

DESENVOLVIMENTO DE UM CÓDIGO COMPUTACIONAL PARA SOLUÇÃO DE ESCOAMENTOS BIDIMENSIONAIS NO INTERIOR DE CAVIDADES.

JOÃO LUCAS NOGUEIRA GONÇALVES DE CARVALHO¹, ARISTEU DA SILVEIRA NETO², ELIE LUIS MARTÍNEZ PADILLA³

RESUMO

O presente trabalho apresenta as etapas de desenvolvimento de uma ferramenta computacional para resolver problemas na área de mecânica dos fluidos. O problema a ser resolvido trata da solução do escoamento no interior de uma cavidade que apresenta uma tampa deslizante. Para a solução do problema foi utilizado o método dos volumes finitos através da aplicação direta nas equações de Navier-Stokes. Utilizou-se o método de acoplamento pressão-velocidade do tipo passo fracionado (Kim e Moin, 1985), sendo que a discretização espacial utilizada foi diferenças centradas de segunda ordem e o esquema temporal utilizado na predição do campo de velocidades foi o explícito. O fluido em questão deve ser newtoniano, incompressível e não estão sendo considerados os efeitos da temperatura (não foi utilizada a equação da energia). Para a elaboração do código numérico foi utilizada a linguagem de programação C e C++.

O código numérico apresentou bons resultados, muito similar aos apresentados por Ghia et al (1985). A construção do código é de grande utilidade, já que através do mesmo podemos tirar muitas informações sobre o escoamento no interior da cavidade sem que seja necessário construir um protótipo e fazer experimentos e medições no mesmo. A construção de códigos desse tipo simboliza uma grande evolução na área de mecânica dos fluidos no sentido da otimização dos processos. Através da evolução dos códigos e das novas metodologias que vão surgindo, cada vez mais se dispõe de um maior leque de opções no tratamento de problemas de mecânica dos fluidos.

1 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 – Campus Santa Mônica, Bloco 5P, Uberlândia – MG, CEP38400-902 – Joalucascarvalho@yahoo.com.br

2 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 – Campus Santa Mônica, Bloco 5P, Uberlândia – MG, CEP38400-902 – Aristeu@mecanica.ufu.br

3 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 – Campus Santa Mônica, Bloco 5P, Uberlândia – MG, CEP38400-902 – epadilla@mecanica.ufu.br

ABSTRACT

The present paper presents the stages of the development of a computational tool to solve problems in the area of fluid mechanics. The problem to be solved is an approach of a flow inside a lid-driven cavity.

In order to solve the problem we used the *finite volume method* (FVM) through the direct application of the Navier-Stokes equation. The method of pressure-velocity coupling with the fractionated step (Kim e Moin, 1985) was applied and it was taken into consideration that the spatial discretization used were the centered differences of second order and the temporal scheme used in the prediction of the velocity field was the explicit one. The fluid in question must be newtonian and incompressible and it is not being considerer the effects of temperature (the energy equation was not used). For the elaboration of the code was used the programming languages C and C++.

The numerical code presented good results, very similar to those presented by Ghia et al (1982). The construction of the is of great importance, since through the same it can get several informations about the flow inside a cavity without been necessary to build a prototype and do experiments and mesurement on it. The construction of codes like this represents a huge evolution in the area of fluid mechanics in the direction of the optimization processes. Through the evolution of the codes and the new methodologies being developed, increasingly a wider range of options available in the treatment of problems of fluid mechanics.

KEYWORDS : Flow, Navier-Stokes equation, computational code, optimization of processes.

1. INTRODUÇÃO

Problemas de mecânica dos fluidos envolvendo interação fluido-estrutura estão sempre presentes em nosso cotidiano e em problemas de engenharia. Para tratá-los, podem ser utilizados métodos experimentais (que através do resultado de diversas experiências chega-se a um resultado para o problema); ou pode-se utilizar de metodologias computacionais (que através da modelagem física e matemática de um problema chega a resultados para o mesmo).

Os modelos experimentais, apesar de em algumas situações serem de mais simples realização e apresentarem bons resultados, quando aplicados a sistemas de maior complexidade demandam muito tempo de desenvolvimento (grande quantidade de testes necessária) e são as vezes inviáveis financeiramente. A fim de sanar as dificuldades verificadas na utilização de métodos experimentais em certos tipos de problemas, foram desenvolvidas as metodologias numéricas computacionais para resolução dos mesmos. Um caso que ilustra bem a dificuldade da utilização de métodos experimentais na industria aeronautica é o estudo do escoamento e dos fenômenos termicos no interior de uma turbina ou compressor em um turboreator, onde a complexa geometria aliada ao efeito de rotação das paletas dificulta a inserção de captadores para medição de velocidade e temperatura.

O presente trabalho apresenta as diversas etapas da elaboração de um código numérico que tem como objetivo a determinação de um escoamento no interior de uma cavidade bidimensional, sendo que este é provocado devido à movimentação da tampa da cavidade (tampa deslizante) que tem velocidade constante. Através da elaboração de um algoritmo computacional capaz de resolver o problema da cavidade com tampa deslizante busca-se encontrar os campos de velocidade nas duas direções e o campo de pressão no interior da mesma.

2. PROBLEMA A SER RESOLVIDO

É proposto neste trabalho a resolução de um escoamento bidimensional no interior de uma cavidade com tampa deslizante. Foi selecionada uma cavidade de lado L . A tampa desliza à uma velocidade U_0 , que para efeitos de comparações e validação do código será adotada como sendo 1 m/s. Uma imagem ilustrativa do problema é mostrada na figura 1:

Figura 2.1 Representação de uma cavidade com uma tampa deslizante

O movimento do fluido no interior da cavidade será provocado pelo movimento da fronteira, correspondente à tampa móvel. O movimento da tampa causará o movimento do fluido no interior da cavidade, que será dependente não apenas da velocidade da tampa e do tamanho L da cavidade; mas também da viscosidade dinâmica e massa específica do fluido em questão.

Para facilitar a comparação entre resultados para diferentes fluidos (com diferentes valores de viscosidade e massa específica), velocidade da tampa e tamanho de cavidade, será utilizada como base de comparações o número adimensional de Reynolds. O número de Reynolds para o problema da cavidade é dado por:

—

Sendo:

= Viscosidade dinâmica do fluido;

Velocidade da tampa;

L = Lado da cavidade;

Massa específica do fluido;

Através da utilização do número de Reynolds e satisfeita a condição de similitude entre os problemas, foram comparados os resultados de problemas que utilizam diferentes velocidades, viscosidades e massa específica mas que, apesar disso, tem mesmo número de Reynolds e podem ser considerados problemas iguais. Através da simples garantia de satisfação das condições de similitude, temos o número de Reynolds como sendo o único

parâmetro a ser considerado na resolução do escoamento, não necessitando portanto de se trabalhar separadamente com o tamanho da cavidade, a velocidade da tampa, a viscosidade dinâmica do fluido e a massa específica do mesmo.

Para elaboração do modelo matemático e computacional do programa para a resolução do escoamento, assumiu-se que o fluido no interior da cavidade corresponde a um fluido newtoniano, incompressível e com massa específica constante.

3. MODELAGEM FÍSICA E MATEMÁTICA DO PROBLEMA

A fim de se fazer uma análise do movimento do fluido dentro da cavidade para se obter o campo de velocidades da direção coordenada x , o campo de velocidades na direção coordenada y e o campo de pressão no interior da cavidade foi utilizada a técnica de análise do movimento dos fluidos em pequena escala chamada de análise diferencial. A análise diferencial aplicada á mecânica dos fluidos computacional propõe que para cada volume da malha devem ser satisfeitas as equações da conservação da massa e a equação do balanço da quantidade de movimento linear (Maliska, 1995).

A equação que garante a conservação da massa em sua forma mais geral é dada por:

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (3.1)$$

Particularizando a equação da conservação da massa para um escoamento bidimensional em coordenadas cartesianas tem-se a seguinte expressão:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0; \quad (3.2)$$

Já a equação geral do balanço de quantidade de movimento linear, também conhecida como equação de Navier-Stokes, é dada por:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] + g_i \quad (3.3)$$

Devido ao escoamento em observação ser bidimensional, devemos obter a equação de Navier-Stokes para as direções x e y :

Navier-Stokes em x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (uv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) + g_x \quad (3.4)$$

Navier-Stokes em y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) + g_y \quad (3.5)$$

Para que o problema proposto possa ser tratado de acordo com a formulação matemática apresentada acima temos que algumas condições devem ser satisfeitas. A primeira delas é que o fluido deve ser newtoniano (possua viscosidade dinâmica constante, sendo a taxa de deformação do fluido proporcional á tensão de cisalhamento); a segunda delas é que o fluido seja incompressível, portanto a massa específica do fluido é constante para todo o domínio e não varia ao longo do tempo.

