

Quando o manipulador deve seguir um trajeto definido, os métodos utilizados para operações do tipo “pick-and-place” não são adequados e não podem ser diretamente aplicados. Isto porque se forem definidos mais do que cinco pontos para obtenção da trajetória, serão envolvidas polinomiais de alta ordem cujo perfil é difícil de controlar e cinco pontos, em geral, não são suficientes para evitar obstáculos.

Neste caso, podem ser utilizadas “splines” cúbicas e de quarta ordem, garantindo a continuidade de posição, velocidade e aceleração nos pontos intermediários e condições de velocidade e aceleração nulas nos pontos extremos.

### ***Limitações cinemáticas nos pontos e entre eles***

Os dois métodos anteriores consideram condições de velocidade e aceleração somente nos pontos que definem a trajetória. Eles não especificam o perfil da velocidade e aceleração entre os pontos. Além disso, em alguns casos, somente a aceleração entre os pontos é

minimizada ou é garantida a continuidade da velocidade ou ainda a aceleração ou “jerk”. Entretanto, é importante que os limites cinemáticos do equipamento sejam respeitados não somente nos pontos de definição da trajetória, mas também entre eles de forma a obter um movimento adequado e reduzir o desgaste dos atuadores (Bazaz e Tondu, 1998; Brock e Kaczmarek, 1996; Cao e Dodds, 1994; Yang e Chou, 1994).

O perfil da curva de posição também é importante. Mudanças bruscas na posição desejada frequentemente ocorrem quando polinomiais de alta ordem são utilizadas e isto é indesejável na maioria das tarefas. Por exemplo, em uma operação de soldagem pode ficar locais sem solda (Castain e Paul, 1984).

O perfil de trajetória normalmente utilizada consiste em segmentos lineares com concordância parabólica (LSPB – “Linear Segments with Parabolic Blends”). Trajetórias LSPB são geralmente utilizadas em manipuladores industriais e máquinas ferramentas por permitir um movimento rápido e também devido à baixa complexidade computacional. Nestas trajetórias, a aceleração sempre está no seu valor máximo, no zero ou no mínimo para permitir o movimento ótimo no tempo, respeitando os limites de velocidade impostos. Entretanto, este tipo de movimento tem “jerk” infinito e, como consequência, não é facilmente traçado, resultando em um movimento mais lento do que o esperado e desvios do trajeto previsto.

Em geral, tanto para operações do tipo “pick-and-place” como para a trajetória contínua, as coordenadas articulares têm que ser obtidas para todos os pontos por que passa o elemento terminal. Isto significa que o modelo cinemático inverso deve ser resolvido para cada ponto, o que pode ser feito utilizando equações previamente obtidas, que é exequível para estruturas simples, ou resolvendo numericamente.

Pela análise das equações cinemáticas, pode-se verificar que na ausência de singularidades o mapeamento do comportamento das coordenadas articulares e operacionais é similar. Isto significa que uma trajetória suave descrita em coordenadas articulares, também será suave em coordenadas operacionais desde que não existam singularidades (Angeles, 1997).

Como o planejamento da trajetória no espaço Cartesiano necessita uma grande capacidade computacional, tornando-o impraticável, o planejamento da trajetória, em geral, é feito no espaço das articulações.

Assim, o procedimento mais exequível pode ser realizado em duas etapas:

- ♦ Planejamento de uma trajetória preliminar no espaço das articulações, não considerando os obstáculos.

- ♦ Verificação visual para analisar a ocorrência de colisões, com o auxílio da computação gráfica 3D, considerando o robô e todo seu entorno.

A disponibilidade de “hardware” e “software” adequados permite a animação do robô em ambientes altamente realísticos.

Este trabalho de Iniciação Científica teve como objetivo estudar modelar e simular o planejamento de trajetórias robóticas considerando trajetórias compostas por segmentos lineares com concordância utilizando polinomiais. Para definir a ordem da polinomial foram consideradas diversas condições de extremo nos pontos inicial e final, para permitir movimentos suaves, bem como analisadas as condições de limite cinemáticos. Inicialmente foi analisada a operação do tipo “pick-and-place” e, posteriormente, a trajetória definida por uma seqüência de pontos.

## **2. PLANEJAMENTO DE TRAJETÓRIAS**

Para o estudo de trajetórias foi escolhido o robô industrial de seis graus de liberdade, instalado no Laboratório de Automação e Robótica da FEMEC/UFU, modelo HP6 da Motoman, Fig.1.

Os movimentos deste robô partindo da base são:  $S$ ,  $L$ ,  $U$ ,  $R$ ,  $B$  e  $T$ , estes movimentos são definidos pelas coordenadas articulares denominadas por  $q_1$ ,  $q_2$ ,  $q_3$ ,  $q_4$ ,  $q_5$  e  $q_6$ , respectivamente.



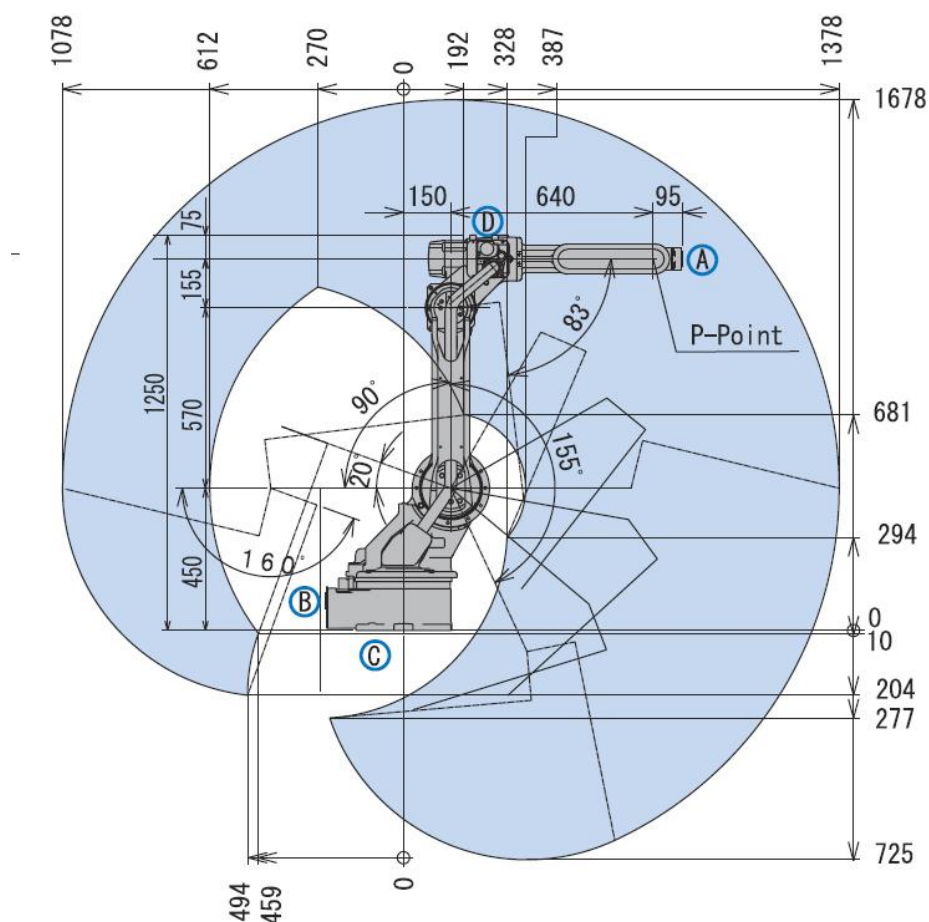


Figura 1: Robô HP6 da Motoman com as cotas e seu espaço de trabalho  
(<http://www.robots.com/motoman.php?robot=hp6>).

## 2.1. “Pick-and-Place”

Em um processo produtivo é muito importante que o robô se movimente o mais rápido possível, mantendo as condições limites de velocidade e aceleração dos atuadores. Em tarefas tais como manipulação de objetos, o importante é que o manipulador saia do ponto inicial e chegue ao ponto final, não importando o trajeto desenvolvido.

Em Carvalho (2008) é apresentado dois tipos de interpolação polinomial entre dois pontos, polinômio de 5ª e 7ª ordem. Para a análise de movimentos, neste trabalho será acrescentado mais um polinômio, o de 9ª ordem.

A ordem do polinômio de interpolação é definida pelas restrições cinemáticas de movimento, se em uma operação houver  $n+1$  restrições cinemáticas, o polinômio de interpolação será de ordem  $n$ . O polinômio na forma paramétrica pode ser definido da seguinte forma:

$$S(\tau) = a\tau^n + b\tau^{n-1} + c\tau^{n-2} + \dots + d\tau^2 + e\tau + f \quad (1)$$

Onde:

$$\tau = \frac{t - t_i}{T} \quad T = t_f - t_i \quad (2)$$

Em que:

$$0 \leq \tau \leq 1 \quad 0 \leq S \leq 1$$

$t$ : tempo;  $t_i$ : tempo em que se inicia a interpolação e  $t_f$ : tempo em que se encerra a interpolação.

Assim a função temporal das articulações pode ser definida como:

$$q_j = q_j^i + (q_j^f - q_j^i)S(\tau) \quad (3)$$

Sendo,  $j$ : índice que define as articulações do robô;  $i$ : índice que representa a articulação na posição inicial e  $f$ : índice que representa a articulação na posição final.