Como no problema tratado não há variação da massa específica do fluido, o termo de empuxo se equilibra com o gradiente de pressão hidrostática. Desta forma podemos anular o termo de empuxo com o gradiente de pressão hidrostática e trabalharmos com a pressão dinâmica ao invés de trabalharmos com a pressão total.

Finalmente, pode-se observar na equação de Navier-Stokes a presença de termos advectivo A, do termo difusivo D, do termo de pressão P e do termo instacionario. A equação de Navier-Stokes nas direções x e y pode ser representada como:

Direção X :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\langle A \rangle + \langle D \rangle - \langle P \rangle. \quad (3.6)$$

Onde:

$$\langle A \rangle = \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y}. \quad (3.7)$$

$$\langle D \rangle = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right). \quad (3.8)$$

$$\langle P^\theta \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x}. \quad (3.9)$$

Direção Y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} = -\langle A \rangle + \langle D \rangle - \langle P \rangle. \quad (3.10)$$

Onde:

$$\langle A \rangle = \frac{\partial(uv)}{\partial x} + \frac{\partial(vv)}{\partial y} \quad (3.11)$$

$$\langle D \rangle = v \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\langle P^\phi \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} \quad (3.13)$$

Para a modelagem do escoamento no interior da cavidade primeiramente aplica-se a equação do balanço da quantidade de movimento para cada volume, que deve ser satisfeita de acordo com o grau de precisão estipulado. Porém, encontram-se problemas para a resolução do escoamento; pois não são conhecidos os campos de velocidade em nenhuma das duas direções e nem o campo de pressão. Devido à conexão existente entre o campo de pressão associado ao escoamento e os campos de velocidade em x e y é necessária a existência de uma maneira de interligar essas duas propriedades.

A pressão em um ponto no instante de tempo posterior " $t+\Delta t$ " (instante que se deseja encontrar) pode ser expressa como:

$$P^{t+\Delta t} = P^t + P'. \quad (3.14)$$

Sendo que P' representa a flutuação da pressão; que é a diferença entre a pressão no próximo instante de tempo e a pressão no instante de tempo atual.

Fazendo com que o termo de pressão P seja igual ao termo correspondente á pressão no instante anterior ao que está sendo calculado (P^t) somado com a flutuação da pressão do tempo anterior em relação ao próximo tempo (P'), e sendo a derivada temporal da velocidade correspondente à diferença entre as velocidades no tempo que se deseja calcular e a velocidade no tempo anterior dividido pelo intervalo de tempo, temos que:

$$\frac{U_i^{t+\Delta t} - U_i^t}{\Delta t} = -\langle A^t \rangle + \langle D^t \rangle - \langle P^\phi \rangle, \text{ onde os termos } A \text{ e } D \quad (3.15)$$

são avaliados no instante anterior (Euler explícito).

Visto que o termo P agora equivale á: $\langle P \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} (P^t + P')$.

A partir da Equação (3.15) e utilizando o método de acoplamento pressão-velocidade dos passos fracionados (kim e Moin, 1985), a Equação (3.15) pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\frac{U_i^{t+dt} - U_{est\ i} + U_{est\ i} - U_i^t}{\Delta t} = -\langle A^t \rangle + \langle D^t \rangle - \langle P^t \rangle - \langle P' \rangle \quad (3.16)$$

Sendo:

$$\langle P^t \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P^t}{\partial x_i} \quad (3.17)$$

$$\langle P' \rangle = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} \quad (3.18)$$

A Equação (3.16) pode ser então dividida em dois passos para que possa ser resolvida. Que é então dividida em dois passos para que possa ser resolvida. Esses passos são chamados de passo predictor e passo corretor.

Passo predictor:

$$\frac{U_{est\ i} - U_i^t}{\Delta t} = -\langle A^t \rangle + \langle D^t \rangle - \langle P^t \rangle. \quad (3.19)$$

E posteriormente o passo corretor:

$$\frac{U_i^{t+dt} - U_{est\ i}}{\Delta t} = -\langle P' \rangle. \quad (3.20)$$

Como observado anteriormente, o passo predictor dá origem a um campo de velocidade estimado U_{est} (velocidade na direção x) e um campo de velocidades V_{est} (velocidade na direção y). A partir dos campos de velocidade estimados e conhecido o campo de flutuação da pressão (P'), pode-se conhecer os campos de velocidade U^{t+dt} e V^{t+dt} ; que correspondem respectivamente às velocidades na direção x e y no instante de tempo posterior. Seguidamente pode-se atualizar o campo de pressão com a Equação (3.14).

Para que o problema possa ser resolvido é necessário que se conheça o campo de pressão estimado (P'). Aplicando-se o operador divergente no passo corretor da equação de conservação da quantidade de movimento, Equação (3.20) e garantindo a conservação da massa ($div(\vec{U}^{t+\Delta t}) = 0$), chega-se à equação de Poisson para a resolução do campo de flutuação da pressão.

A equação de Poisson já integrada no tempo assume a seguinte forma:

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left[\frac{U_i^{t+dt} - U_{est\ i}}{\Delta t} \right] = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial P'}{\partial x_i} \right) \quad (3.21)$$

Baseando-se nos campos de velocidade estimada e no campo de flutuação da pressão calculam-se as velocidades U^{t+dt} e V^{t+dt} através do passo corretor, Equação 3.20, pela expressão:

$$U_i^{t+dt} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x_i} + U_{est\ i} \quad (3.22)$$

Que assume as seguintes formas:

Em x:

$$U^{t+dt} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial x} + U_{est} \cdot \quad (3.23)$$

Em Y:

$$V^{t+dt} = -\frac{\Delta t}{\rho} \frac{\partial P'}{\partial y} + V_{est} \cdot \quad (3.24)$$

Desta forma, a partir das informações dos campos de velocidade e pressão já resolvidos no instante de tempo “t”, calculam-se os campos de velocidade e pressão no instante de tempo posterior “t+dt”, e isso é feito até que o escoamento atinja o tempo desejado.

4. MODELO COMPUTACIONAL

Para a simulação numérica do problema proposto no presente trabalho foi utilizado o método dos volumes finitos, devido às suas características conservativas no tratamento de problema de mecânica dos fluidos.

No método dos volumes finitos (MVF) (Patankar, 1980), aplicado á um problema bidimensional, o ponto em que se deseja analisar é chamado de ponto “P”, sendo que o ponto localizado logo acima é chamado de “N”, o que se encontra logo abaixo é chamado de “S” e os vizinhos da direita e da esquerda são chamados respectivamente de “E” e “W”.

O volume elementar é delimitado por 4 faces; sendo que a face superior é chamada de “n”, enquanto que a face inferior “s”, a da direita de “e” e a da esquerda de “w”, assim como mostrado na seguinte Figura 4.1.

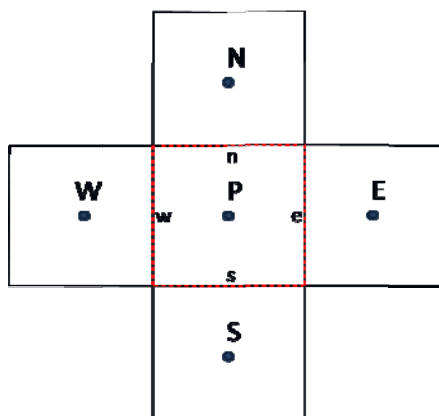


Figura 4.1 Representação do volume elementar e seus vizinhos

Para a resolução do problema da cavidade com tampa deslizante foi utilizada uma malha uniforme contendo somente volumes inteiros em seu interior. Para representar as condições de contorno utilizaram-se volumes fantasmas, que fazem fronteira com os volumes internos que delimitam o domínio.

As fronteiras laterais e a fronteira inferior são fixas e a fronteira superior é escorregadia com uma velocidade constante. As fronteiras (contornos) coincidem com as faces dos volumes, e a imposição das condições de contorno se faz por meio do uso de volumes fantasmas.