As velocidades, acelerações e jerks das articulações podem ser obtidas pela derivada temporal da Eq. (3), da seguinte forma:

$$\dot{q}_j = \frac{1}{T}(q_j^f - q_j^i)S'(\tau) \quad \ddot{q}_j = \frac{1}{T^2}(q_j^f - q_j^i)S''(\tau) \quad \dddot{q}_j = \frac{1}{T^3}(q_j^f - q_j^i)S'''(\tau) \quad (4)$$

### 2.1.1. Polinômio de Interpolação Tipo 3-4-5

Para obter esta polinomial devem-se considerar seis restrições cinemáticas: posição inicial e final do movimento, velocidade e aceleração nulas no início e fim do trajeto.

$$S(\tau) = a\tau^5 + b\tau^4 + c\tau^3 + d\tau^2 + e\tau + f \quad (5)$$

$$S'(\tau) = 5a\tau^4 + 4b\tau^3 + 3c\tau^2 + 2d\tau \quad (6)$$

$$S''(\tau) = 20a\tau^3 + 12b\tau^2 + 6c\tau + 2d \quad (7)$$

$$q^j(0) = q_i \rightarrow S(0) = 0 \quad \dot{q}^j(0) = 0 \rightarrow S'(0) = 0 \quad \ddot{q}^j(0) = 0 \rightarrow S''(0) = 0 \quad (8)$$

$$q^j(1) = q_f \rightarrow S(1) = 1 \quad \dot{q}^j(1) = 0 \rightarrow S'(1) = 0 \quad \ddot{q}^j(1) = 0 \rightarrow S''(1) = 0 \quad (9)$$

Introduzindo as relações anteriores nas Eqs. (5), (6) e (7) e fazendo-se as devidas simplificações, o polinômio de interpolação e suas respectivas derivadas para se encontrar velocidade, aceleração e jerk ficam definidos como:

$$S(\tau) = 6\tau^5 - 15\tau^4 + 10\tau^3 \quad S'(\tau) = 30\tau^4 - 60\tau^3 + 30\tau^2 \quad (10)$$

$$S''(\tau) = 120\tau^3 - 180\tau^2 + 60\tau \quad S'''(\tau) = 360\tau^2 - 360\tau + 60 \quad (11)$$

A obtenção dos pontos de máximo das derivadas é importante para determinar a velocidade e aceleração máxima que a articulação pode atingir. Isso é necessário para que não se ultrapasse os valores permitidos de cada articulação. Então:

$$S''_{\max} = \frac{15}{8} = 1,875 \quad S'_{\max} = \frac{10\sqrt{3}}{3} = 5,7735 \quad S'''_{\max} = 60$$

Apesar da polinomial de quinta ordem garantir velocidade e aceleração nulas nos extremos, ela não garante continuidade do jerk nas extremidades. Neste caso, não se pode garantir um movimento suave no início e final do movimento, conforme pode ser observado na Fig.2.

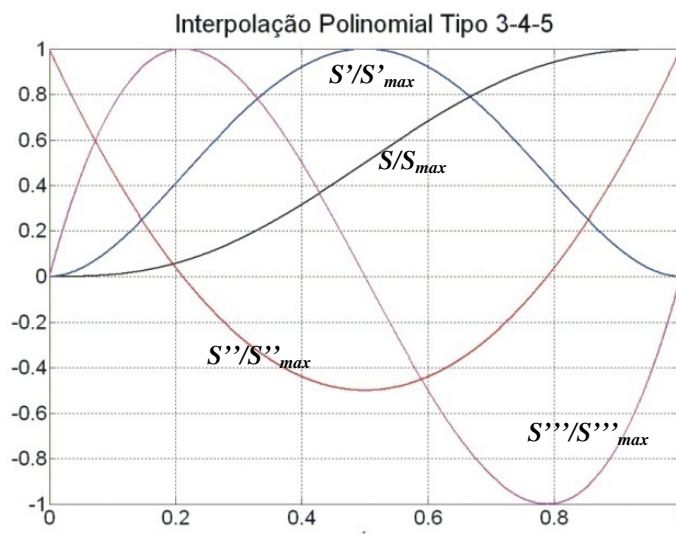


Figura 2: Interpolação polinomial tipo 3-4-5 e suas derivadas.

### 2.1.2. Polinômio de interpolação tipo 4-5-6-7

Para obter esta polinomial devem ser consideradas oito condições de contorno: posição inicial e final do movimento, velocidade, aceleração e jerk nulos no início e fim do trajeto.

$$S(\tau) = a\tau^7 + b\tau^6 + c\tau^5 + d\tau^4 + e\tau^3 + f\tau^2 + g\tau + h \quad (12)$$

$$S'(\tau) = 7a\tau^6 + 6b\tau^5 + 5c\tau^4 + 4d\tau^3 + 3e\tau^2 + 2f\tau + g \quad (13)$$

$$S''(\tau) = 42a\tau^5 + 30b\tau^4 + 20c\tau^3 + 12d\tau^2 + 6e\tau + 2f \quad (14)$$

$$S'''(\tau) = 210a\tau^4 + 120b\tau^3 + 60c\tau^2 + 24d\tau + 6e \quad (15)$$

$$q^j(0) = q_i \rightarrow S(0) = 0 \quad \dot{q}^j(0) = 0 \rightarrow S'(0) = 0 \quad (16)$$

$$\ddot{q}^j(0) = 0 \rightarrow S''(0) = 0 \quad \ddot{q}^j(0) = q_i \rightarrow S'''(0) = 0 \quad (17)$$

$$q^j(1) = q_f \rightarrow S(1) = 1 \quad \dot{q}^j(1) = 0 \rightarrow S'(1) = 0 \quad (18)$$

$$\ddot{q}^j(1) = 0 \rightarrow S''(1) = 0 \quad \ddot{q}^j(1) = 0 \rightarrow S'''(1) = 0 \quad (19)$$

De forma semelhante ao caso anterior, utilizando-se as Eqs. (12), (13), (14) e (15) pode-se obter o polinômio de interpolação e suas respectivas derivadas para se encontrar velocidade, aceleração e jerk ficam definidos como:

$$S(\tau) = -20\tau^7 + 70\tau^6 - 84\tau^5 + 35\tau^4 \quad S'(\tau) = -140\tau^6 + 420\tau^5 - 420\tau^4 + 140\tau^3 \quad (20)$$

$$S''(\tau) = -840\tau^5 + 2100\tau^4 - 1680\tau^3 + 420\tau^2 \quad S'''(\tau) = -4200\tau^4 + 8400\tau^3 - 5040\tau^2 + 840\tau \quad (21)$$

A polinomial de sétima ordem garante jerk nulo nas extremidades do movimento, porém não garante sua continuidade. Conforme pode ser verificado na Fig. 3, com o jerk nulo nas extremidades o movimento se torna mais suave, porém as velocidades e acelerações tendem a serem maiores que a interpolação polinomial de quinta ordem.

Os pontos de máxima amplitude são definidos como:

$$S''_{\max} = \frac{35}{16} = 2,1875 \quad S''_{\max} = \frac{84\sqrt{5}}{25} = 7,5132 \quad S'''_{\max} = \frac{-105}{2} = -52,5$$

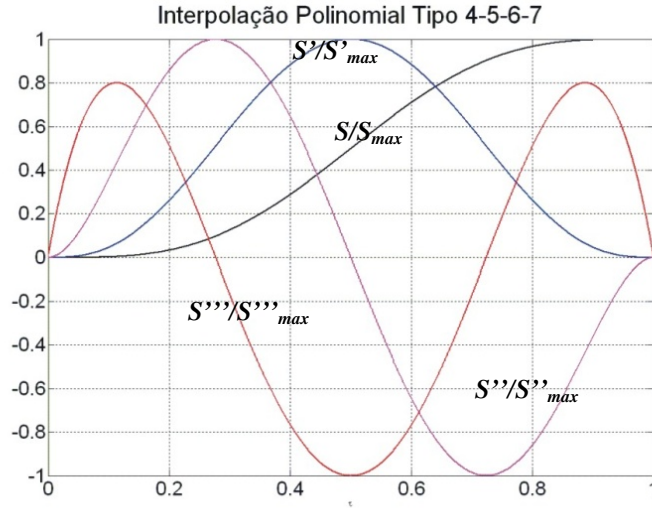


Figura 3: Interpolação polinomial tipo 4-5-6-7 e suas derivadas.

### 2.1.3. Polinômio de interpolação de nona ordem (9-8-7-6-5)

De forma a garantir a continuidade do jerk nos extremos, obtendo um movimento mais suave, devem-se considerar dez condições de contorno: posição inicial e final do movimento, velocidade, aceleração e jerk nulos no início e fim do trajeto. Além da continuidade do Jerk nos extremos.

$$S(\tau) = a\tau^9 + b\tau^8 + c\tau^7 + d\tau^6 + e\tau^5 + f\tau^4 + g\tau^3 + h\tau^2 + k\tau + m \quad (22)$$

$$S'(\tau) = 9a\tau^8 + 8b\tau^7 + 7c\tau^6 + 6d\tau^5 + 5e\tau^4 + 4f\tau^3 + 3g\tau^2 + 2h\tau + k \quad (23)$$

$$S''(\tau) = 72a\tau^7 + 56b\tau^6 + 42c\tau^5 + 30d\tau^4 + 20e\tau^3 + 12f\tau^2 + 6g\tau + 2h \quad (24)$$

$$S'''(\tau) = 504a\tau^6 + 336b\tau^5 + 210c\tau^4 + 120d\tau^3 + 60e\tau^2 + 24f\tau + 6g \quad (25)$$

$$S^{(4)}(\tau) = 3024a\tau^5 + 1680b\tau^4 + 840c\tau^3 + 360d\tau^2 + 120e\tau + 24f \quad (26)$$

$$q^j(0) = q_i \rightarrow S(0) = 0 \quad \dot{q}^j(0) = 0 \rightarrow \dot{S}(0) = 0 \quad \ddot{q}^j(0) = 0 \rightarrow \ddot{S}(0) = 0 \quad (27)$$

$$\ddot{q}^j(0) = q_i \rightarrow S'''(0) = 0 \quad q^{(4)j}(0) = q_i \rightarrow S^{(4)}(0) = 0 \quad (28)$$

$$q^j(1) = q_f \rightarrow S(1) = 1 \quad \dot{q}^j(1) = 0 \rightarrow \dot{S}(1) = 0 \quad \ddot{q}^j(1) = 0 \rightarrow \ddot{S}(1) = 0 \quad (29)$$

$$\ddot{q}^j(1) = q_f \rightarrow S'''(1) = 0 \quad q^{(4)j}(1) = q_f \rightarrow S^{(4)}(1) = 0 \quad (30)$$

Assim o polinômio de interpolação e suas respectivas derivadas para se encontrar velocidade, aceleração e jerk, Fig.4, ficam definidos como:

$$S(\tau) = 68\tau^9 - 307\tau^8 + 528\tau^7 - 412\tau^6 + 124\tau^5 \quad (31)$$

$$S'(\tau) = 612\tau^8 - 2456\tau^7 + 3693\tau^6 - 2472\tau^5 + 620\tau^4 \quad (32)$$

$$S''(\tau) = 4896\tau^7 - 17192\tau^6 + 22158\tau^5 - 12360\tau^4 + 2480\tau^3 \quad (33)$$

$$S'''(\tau) = 4896\tau^7 - 17192\tau^6 + 22158\tau^5 - 12360\tau^4 + 2480\tau^3 \quad (34)$$

A polinomial de nona ordem garante a continuidade do jerk nos extremos. Fisicamente, isso garante um movimento ainda mais suave que o gerado por uma polinomial de sétima ordem. Entretanto, para alguns trechos, o movimento possui maiores velocidades e acelerações que o de sétima ordem, Fig.4.