Na Figura 4.2 é representado um modelo da malha, sendo este modelo formado por uma malha de 6x6 volumes inteiros em seu interior (representado pelas linhas contínuas) e volumes fantasmas fazendo fronteira aos volumes externos da malha (representados pelas linhas tracejadas).

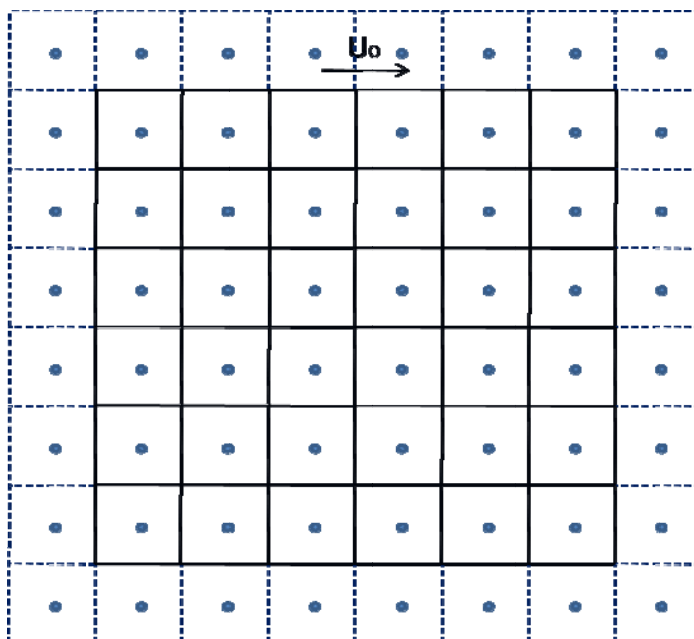


Figura 4.2 Domínio de cálculo com volumes fantasmas.

Para facilitar a representação das condições de contorno foi utilizada malha deslocada com as velocidades atrasadas; sendo que a pressão fica localizada no centro do volume elementar e as velocidades u e v ocupam as laterais esquerda e inferior respectivamente.

Um ponto genérico P da malha é apresentado em vermelho na Figura 4.3 a seguir:

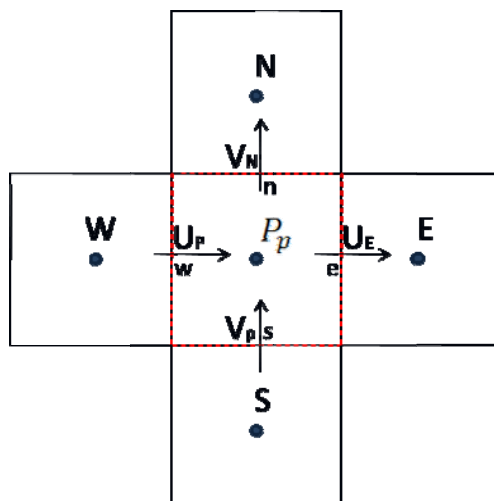


Figura 4.3 Representação das velocidades nas fronteiras de um volume elementar e seus vizinhos.

Para a representação de cada propriedade contida nos volumes elementares foi utilizado os índices i e j ; sendo que o índice i representa a linha na qual a propriedade está contida, e o índice j representa a coluna ocupada pela propriedade.

Depois de já se ter definido o tipo de malha a ser utilizada e determinado que as equações que regem o problema e devem ser satisfeitas são a equação de Navier-Stoke

(através da utilização do acoplamento pressão-velocidade), a equação de Poisson, e a equação da conservação da massa, é preciso integrar essas equações na região de um volume elementar. Desta forma, ao se integrar cada uma das equações em um volume elementar, garante-se que todos os volumes obedecerão ao balanço da quantidade de movimento linear e ao princípio da conservação da massa.

Como as velocidades estão deslocadas em relação à pressão, para efetuar o cálculo de u e v é preciso integrar as equações de predição e correção da velocidade na direção X no volume delimitado pelas linhas pontilhadas em vermelho; como mostradas na Figura 4.4:

Figura 4.4 Representação de uma parte da malha com 3x3 elementos com suas respectivas velocidades, pressões e tamanhos de malha, representado em vermelho o volume elementar correspondente á velocidade U.

Na figura 4.4 acima são representados alguns pontos da malha, sendo que os pontos com índice i,j correspondem aos pontos discretizados.

Ao efetuar o cálculo das velocidades u e v obtém-se como centro do volume elementar que será integrado a velocidade U, sendo esse volume elementar é delimitado horizontalmente por “w” e “e” e verticalmente por “s” e “n” como mostrado na figura acima.

Para a integração da Equação (3.19) foi utilizado esquema temporal totalmente explícito (no qual as propriedades são todas avaliadas no instante de tempo anterior) e na integração espacial foi utilizado diferenças finitas.

Integrando a Equação (3.19) sobre malha uniforme, tem-se:

$$\begin{aligned}
u_{est} = u^t + \left[- \int_w^e \int_s^n \frac{\partial(uu)}{\partial x} + \frac{\partial(uv)}{\partial y} dy dx \right. \\
\left. + \int_w^e \int_s^n v \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) dy dx - \int_w^e \int_s^n \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} dy dx \right] \Delta t
\end{aligned} \tag{4.1}$$

Que na forma discreta, avaliada sobre o volume elementar da figura 4.4 tem a seguinte forma:

$$U_{est\ i,j} = U_{i,j}^t + \Delta t * (-\langle A \rangle + \langle D \rangle - \langle P \rangle), \text{ onde:} \tag{4.2}$$

$$\langle A \rangle = \tag{4.3}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{\left(\frac{U_{i,j+1}^t + U_{i,j}^t}{2} \cdot \frac{U_{i,j+1}^t + U_{i,j}^t}{2} \right) - \left(\frac{U_{i,j}^t + U_{i,j-1}^t}{2} \cdot \frac{U_{i,j}^t + U_{i,j-1}^t}{2} \right)}{\Delta x} \\
& + \frac{\left(\frac{V_{i+1,j}^t + V_{i,j}^t}{2} \cdot \frac{U_{i+1,j}^t + U_{i,j}^t}{2} \right) - \left(\frac{V_{i,j}^t + V_{i-1,j}^t}{2} \cdot \frac{U_{i,j}^t + U_{i-1,j}^t}{2} \right)}{\Delta y}
\end{aligned}$$

$$\langle D \rangle = v \left(\frac{U_{i,j+1}^t - 2U_{i,j}^t + U_{i,j-1}^t}{\Delta x^2} + \frac{U_{i+1,j}^t - 2U_{i,j}^t + U_{i-1,j}^t}{\Delta y^2} \right) \tag{4.4}$$

$$\langle P \rangle = \frac{1}{\rho} \left(\frac{P_{i,j}^t - P_{i,j-1}^t}{\Delta x} \right). \tag{4.5}$$

onde $\Delta x = \Delta y = \delta x_w = \delta x_e = \delta y_n = \delta y_s$.

A velocidade estimada pode facilmente ser calculada através da Equação (4.2), pois a velocidade U_{est} depende das velocidades U^t e V^t , da pressão P^t , e de propriedades relativas ao fluido e a malha.

Já para calcularmos as velocidades V_{est} e V^{t+dt} tem-se como centro do volume elementar, que será integrado, a velocidade V . O volume elementar que deve ser integrado para a obtenção das velocidades relativas à V é mostrado na Figura (4.5):

Figura 45. Representação de uma parte da malha com 3x3 elementos com suas respectivas velocidades, pressões e tamanhos de malha, representado em vermelho o volume elementar correspondente á velocidade V.

Analogamente ao procedimento adotado para as velocidades u e v , deve-se integrar a equação para w e θ o volume elementar de “w” até “e” e de “s” até “n”, lembrando que agora o volume elementar será o correspondente ao da velocidade V (representado em linhas tracejadas) como mostrado na Figura (4.5).

De acordo com a Equação (3.19) para a direção y tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\rho \alpha \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \alpha \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \rho \beta \theta \quad (4.6)$$

A Equação (4.6) forma discreta, avaliada sobre o volume elementar da Figura (4.4) tem seguinte forma, Equação (4.7):

$$\left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_e - \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)_s, \text{ sendo que:} \quad (4.7)$$

$$\frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \quad (4.8)$$

$$\frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2}$$

$$\langle D \rangle = \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \quad (4.9)$$

$$\langle P \rangle = - \frac{\Delta x}{2} \frac{\Delta y}{2} \quad (4.10)$$

Depois de já conhecido os campos de velocidade u e v deve-se resolver o campo da flutuação da pressão, que é dado pela equação de Poisson, Equação (3.21).

Como a equação de Poisson tem como objetivo calcular o campo de p , esse campo é avaliado no centro dos volumes originais da malha, como representado na figura 4.6:

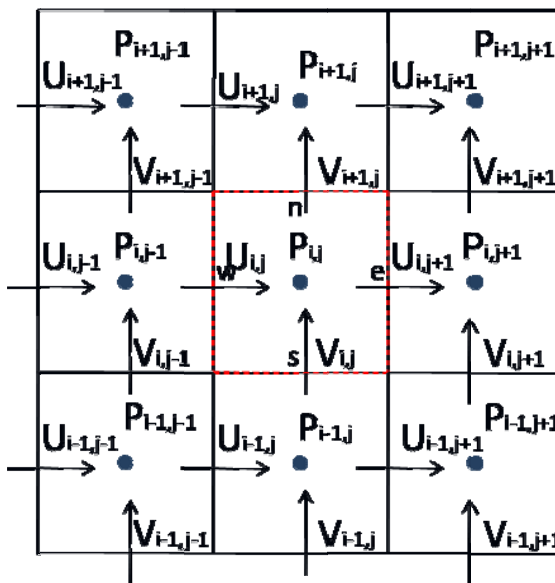


Figura 4.6. Representação de uma parte da malha com 3x3 elementos com suas respectivas velocidades, pressões e tamanhos de malha, representado em vermelho o volume elementar correspondente á pressão P.

A integração da Equação (3.21) tem como objetivo a obtenção de um sistema linear, que deve ser do tipo representado na Equação (4.11):

$$(4.11)$$

Para isso é feita a integração espacial da equação de Poisson, Equação (4.12):

$$\text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad \text{---} \quad (4.12)$$

Integrando a Equação (4.12) e utilizando-se do esquema de diferenças centradas tem-se a equação na sua forma discreta, Equação 4.13:

$$\text{---} \quad (4.13)$$

Sendo:

$$\text{---} \quad ; \quad (4.14)$$

Através da equação de Poisson obtém-se a Equação (4.13), sendo que toma-se por um sistema linear de equações (quando considera-se todos os volume do domínio) como mostrado na Equação (4.11).

Deve lembrar-se que esta equação é válida para os pontos no interior da malha, sendo que para os pontos que fazem fronteira com as paredes teremos outras equações a fim de representarem as condições de contorno. Uma representação da distribuição da malha é mostrada na Figura (4.7).

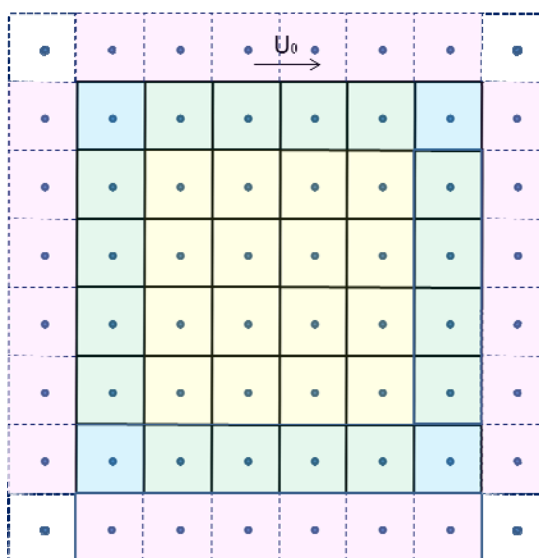


Figura 4.7 Representação da malha utilizando-se 6x6 volumes em seu interior.

Temos que os coeficientes mostrados na Equação (4.8) correspondem aos coeficientes para todos os pontos interiores à malha (apenas excluindo os volumes fantasma), só que para representar as condições de contorno, inicialmente usaremos os coeficientes dessa forma apenas para os pontos em amarelo na Figura (4.7).

Sendo \vec{n} um vetor normal à parede, temos que para uma região suficientemente próxima à parede $\frac{\partial P'}{\partial \vec{n}}$, que corresponde à condição de contorno da flutuação de pressão. Esta condição de contorno será então aplicada aos volumes da cavidade que fazem fronteira com a parede. Para os volumes internos à direita da parede e em contato com a mesma pode-se dizer que $P'_W = P'_p$, de forma que a Equação (4.13) assumirá a seguinte forma:

$$A_p = -3; A_W = 0; A_e = A_n = A_s = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Para os volumes internos à esquerda da parede e em contato com a mesma pode-se substituir $P'_E = P'_p$ na Equação (4.13), de forma que será obtido:

$$A_p = -3; A_E = 0; A_W = A_n = A_s = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Para os volumes internos abaixo da parede superior e em contato com a mesma pode-se substituir $P'_N = P'_p$ na Equação (4.13), de forma que tem-se:

$$A_p = -3; A_N = 0; A_E = A_W = A_s = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Para os volumes internos acima da parede inferior e em contato com a mesma pode-se substituir $P'_S = P'_p$ na Equação (4.13), e assim obtendo:

$$A_p = -3; A_S = 0; A_E = A_W = A_s = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Já para os volumes internos que se localizam nos vértices, representados em azul na Figura (4.7) tem-se:

Vértice à esquerda em baixo:

$P'_S = P'_W = P'_p$, logo os coeficientes da equação no ponto assumem a forma:

$$A_p = -2; A_W = 0; A_s = 0; A_E = A_N = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Vértice à direita em baixo:

$P'_S = P'_E = P'_p$, logo os coeficientes da equação no ponto assumem a forma:

$$A_p = -2; A_E = 0; A_S = 0; A_W = A_N = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Vértice à esquerda em cima:

$P'_N = P'_W = P'_p$, logo os coeficientes da equação no ponto assumem a forma:

$$A_p = -2; A_W = 0; A_N = 0; A_E = A_S = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Vértice à direita em cima:

$P'_N = P'_E = P'_p$, logo os coeficientes da equação no ponto assumem a forma:

$$A_p = -2; A_E = 0; A_N = 0; A_W = A_S = -1.$$

$$B_p = \frac{\rho \Delta x}{\Delta t} (U_{est E} - U_{est P} + V_{est N} - V_{est P}).$$

Para os volumes fantasmas (externos à parede) não se pode utilizar a Equação (4.13), já que ela só é válida para os volumes no interior da malha. Dessa forma através da utilização das condições de contorno, pode-se encontrar as equações válidas para esses volumes.

Utilizando-se da condição de contorno $\frac{\partial P'}{\partial \eta}$ nulo nas paredes pode-se chegar à uma equação para os volumes fantasmas da seguinte maneira:

Volumes externos superiores:

Para estes volumes, a condição de contorno de derivada nula da flutuação de pressão na direção normal à parede ($\frac{\partial P'}{\partial \eta} = 0$) discretizada assume a forma $P'_p = P'_S$, logo:

$$A_p = 1; A_S = 1; A_E = A_W = A_N = B_p = 0.$$

Volumes externos inferiores:

Para estes volumes, a condição de contorno de derivada nula da flutuação de pressão na direção normal à parede ($\frac{\partial P'}{\partial \eta} = 0$) discretizada assume a forma $P'_p = P'_N$, logo:

$$A_p = 1; A_N = 1; A_E = A_W = A_S = B_p = 0.$$

Volumes externos à esquerda:

Utilizando-se do mesmo raciocínio tem-se que $P'_p = P'_E$, de modo que:

$$A_p = 1; A_E = 1; A_W = A_N = A_S = B_p = 0.$$

Volumes externos à direita:

E por fim para esses pontos tem-se que $P'_p = P'_W$, logo:

$$A_p = 1; A_W = 1; A_E = A_N = A_S = B_p = 0.$$

Desta, são obtidas as equações para todos os volumes necessários para o cálculo do campo de P' . Para a resolução do sistema linear foi utilizado o algoritmo de Thomas (TDMA) linha por linha, que é um método iterativo no se deve estipular um campo de P' qualquer e ele vai corrigindo o campo de P' até que se atinja a precisão requerida.