Seus pontos extremos são:

$$S''_{\max} = 2,4532$$

$$S''_{\max} = 9,3128$$

$$S'''_{\max} = -78,0073$$

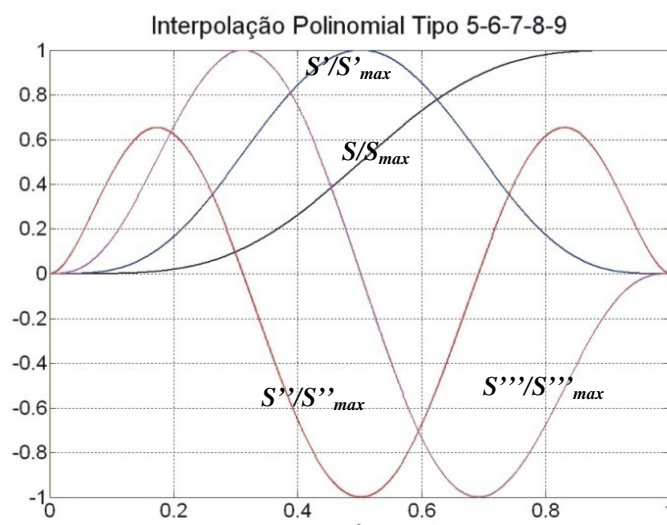


Figura 4: Interpolação polinomial tipo 5-6-7-8-9 e suas derivadas.

## 2.2. Simulação Matemática para “Pick-and-Place”

A simulação matemática de movimentos consiste em: dados dois pontos, o elemento terminal deverá sair do ponto inicial e atingir o final realizando a operação “pick-and-place” para as polinomiais de quinta, sétima e nona ordem.

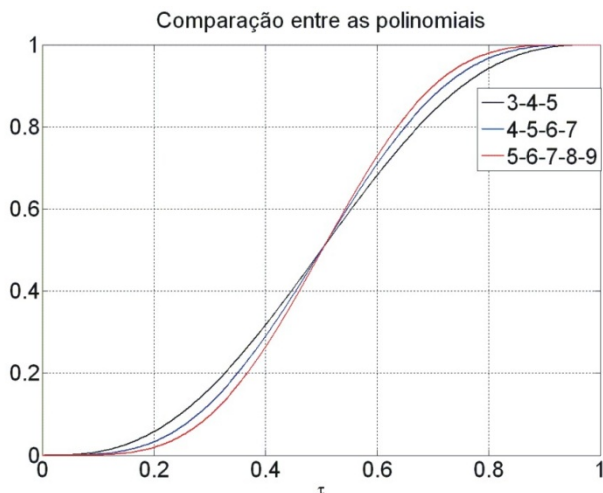


Figura 5: Polinômios parametrizados para comparação de trajetória.

Como mostrado na Figura 5, o comportamento das diferentes interpolações polinomiais são parecidos. Sendo assim, o comportamento da trajetória descrita pelas articulações tende a ser muito parecidas. Como exemplo, as Figs. 6, 7, 8 e 9 mostram o trajeto do elemento terminal partindo de  $P_1(430,400,100)$  até  $P_2(620,750,820)$  para a polinomial de quinta ordem.

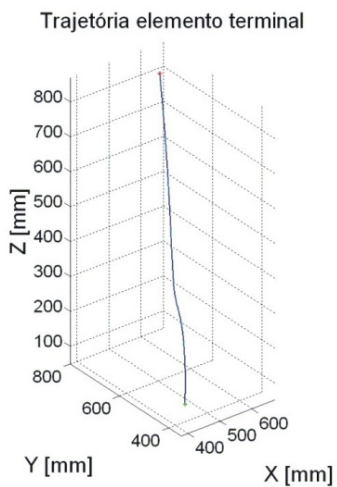


Figura 6: Movimento tridimensional.

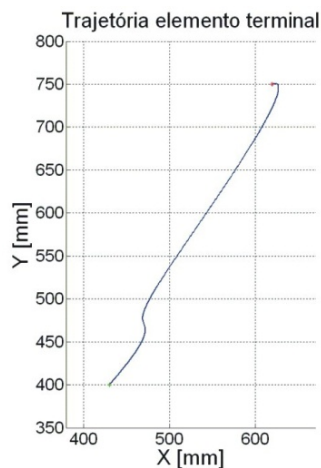


Figura 7: Movimento no plano XY.

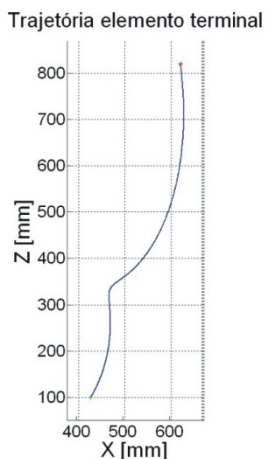


Figura 8: Movimento no plano XZ.

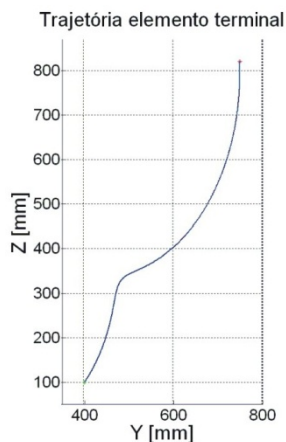


Figura 9: Movimento no plano YZ.

A distância percorrida pelo elemento terminal de  $P_1$  à  $P_2$  foi calculada para os polinômios de interpolação obtendo 881.2582, 881.2580 e 881.2577 mm respectivamente para os polinômios de quinta, sétima e nona ordem. A consideração de tantas casas decimais não faz sentido para o trajeto deste robô, assim sendo as distâncias seriam praticamente as mesmas.

### 3. TRAJETÓRIA DEFINIDA POR SEGMENTOS RETOS CONCORDANTES POR POLINOMIAIS

Em alguns casos é necessário definir uma trajetória suave para um robô a partir de três pontos que definem duas retas concorrentes. Seguir a trajetória original não é viável, pois para isso devem-se utilizar métodos que necessitam de paradas para seguir cada trecho. Estas paradas para mudar a direção do movimento causam perda da produtividade do processo, visto que a velocidade do robô tem que ser nula a cada ponto de interseção dos segmentos retos.

Em muitas aplicações a trajetória necessária não precisa passar pelo ponto de interseção dos dois segmentos de retas, assim uma concordância polinomial entre as duas retas é suficiente para manter uma boa produtividade.

Em princípio, quanto mais próximo a curva passar pelo ponto de interseção, melhor será a trajetória descrita para a realização da operação pelo robô. Assim, para se obter uma trajetória suave com uma condição de proximidade são necessárias pelo menos nove condições de contorno: posição, velocidade, aceleração e jerk no início e fim da concordância com os segmentos de retas além de uma condição de proximidade  $d$  (distância entre  $P_2$  e  $P_4$ ), Fig.10.

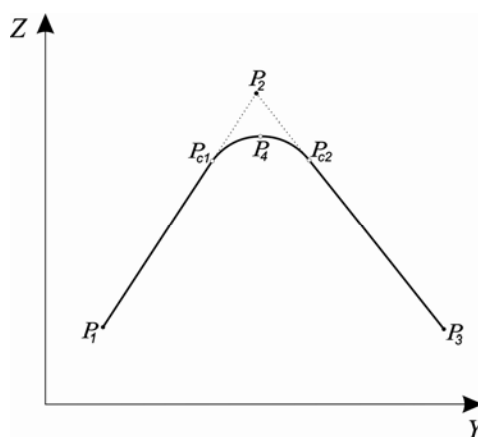


Figura 10: Trajetória definida por segmentos de retas concordantes por polinomial.



Para maior simplicidade, as trajetórias definidas serão trabalhadas somente em um plano.