Já de posse do campo de velocidades estimadas $U_{est\ p}$ e $V_{est\ p}$, e o campo da flutuação da pressão P' pode-se obter o campo de velocidades U^{t+dt} e V^{t+dt} através das Equações (3.23) e (3.24). Fazendo-se a integração espacial das Equações (3.23) e (3.24) e utilizando-se esquema de diferenças centradas obtém-se:

$$U_p^{t+dt} = U_{est\ p} - \frac{\Delta t}{\rho \Delta x} (P'_p - P'_W).$$

$$V_p^{t+dt} = V_{est\ p} - \frac{\Delta t}{\rho \Delta y} (P'_p - P'_S).$$

Calculados U^{t+dt} e V^{t+dt} deve-se utilizá-los para atualizar os campos de velocidade, como também deve-se atualizar o campo de pressão; sendo que de acordo coma Equação (3.14) tem-se que $P^{t+\Delta t} = P^t + P'$.

Dessa maneira, procede-se com a repetição do processo até que se atinja a condição imposta de parada; ou seja, repetindo para cada intervalo de tempo estipulado, “dt”, todo o procedimento descrito anteriormente

5. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Para a validação do código as condições utilizadas foram que o regime de operação atinja-se o estado permanente e que o escoamento fosse laminar. Para garantir a condição de regime permanente recorreu-se aos autores Aidum et al. (1991) e Chiang et al. (1998) que afirmam que o escoamento em cavidades com tampas deslizante se mantém em regime permanente até Reynolds igual a 1300, ponto em que ocorre a transição para regime instável. Segundo os mesmos autores, o escoamento se mantém laminar para número de Reynolds que podem variar de 6000 a 8000, e para número de Reynolds igual a 10000 o regime já é completamente turbulento.

Para estabelecer que o escoamento atingiu regime permanente foi utilizado o critério usado por Pinho (2006) em seu trabalho; que propõe que o ponto que onde ocorrem as maiores oscilações das velocidades u e v são em $x/L=0,7$ e $y/L=0,3$, e por isso quando garante-se que esse ponto atingiu regime permanente todos os outros o terão atingido.

As condições utilizadas para a simulação de validação do código computacional foram as seguintes:

Número de Reynolds igual a 100, 400 e 1000.

Foi utilizada uma malha uniforme de 30x30 volumes.

Foi utilizado um passo de tempo de 10^{-3} s.

Resíduo máximo tolerado para qualquer ponto da malha de 10^{-5} .

Assim como Aurio em seu trabalho desenvolvido, para observação da evolução temporal do escoamento foi plotado um gráfico mostrando a evolução das velocidades u e v em $x/l = 0,7$ e $y/l = 0,3$.

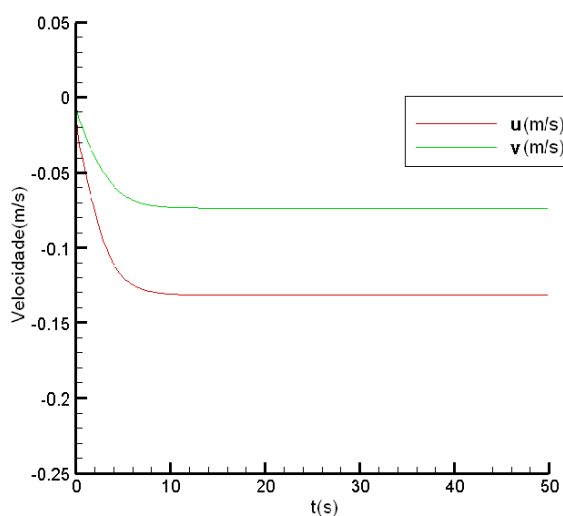


Figura 5. 1 Gráfico representando a evolução temporal das velocidades u e v em $x/l=0,7$ e $y/l=0,3$ para Reynolds igual a 100.

Para a análise do problema foi escolhido o tempo de 30s, que garante que o escoamento na cavidade atingiu regime permanente. Para a validação da simulação foram utilizadas as condições descritas anteriormente e foi feito um corte em $x/l = 0,5$ para compararmos o perfil de velocidades u , e um corte em $y/l = 0,5$ para possibilitar comparações dos perfis de velocidades v com Ghia et al. (1982), que podem ser observadas nas Figuras (5.2) e (5.3).

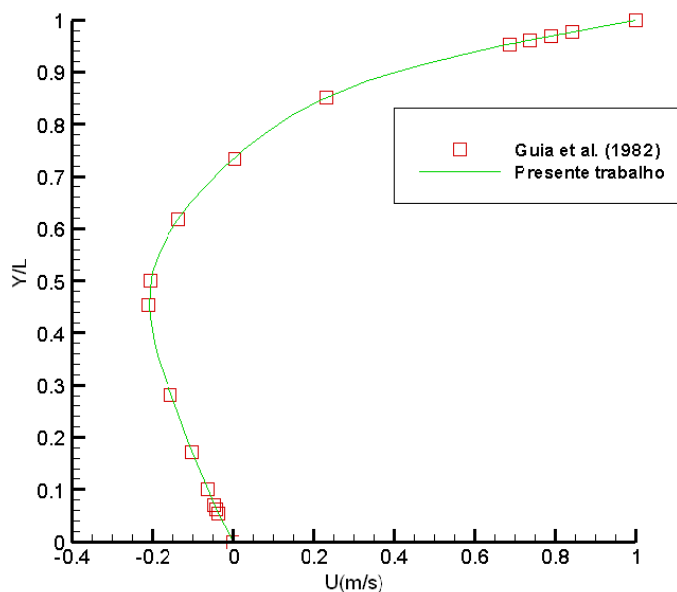


Figura 5.2 Validação do modelo segundo Ghia et al (1982) para o perfil de velocidade u em $x/L=0,5$ com Reynolds igual a 100.

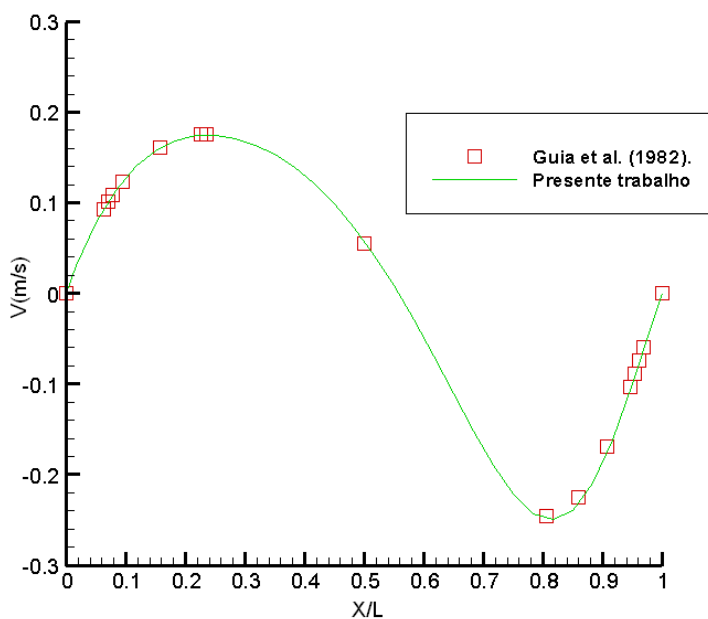


Figura 5.3 : Validação do modelo segundo Guia e al (1982) para o perfil de velocidade v em $y/L=0,5$ com Reynolds igual a 100.

Percebe-se que para Reynolds igual a 100 com uma malha de 30x30 foram obtidos resultados, não sendo necessária a utilização de malha mais refinada.

Para melhor visualização dos campos de velocidade U e V , das linhas de corrente e do campo de pressão foi realizada uma simulação com uma malha 110x110 como mostrado a seguir nas Figuras (5.4) à (5.7).

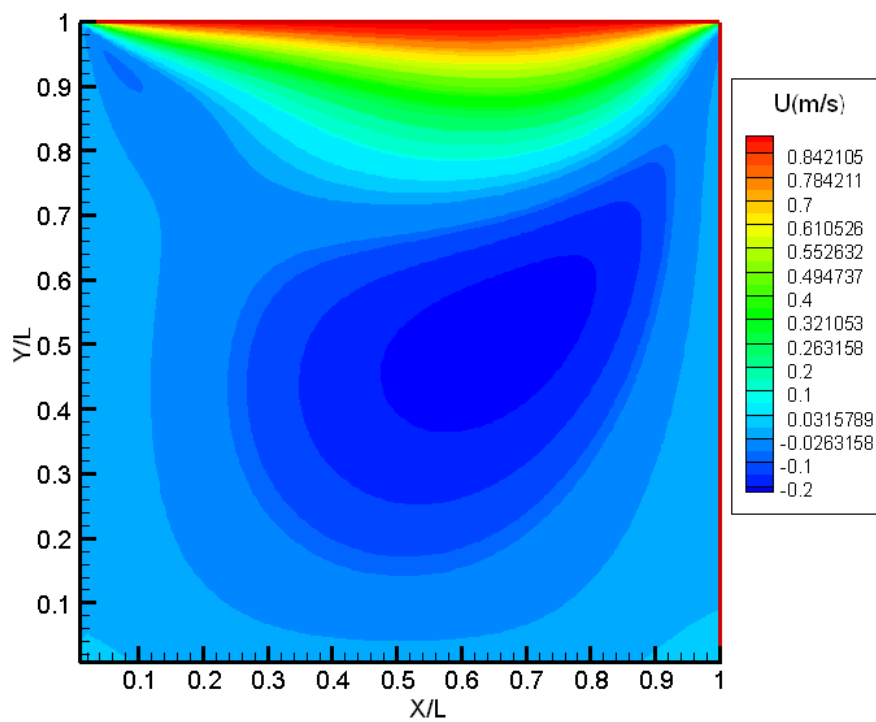


Figura 5.4 Campo de velocidades U para Reynolds 100 utilizando-se uma malha de 110×110 .

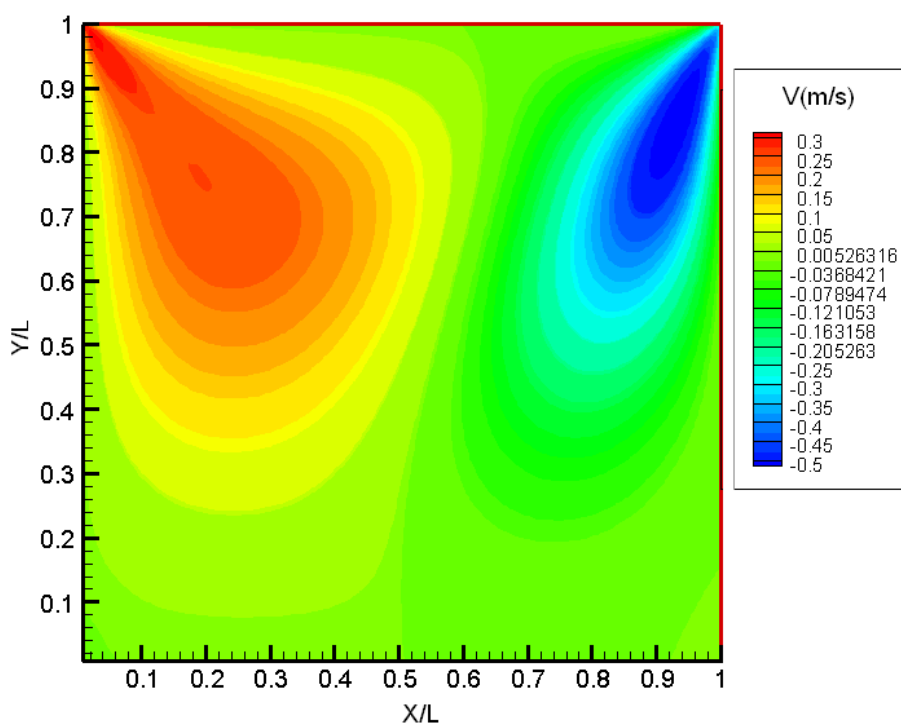


Figura 5.5 Campo de velocidades V para Reynolds 100 utilizando-se uma malha de 110×110 .

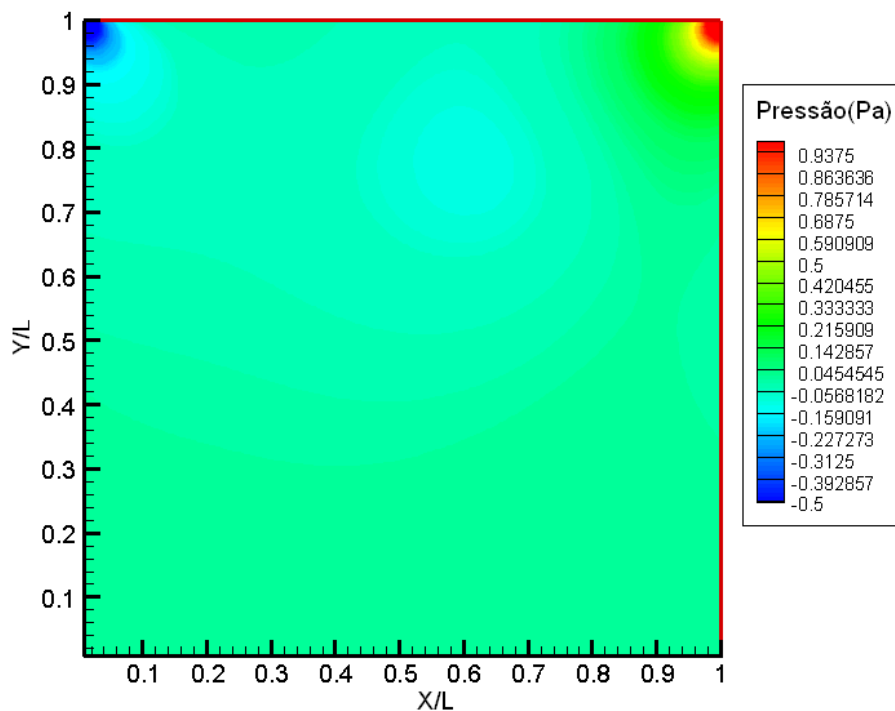


Figura 5.6 Campo de pressão dinamica para Reynolds 100 utilizando-se uma malha de 110x110.

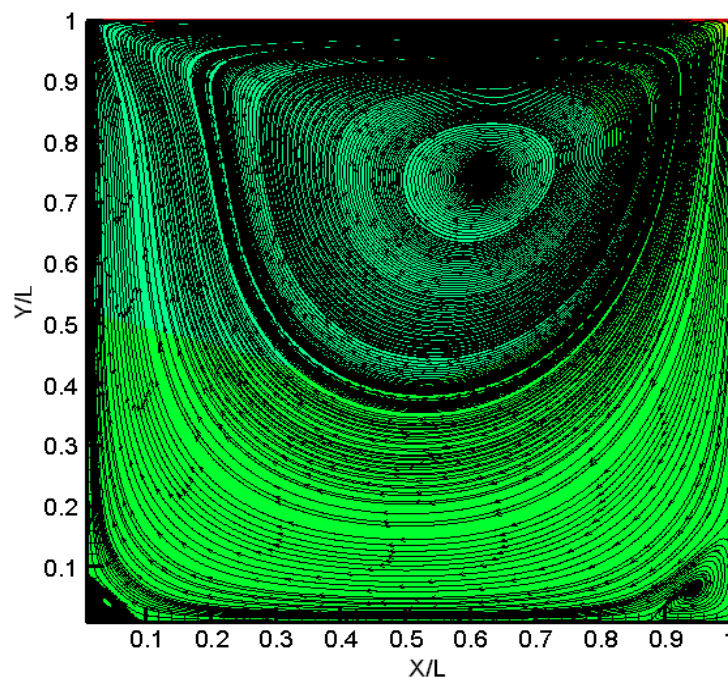


Figura 5.7 Visualização das linhas de corrente para Reynolds 100 utilizando-se uma malha de 110x110.

Pela análise das linhas de corrente, Figura (5.7), precebe-se a presença de um grande vórtice que ocupa quase toda a cavidade (que tem seu núcleo descentrado em relação ao centro da cavidade), conhecido como vórtice primário e de dois outros vórtices de dimensões bem menores localizados nas quinas inferiores. Esses dois vórtices menores são chamados de vórtices secundários, sendo que os mesmos ficam localizados à esquerda e à direita da cavidade e são chamados, respectivamente, de vórtice secundário anterior e posterior.