### 3.1. Condição de proximidade definida sobre a bissetriz

Nesta análise o ponto  $P_4$  que define a condição de proximidade  $d$  é definido sobre a bissetriz do ângulo formado pelos segmentos. Assim, o polinômio de concordância terá a forma:

$$z(y) = ay^8 + by^7 + cy^6 + dy^5 + ey^4 + fy^3 + gy^2 + hy + k \quad (35)$$

Segundo Angeles (1997), se a trajetória a ser seguida no espaço da tarefa é suave, a trajetória no espaço das articulações também será suave (desde que os problemas de singularidades sejam resolvidos). Portanto, para garantir a suavidade de movimento em todo trajeto, será considerada até a derivada terceira da trajetória, que no espaço das articulações em relação ao tempo é o jerk.

$$z(y)' = 8ay^7 + 7by^6 + 6cy^5 + 5dy^4 + 4ey^3 + 3fy^2 + 2gy + h \quad (36)$$

$$z(y)'' = 56ay^6 + 42by^5 + 30cy^4 + 20dy^3 + 12ey^2 + 6fy + 2g \quad (37)$$

$$z(y)''' = 336ay^5 + 210by^4 + 120cy^3 + 60dy^2 + 24ey + 6f \quad (38)$$

A condição de proximidade é determinada sobre a bissetriz formada pelos dois segmentos de retas. Dessa forma, é possível obter um ponto  $P_4$  sobre a bissetriz que possui uma distância  $d$  (condição de proximidade) do ponto  $P_2$ . O ponto  $P_4$  é uma condição de contorno do polinômio de nona ordem. A equação da bissetriz possui a forma:

$$z(y) = a_B y + b_B \quad (39)$$

Da geometria analítica é possível obter os coeficientes da bissetriz da seguinte forma:

$$\vec{r}_1 = P_2 - P_1 \quad \vec{r}_2 = P_3 - P_2 \quad (40)$$

$$\beta = \frac{1}{2} \cos^{-1} \frac{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2}{|\vec{r}_1| |\vec{r}_2|} \quad \alpha = \tan^{-1} \frac{P_{3z} - P_{2z}}{P_{3y} - P_{2y}} - \beta \quad (41)$$

Então, os coeficientes da equação podem ser obtidos por:

$$a_B = \tan \alpha \quad ; \quad b_B = P_{2z} - a_B P_{2y} \quad (42)$$

Com a equação da bisettriz conhecida pode-se calcular a condição de proximidade:

$$(P_{4z} - P_{2z})^2 + (P_{4y} - P_{2y})^2 = d^2 \quad (43)$$

Onde:  $P_{4z}$  é a coordenada Z do ponto  $P_4$ ;  $P_{4y}$  a coordenada Y do ponto  $P_4$  e  $d$  a distância desejada entre  $P_2$  e  $P_4$ .

Assim, resolvendo o sistema de equações formado pela Eq.24 e Eq.31, as coordenadas de  $P_4$  são encontradas. Com  $P_4$ , pontos de concordância ( $P_{c1}$  e  $P_{c2}$ ), velocidades nos pontos de concordância ( $v_1$  e  $v_2$ ), aceleração e jerk nulos nas concordâncias definidas, é possível obter os coeficientes do polinômio de oitava ordem a partir do sistema de equações obtido pela substituição das condições de contornos nas Eqs. (35) a (38).

$$\left\{ \begin{array}{l} a.P_{c1y}^8 + b.P_{c1y}^7 + c.P_{c1y}^6 + d.P_{c1y}^5 + e.P_{c1y}^4 + f.P_{c1y}^3 + g.P_{c1y}^2 + h.P_{c1y} + k = P_{c1z} \\ a.P_{c2y}^8 + b.P_{c2y}^7 + c.P_{c2y}^6 + d.P_{c2y}^5 + e.P_{c2y}^4 + f.P_{c2y}^3 + g.P_{c2y}^2 + h.P_{c2y} + k = P_{c2z} \\ a.P_{4y}^8 + b.P_{4y}^7 + c.P_{4y}^6 + d.P_{4y}^5 + e.P_{4y}^4 + f.P_{4y}^3 + g.P_{4y}^2 + h.P_{4y} + k = P_{4z} \\ 8a.P_{c1y}^7 + 7b.P_{c1y}^6 + 6c.P_{c1y}^5 + 5d.P_{c1y}^4 + 4e.P_{c1y}^3 + 3f.P_{c1y}^2 + 2g.P_{c1y} + h = v_1 \\ 8a.P_{c2y}^7 + 7b.P_{c2y}^6 + 6c.P_{c2y}^5 + 5d.P_{c2y}^4 + 4e.P_{c2y}^3 + 3f.P_{c2y}^2 + 2g.P_{c2y} + h = v_2 \\ 56a.P_{c1y}^6 + 42b.P_{c1y}^5 + 30c.P_{c1y}^4 + 20d.P_{c1y}^3 + 12e.P_{c1y}^2 + 6f.P_{c1y} + 2g = 0 \\ 56a.P_{c2y}^6 + 42b.P_{c2y}^5 + 30c.P_{c2y}^4 + 20d.P_{c2y}^3 + 12e.P_{c2y}^2 + 6f.P_{c2y} + 2g = 0 \\ 336a.P_{c1y}^5 + 210b.P_{c1y}^4 + 120c.P_{c1y}^3 + 60d.P_{c1y}^2 + 24e.P_{c1y} + 6f = 0 \\ 336a.P_{c2y}^5 + 210b.P_{c2y}^4 + 120c.P_{c2y}^3 + 60d.P_{c2y}^2 + 24e.P_{c2y} + 6f = 0 \end{array} \right.$$

### 3.1.1. Simulação Numérica

Com o polinômio de interpolação já determinado, a trajetória do robô para os segmentos de retas concordantes pela polinomial foi simulada.

#### a) Polinômio de Concordância de Sétima Ordem

Para a concordância polinomial sem condição de proximidade são necessárias oito condições de contorno para que o movimento seja suave: pontos de concordância ( $P_{c1}$  e  $P_{c2}$ ), velocidades ( $v_1$  e  $v_2$ ), aceleração e jerk nulos nas concordâncias.

A Figura 11 mostra a trajetória seguida pelo elemento terminal do robô definida por  $P_1(0,420,425)$ ,  $P_2(0,600,1000)$  e  $P_3(0,800,630)$  sem a condição de proximidade. A distância da curva à  $P_2$  é de 75,1 mm.

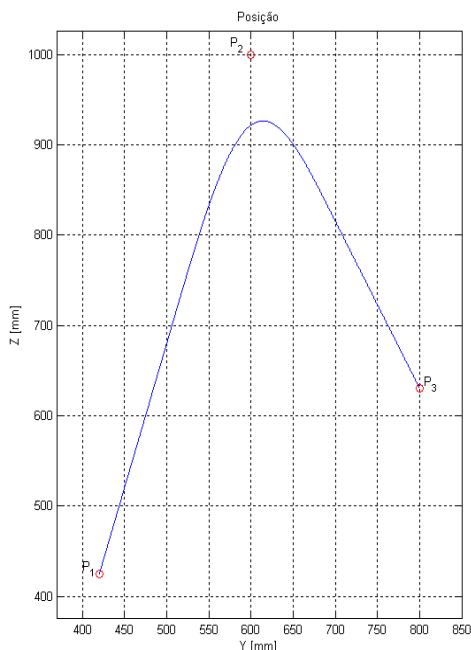


Figura 11: Trajetória definida por segmentos de retas concordantes por uma polinomial de sétima ordem.

Para seguir este trajeto no plano é necessário somente o movimento de três articulações do robô:  $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_5$ . Assim suas acelerações angulares em graus/s<sup>2</sup> ao longo do tempo são mostradas nas Figs. 12, 13 e 14, respectivamente.

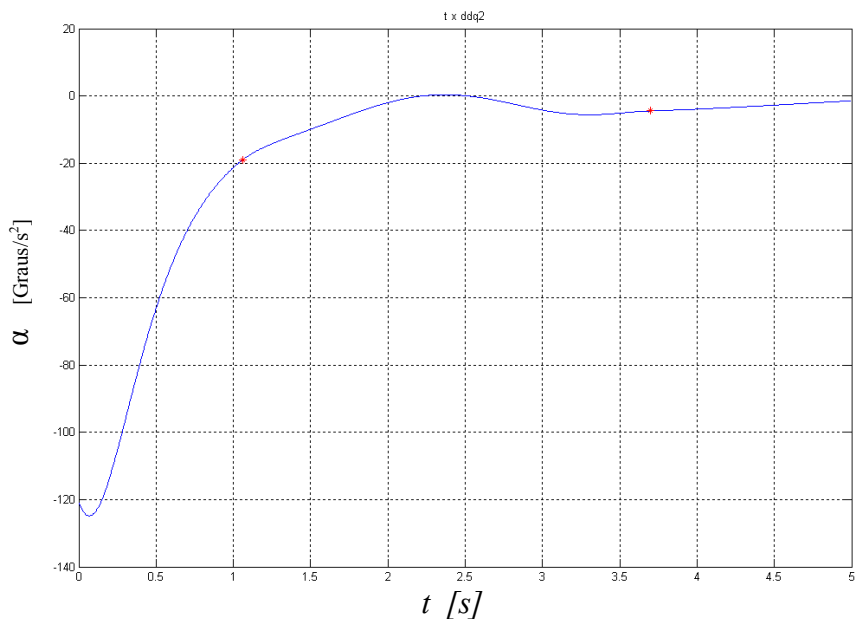


Figura 12: Aceleração de  $q_2$  ao longo do tempo para a trajetória definida pela polinomial sem condição de proximidade

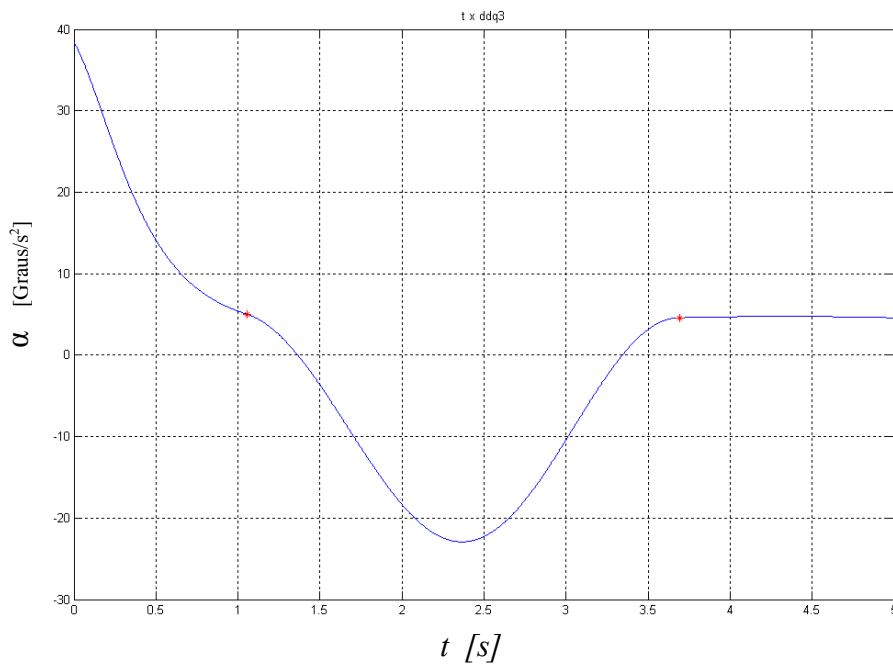


Figura 13: Aceleração de  $q_3$  ao longo do tempo para a trajetória definida pela polinomial sem condição de proximidade.