Através da figura 5.4, que mostra o campo de velocidades U , comprova-se que assim com o esperado as velocidades da direção x são maiores para pontos mais próximos da tampa (chegando á valores bem próximos á velocidade da tampa para pontos que estão logo abaixo dela) e diminuem á medida que se afastam dela. Um pouco mais em baixo temos a região do vórtice primário (vórtice central), em que as velocidades em X têm o mesmo sentido da tampa para os pontos acima do centro do vórtice e o sentido contrário para os pontos abaixo do centro. Na região dos vórtices secundários anterior e posterior observa-se um campo de velocidade intermediário, em que as velocidades absoluta dos pontos pertencentes aos vórtices secundários são em geral menores do que as velocidades dos pontos pertencentes ao vórtice primário e dos pontos próximos à tampa. As velocidades são maiores no vórtice primário e menores nos vórtices secundários.

Já na Figura (5.5), que mostra as velocidades na direção y , percebe-se que quando o movimento do fluido é descendente (lado direito da cavidade) são obtidas velocidades maiores em módulo em relação ao movimento do fluido em ascensão (lado esquerdo da cavidade).

No campo de pressão, Figura (5.6), percebe-se uma região com alta pressão em regiões próximas ao vértice superior direito, devido á este ser um ponto de estagnação; e uma região de baixa pressão na quina superior esquerda, sendo este ponto um ponto de rarefação. No centro do vórtice primário pode-se perceber uma região de baixa pressão (pressões negativas na região) como era previsto; já que esta condição é sempre verdadeira para o interior de vórtices.

De acordo com a literatura , com o aumento do número de Reynolds o escoamento levará mais tempo para atingir o regime permanente, e será necessária a utilização de uma malha mais refinada para que a mesma precisão seja atingida. A fim de comprovar tais fatos pode-se fazer o mesmo gráfico feito na Figura (5.1), que mostra a evolução do escoamento no ponto $x/L = 0,7$ e $y/L = 0,3$ até atingir regime permanente, só que para Reynolds 400 e 1000 respectivamente. O comportamento temporal dos sinais dos componentes de velocidade, nos dados das Figuras (5.8) e (5.9), confirmam que o tempo de desenvolvimento do escoamento é maior para maiores números de Reynolds.

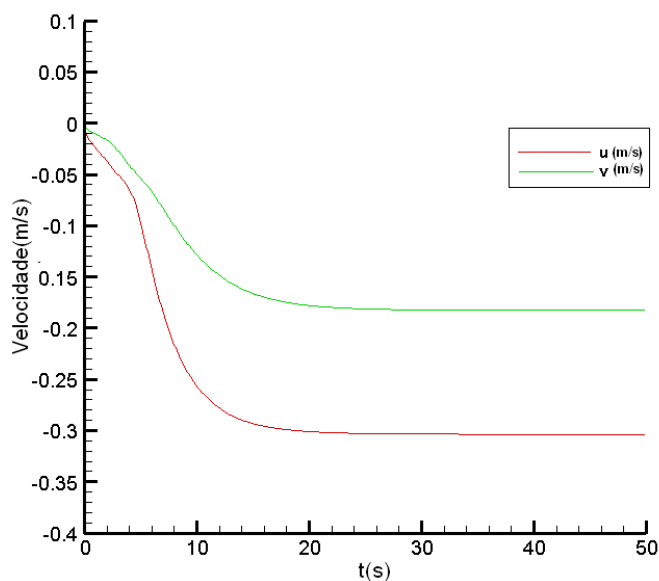


Figura 5.8 Gráfico representando a evolução temporal das velocidades u e v em $x/l = 0,7$ e $y/l = 0,3$ para Reynolds igual á 400.

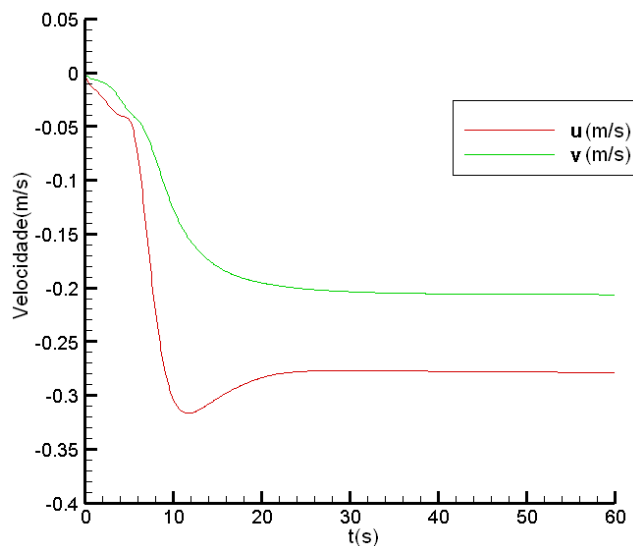


Figura 5.9 Gráfico representando a evolução temporal das velocidades u e v em $x/l = 0,7$ e $y/l = 0,3$ para Reynolds igual á 1000.

Para comprovar os efeitos do tamanho e grau de refino da malha nos resultados para escoamentos com diferentes números de Reynolds, optou-se por simular o escoamento para diferentes números de Reynolds com malha de 20×20 , 40×40 e 60×60 . Foram utilizados os Reynolds 100, 400 e 1000 para as três malhas e os resultados encontrados foram comparados com os resultados obtidos por Guia et al. (1982). Os resultados para as três malhas mostrados nas Figuras (5.10) a (5.15):

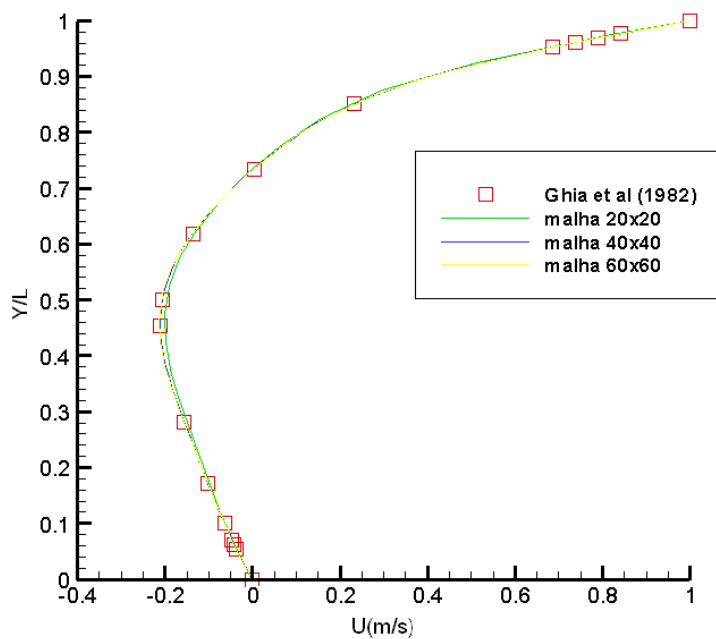


Figura 5.10 Comparação das velocidades U na posição $x/L = 0,5$ para diferentes tamanhos de malha utilizando-se Reynolds 100.

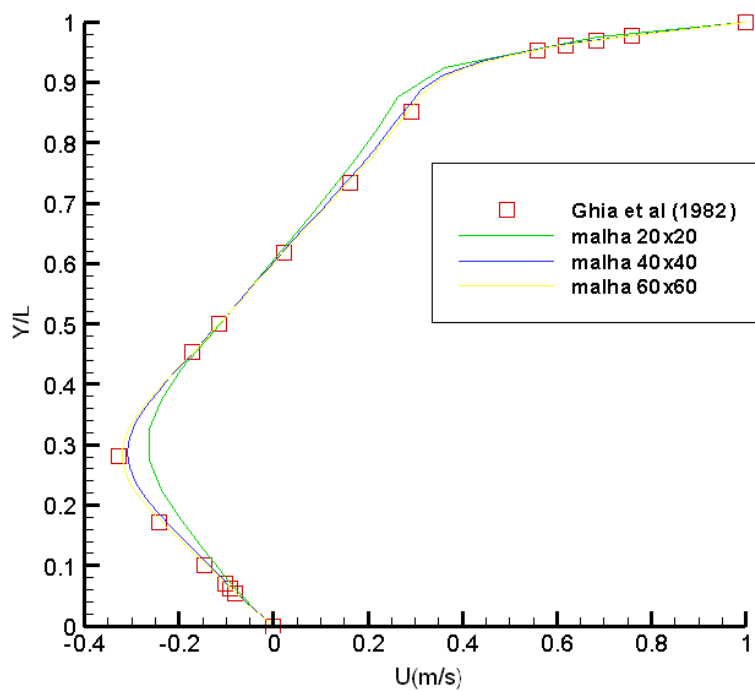


Figura 5.11 Comparação das velocidades U na posição $x/L = 0,5$ para diferentes tamanhos de malha utilizando-se Reynolds 400.