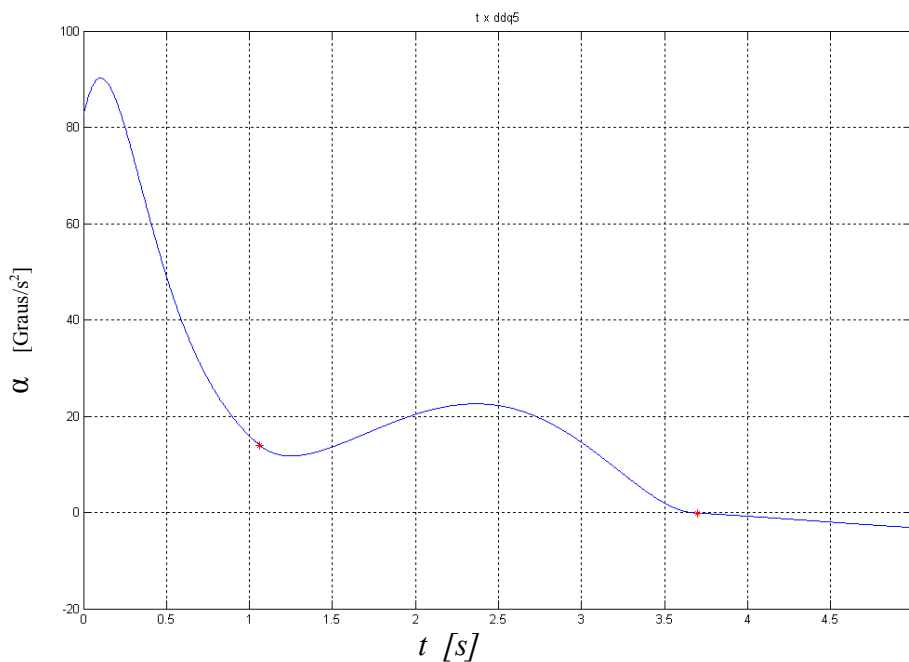


Figura 14: Aceleração de  $q_5$  ao longo do tempo para a trajetória definida pela polinomial sem condição de proximidade.

### b) Polinômio de Concordância de Oitava Ordem

Com o polinômio de nona ordem obtido, a trajetória seguida pelo robô definida por  $P_1(0,420,425)$ ,  $P_2(0,600,1000)$  e  $P_3(0,800,630)$  é mostrada em Fig.15 com uma condição de proximidade de 50 mm.

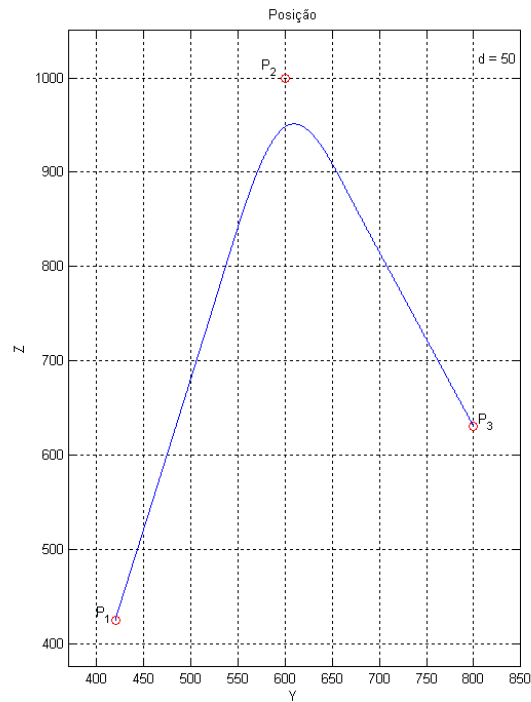


Figura 15: Trajetória definida por segmentos de retas concordantes por uma polinomial de oitava ordem.

As acelerações das articulações envolvidas ( $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_5$ ) são mostradas nas Figs. 16, 17 e 18.

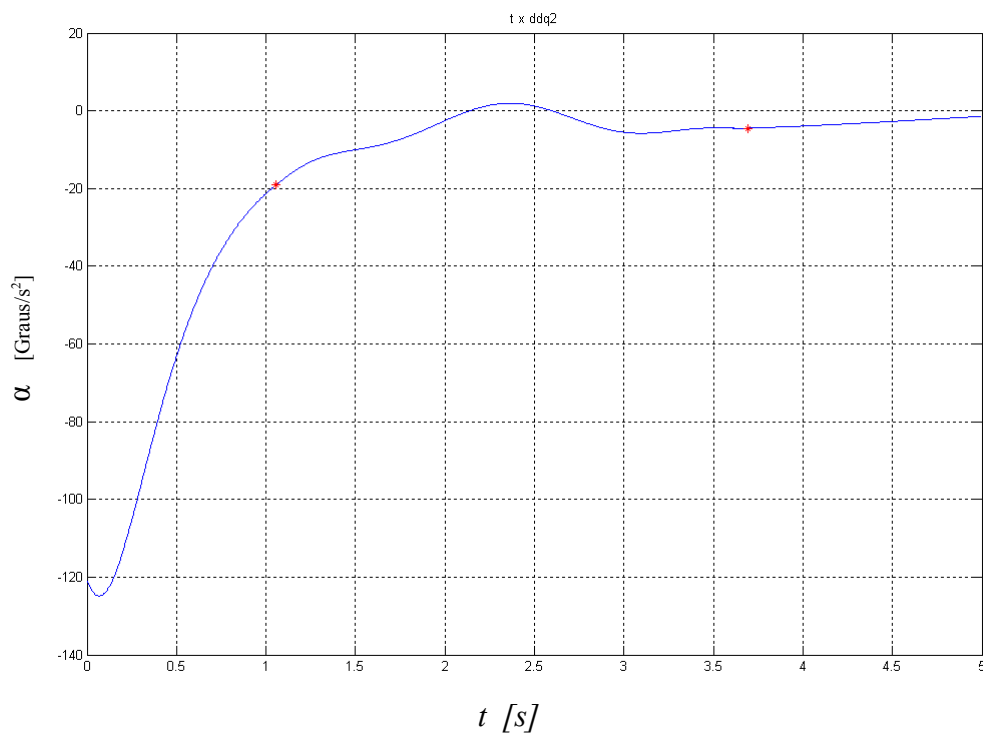


Figura 16: Aceleração de  $q_2$  ao longo do tempo para a trajetória definida pela polinomial com condição de proximidade de 50 mm

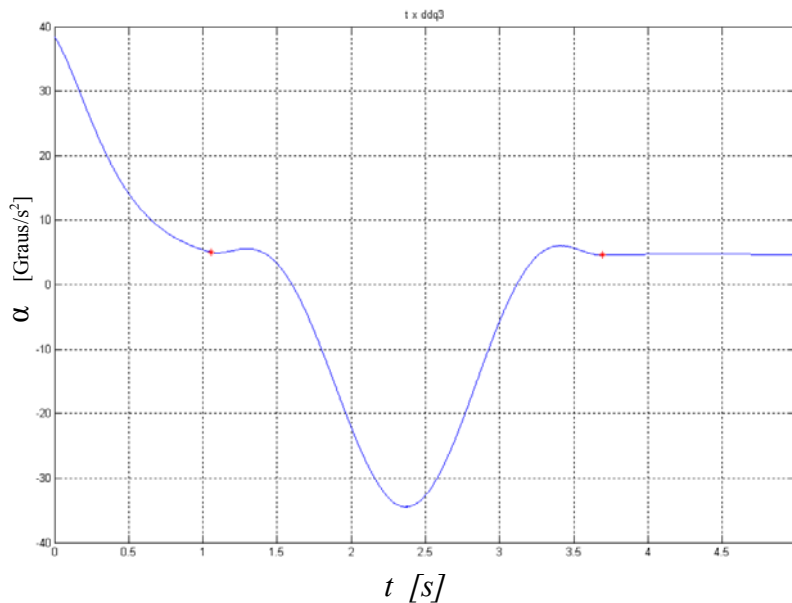


Figura 17: Aceleração de  $q_3$  ao longo do tempo para a trajetória definida pela polinomial com condição de proximidade de 50 mm

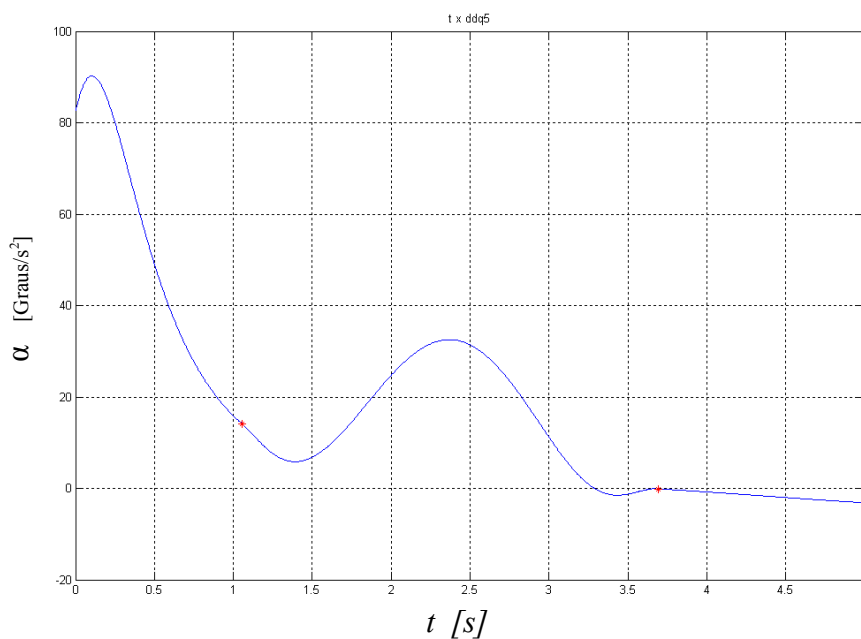


Figura 18: Aceleração de  $q_5$  ao longo do tempo para a trajetória definida pela polinomial com condição de proximidade de 50 mm.

Com a condição de proximidade igual a zero, isto é, curva passando por  $P_2$ , a trajetória está representada na Fig. 19. Pode-se verificar que, com a condição de continuidade do movimento no ponto  $P_2$ , os segmentos entre  $P_1$  e  $P_2$  e entre  $P_2$  e  $P_3$  não são realmente retas conforme o desejado. Para que fossem segmentos de reta, seria necessário considerar a parada do movimento no ponto  $P_2$ .

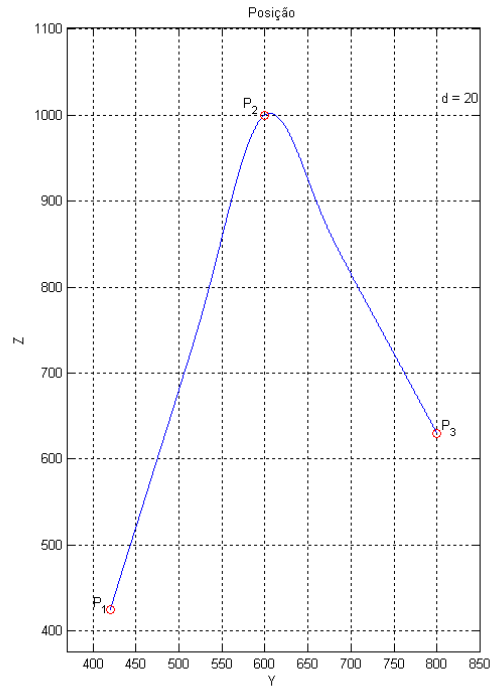


Figura 19: Trajetória definida por segmentos de retas concordantes por uma polinomial de oitava ordem com a curva passando por  $P_2$ .

As acelerações das articulações envolvidas ( $q_2$ ,  $q_3$  e  $q_5$ ) são mostradas nas Figs. 20, 21 e 22;

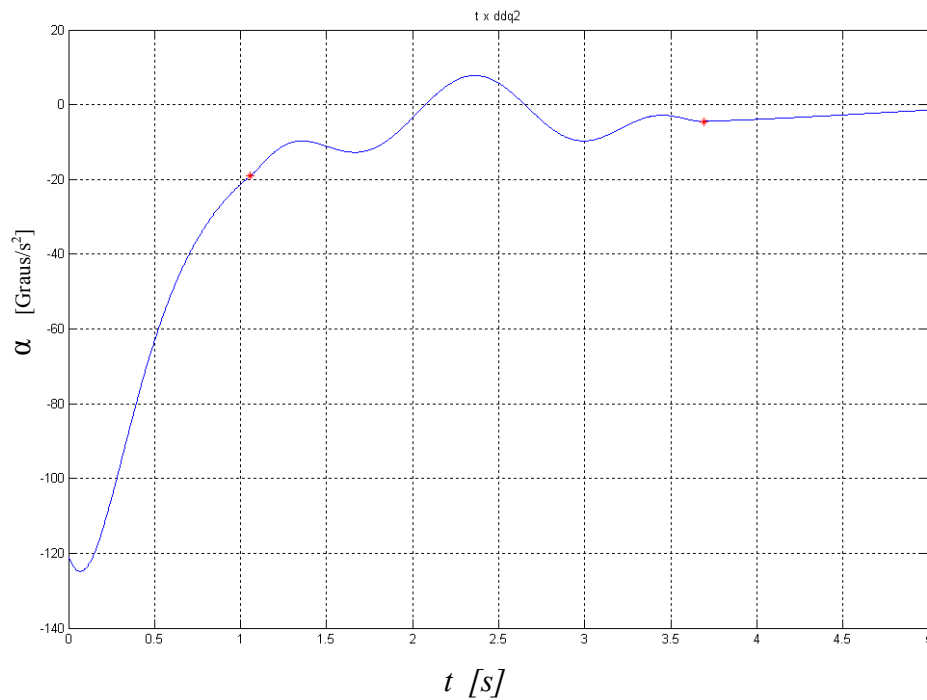


Figura 20: Aceleração de  $q_2$  para a trajetória definida pela polinomial com condição de proximidade nula.

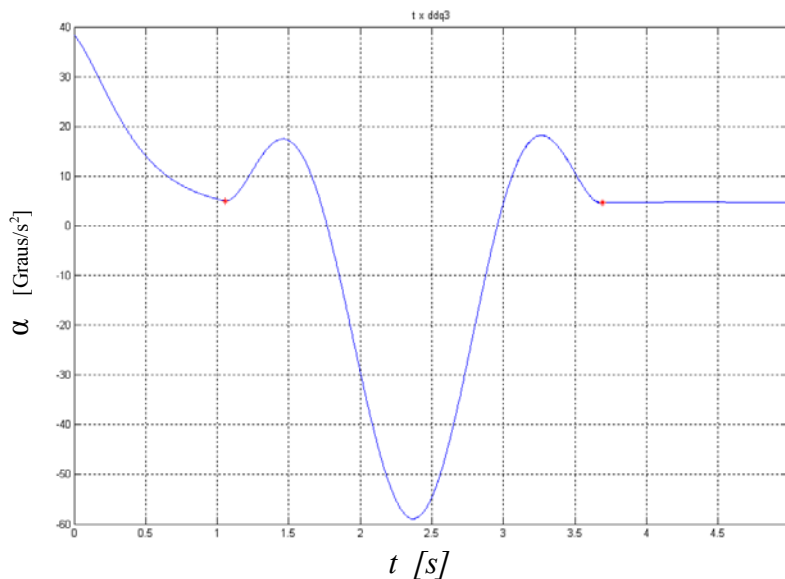


Figura 21: Aceleração de  $q_3$  para a trajetória definida pela polinomial com condição de proximidade nula.

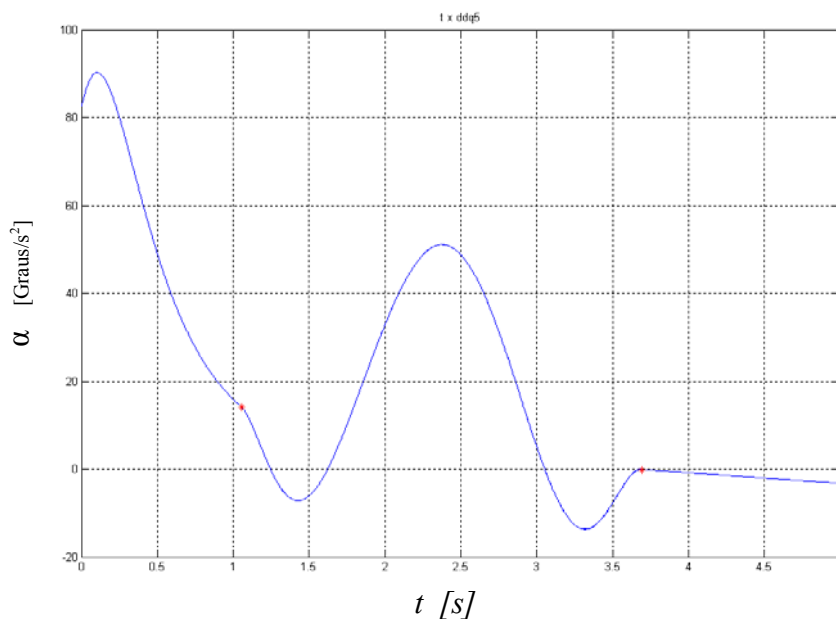


Figura 22: Aceleração de  $q_5$  para a trajetória definida pela polinomial com condição de proximidade nula.

### 3.2. Condição de proximidade definida por um raio

#### a) Distâncias iguais dos pontos de concordância

Nesta análise, a partir do ponto de intersecção entre os dois segmentos de reta, ponto  $P_2$ , é definido um raio correspondente à distancia em que o polinômio de concordância deve passar por  $P_2$ , proximidade  $d$ , definindo uma circunferência CR1, de raio  $d$ , Fig. 23(a). Os pontos de concordância entre os segmentos e o polinômio, inicialmente foram considerados a uma distância ( $2d$ ) a partir de  $P_2$ , pontos  $C_1$  e  $C_2$ , Fig. 23(b).



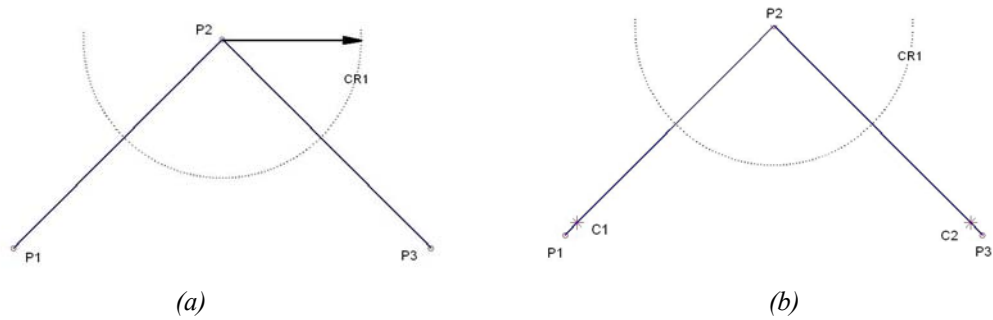


Figura 23: (a) Condição de proximidade  $d$ ; (b) Definição dos pontos de concordância  $C_1$  e  $C_2$ .

Para obter a polinomial concordante com os dois segmentos e que passe a uma distância  $d$  do ponto de intersecção foi utilizado o seguinte procedimento: inicialmente adota-se um ponto na intersecção da bissetriz com a circunferência  $CR1$ , Fig. 24(a). A partir deste ponto é obtido um polinômio interpolante, mas que não atende a distância requerida, conforme representado na Fig. 24(b).

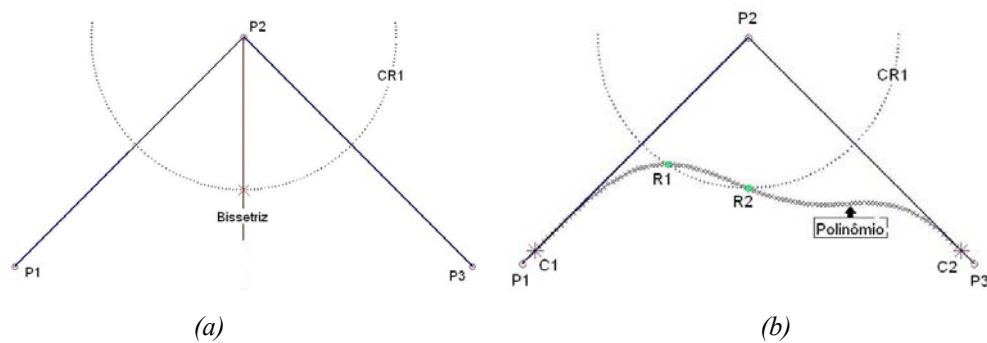


Figura 24: (a) Seleção de um ponto inicial; (b) Polinômio interpolante inicial.

O polinômio obtido passa pelo ponto sobre a bissetriz mas não necessariamente atende a condição de proximidade. Nestas condições, o polinômio cruza pelo menos duas vezes a circunferência  $CR1$ , podendo ser obtidos, pontos  $R_1$  e  $R_2$  da Fig. 24(b).

A partir das coordenadas dos pontos  $R_1$  e  $R_2$  calcula-se uma coordenada correspondente ao ponto médio entre  $R_1$  e  $R_2$ , denominado  $R_m$  da Fig. 25(a). Um novo polinômio é calculado, Fig. 25(b).

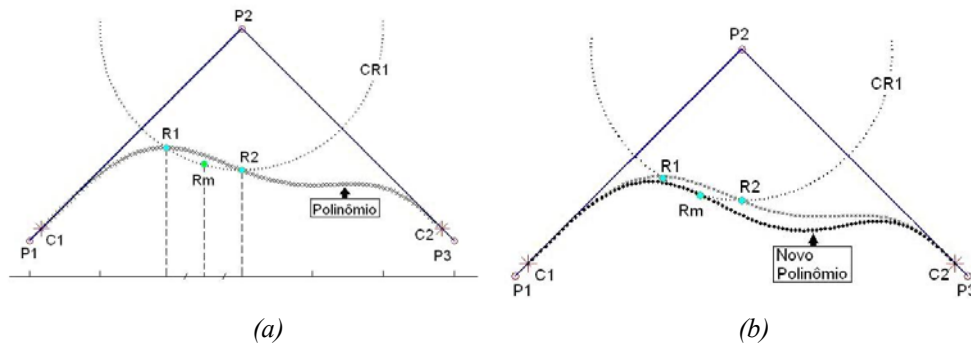


Figura 25: (a) Ponto médio das intersecções; (b) Polinômio interpolante passando pelo ponto médio.

Este novo ponto, para efeito de cálculo, é denominado “ponto da bisettriz”, repetindo-se o processo ate que a diferença entre as coordenadas dos pontos de intersecção do polinômio com a circunferência  $CR_1$  esteja dentro de um mínimo admissível.

A figura 26 apresenta a evolução do método de obtenção do polinômio interpolante ate que a intersecção entre ele e a circunferência  $CR_1$  passa ser considerada como um ponto.

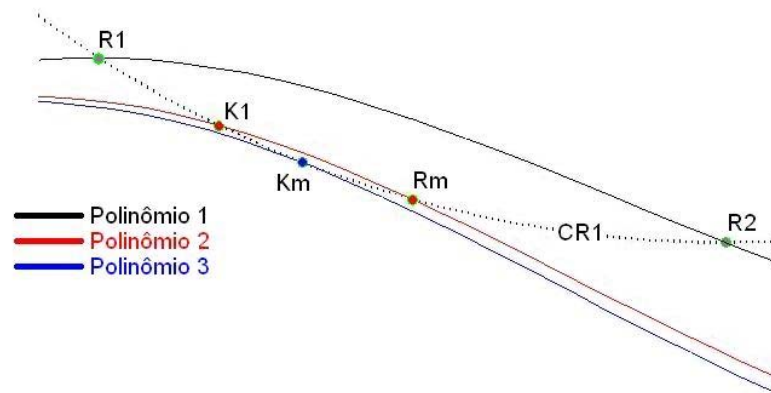


Figura 26: Procedimento de obtenção do polinômio interpolante.

O procedimento descrito pode ser aplicado tanto ao polinômio de 7ª ordem como de 9ª ordem.

Nas figuras 27(a)~(e) apresentam o exemplo para o polinômio interpolante de 7ª ordem. Neste caso as coordenadas dos pontos são:  $P_1(-1,6)$ ,  $P_2(4,4)$ ,  $P_3(1,1)$  e a distância  $d=2$ .

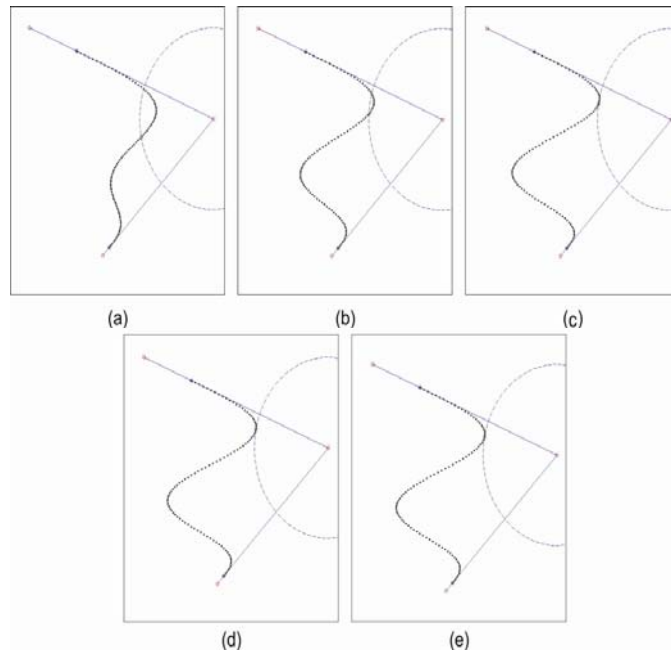


Figura 27: (a) Primeiro polinômio passando pelo ponto pertencente à bissetriz; (b) Segundo polinômio; (c) Terceiro polinômio; (d) Quarto polinômio; (e) Polinômio final.

Nas Figuras 28(a)~(e) são apresentados os resultados referente ao polinômio de 9ª ordem, cujos pontos são:  $P_1(0,8)$ ,  $P_2(4,4)$ ,  $P_3(0,0)$  e a distância  $d=2$ .

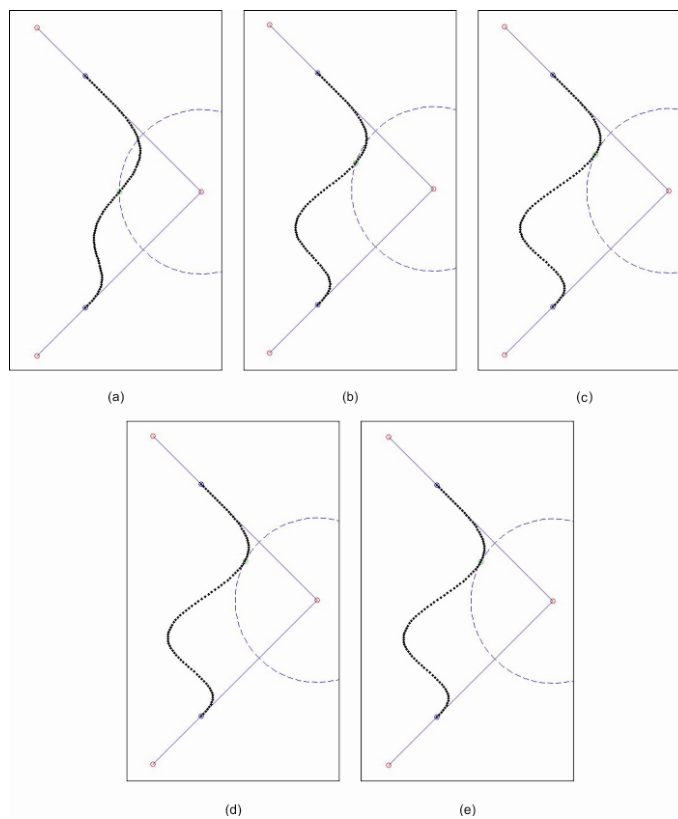


Figura 28: (a) Primeiro polinômio passando pelo ponto pertencente à bissetriz; (b) Segundo polinômio; (c) Terceiro polinômio; (d) Quarto polinômio; (e) Polinômio final.

### b) Distâncias diferentes dos pontos de concordância.

Nesta análise, a partir do algoritmo utilizado na secção 4.2.a., é definido quatro distancias para o ponto  $C_1$ , ( $1.5d$ ,  $2d$ ,  $2.5d$ ,  $3d$ ), mantendo a distancia do ponto  $C_2$  como ( $2d$ ), e então repete-se o procedimento anterior para o calculo do polinômio interpolador.

O procedimento descrito pode ser aplicado tanto ao polinômio de 7ª ordem como de 9ª ordem.

Nas figuras 29 (a)~(d) apresentam os exemplos para o polinômio interpolante de 7ª ordem, representando cada distância utilizada na análise, ( $1.5d$ ,  $2d$ ,  $2.5d$ ,  $3d$ ). Neste caso as coordenadas dos pontos são:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(8,6)$ ,  $P_3(12,0)$  e a distância  $d=3$ .

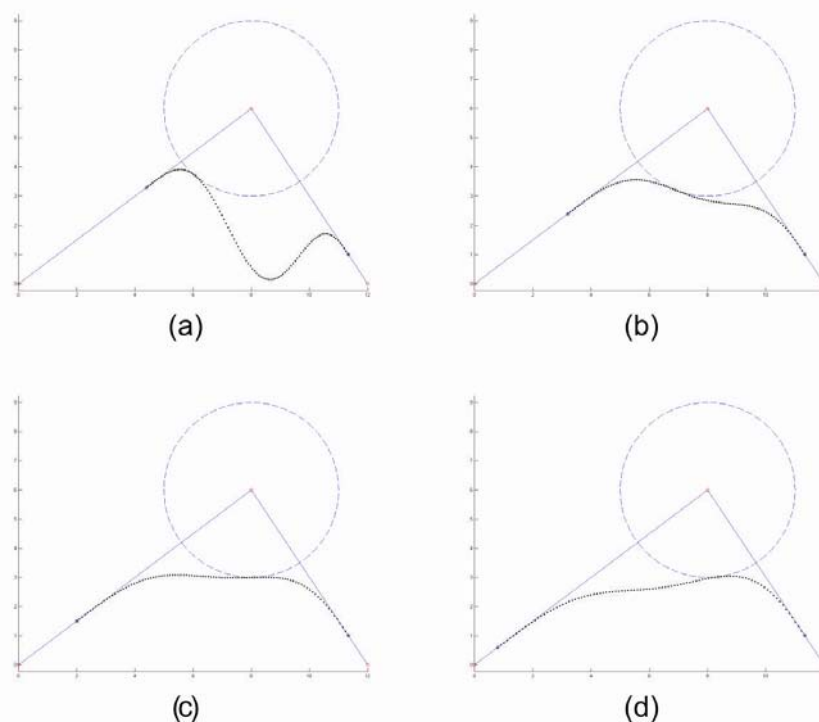


Figura 29: (a) Polinômio interpolante de 7º Grau para distancia de  $1.5d$ ; (b) Polinômio para distancia de  $2d$ ; (c) Polinômio para distancia de  $2.5d$ ; (d) Polinômio para distancia de  $3d$ .

Nas figuras 30 (a)~(d) apresentam os exemplos para o polinômio interpolante de 9ª ordem, representando cada distância utilizada na análise, ( $1.5d$ ,  $2d$ ,  $2.5d$ ,  $3d$ ). Neste caso as coordenadas dos pontos são:  $P_1(0,0)$ ,  $P_2(8,6)$ ,  $P_3(12,0)$  e a distância  $d=3$ .

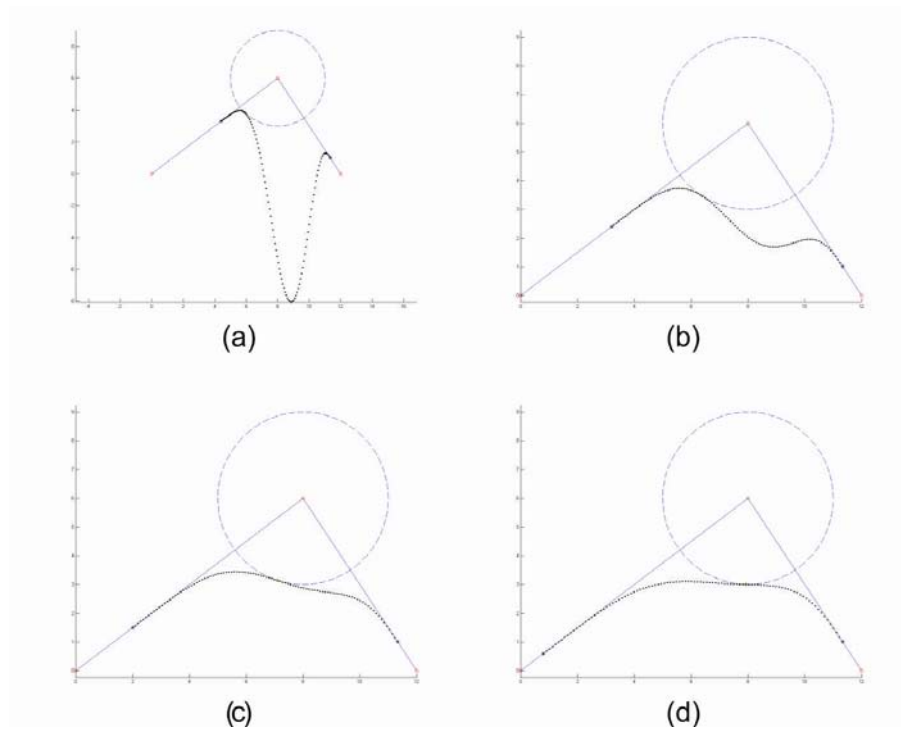


Figura 30: (a) Polinômio interpolante de 9º Grau para distancia de  $1.5d$ ; (b) Polinômio para distancia de  $2d$ ; (c) Polinômio para distancia de  $2.5d$ ; (d) Polinômio para distancia de  $3d$ .

#### 4. CONCLUSÃO

O planejamento de trajetórias é muito importante para se ter uma alta produtividade e para garantir a integridade do robô. Nas operações do tipo “Pick-and-Place” com o aumento da ordem da polinomial é possível notar que o movimento torna-se mais suave. Porém, as velocidades e acelerações aumentam, conseqüentemente, mais potência é necessária para os atuadores seguirem a trajetória.

A concordância polinomial de segmentos de retas garante que o robô possa passar de um segmento de reta para outro sem paradas para a inversão do movimento. Quando se acrescentou uma condição de proximidade foi possível observar que quanto mais a curva passa próxima do ponto maior são suas velocidades e acelerações. Isso se deve a diminuição do raio de curvatura e aumento da aceleração centrípeta. Assim, respeitando as condições limites dos atuadores a condição de proximidade poderá ser usada.

Pelas análises realizadas é possível planejar uma trajetória considerando a continuidade da aceleração e do jerk nos extremos do trecho considerado. No entanto, é necessário que o controlador execute o perfil de movimentação prevista.

Estudos devem ser realizados de forma a incluir condições limites das características mecânicas dos atuadores.

## 5. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Angeles, J., 1997, *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems: Theory, Methods, and Algorithms*, Springer-Verlag, New York.
- Bazaz, S., Tondu, B., 1998, “3-Cubic Spline for On-Line Cartesian Space Trajectory Planning of an Industrial Manipulator”, Int. Workshop on Advanced Motion Control, pp: 493-498.
- Brock, S., Kaczmarek, T., 1996, “2-D Command Preprocessor with Jerk Limit for Machine Tool Drives”, IEEE Int. Symposium on Industrial Electronics, Vol. 1, pp: 230-235.
- Cao, B., Dodds, G. I., 1994, “Time-Optimal and Smooth Joint Path Generation for Robot Manipulators”, Proc. of the Int. Conf. on Control, pp: 1122-1127.
- Carvalho, J.C.M., 2008. “Planejamento de Trajetórias Robóticas”, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Mecânica, Material da disciplina GEM38 – Robótica.
- Castain, R. H., Paul, R. P., 1984, “An On-Line Dynamic Trajectory Generator”, The Int. J. of Robotics Research, Vol. 3, n° 1, pp: 68-72.
- Constantinescu, D., 1998, “Smooth Time Optimal Planning for Industrial Manipulators”, M.A.Sc., Department of Mechanical Engineering, University of British Columbia.
- Dahl, O., Nielsen, L., 1990, “Torque-Limited Path Following by On-Line Trajectory Time Scaling”, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 6, n° 5, pp: 554-561.
- Driedger, K., 2000, *Requirements Document: Robot Motion and Trajectory Planning*, CRS Robotics.
- Fang, Y. C., Hsieh, C. C., Kim, M. J., Chang, J. J., Woo, T. C., 1998, “Real Time Motion Fairing With Unit Quaternions”, Computer-Aided Design, Vol. 30, n° 3, pp: 191-198.
- Fisher, W. D., Mujtaba, M. S., 1988, “Minimum Ratio-Locked Profile Times for Robot Trajectories”, Proc. of the IEEE Int. Conf. on Robotics and Automation, Vol. 2, pp: 1054-1060.
- Lloyd, J., Hayward, V., 1993, “Trajectory Generation for Sensor-Driven and Time-Varying Tasks”, Int. J. of Robotics Research, Vol. 12, n° 4, pp: 380-393.
- Müller-Karger, C., Granados Mirena, A., Scarpati López, J., 2000, “Hyperbolic Trajectories for Pick-and-Place Operations to Elude Obstacles”, IEEE Trans. on Robotics and Automation, Vol. 16, n° 3, pp: 294-300.
- Paul, R.P., 1981, *Robot Manipulators: Mathematics, Programming and Control*, MIT Press, Cambridge, MA. 5, pp: 451-458.
- Sahar G., Hollerbach, J.M., 1986, “Planning of Minimum-Time Trajectories for Robot Arms”, The Int. J. of Robotics Research, vol. 5, n° 3, pp: 90-100.
- Sciavicco L., Siciliano, B., 1996, *Modeling and Control of Robot Manipulators*, McGraw-Hill Companies, Inc.
- Shiller, Z., Chang, H., Wong, V., 1996, “The Practical Implementation of Time-Optimal Control for Robotic Manipulators”, Robotics and Computer-Integrated Manufacturing, Vol. 12, n° 1, pp: 29-39.
- Yang, D.C.H., Chou, J.J., 1994, “Automatic Generation of Piecewise Constant Speed Motion with Smooth Transition for Multi-Axis Machines”, Journal of Mechanical Design, Vol. 116, pp: 581-586.