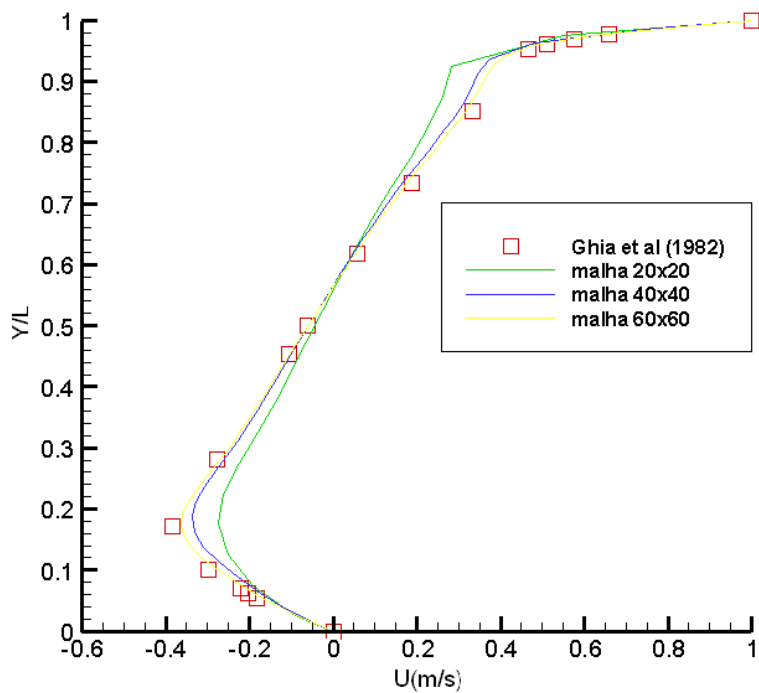


Figura 5.12 Comparação das velocidades U na posição $x/L = 0,5$ para diferentes tamanhos de malha utilizando-se Reynolds 1000.

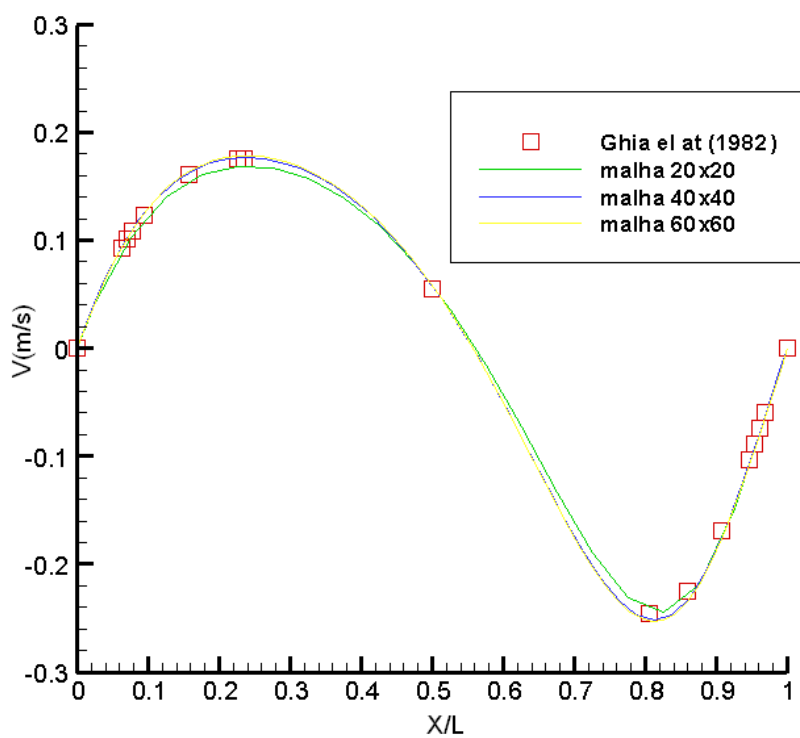


Figura 5.13 Comparação das velocidades V na posição $y/L = 0,5$ para diferentes tamanhos de malha utilizando-se Reynolds 100.

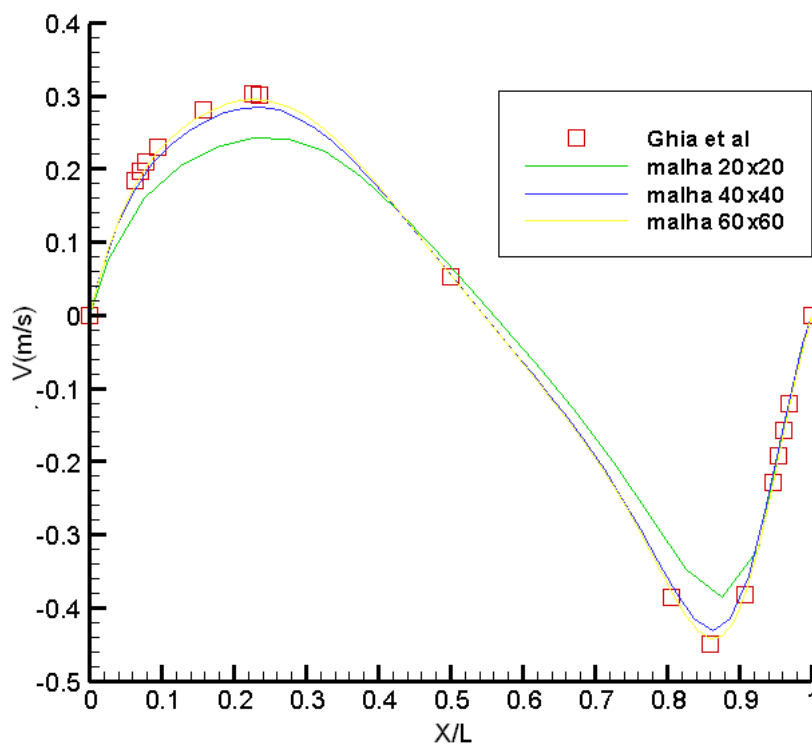


Figura 5.14 Comparação das velocidades V na posição $y/L = 0,5$ para diferentes tamanhos de malha utilizando-se Reynolds 400.

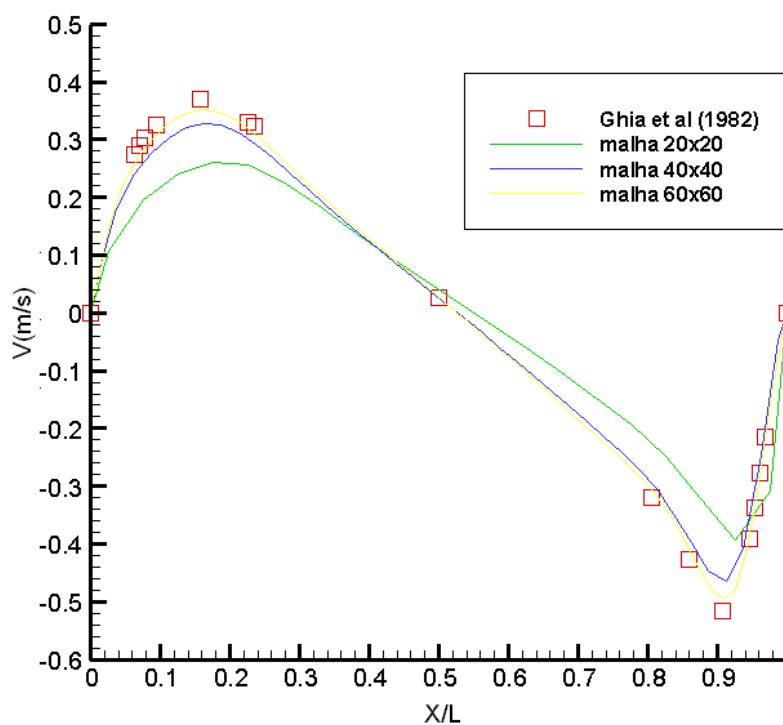


Figura 5.15 Comparação das velocidades V na posição $y/L = 0,5$ para diferentes tamanhos de malha utilizando-se Reynolds 1000.

Quando o escoamento foi simulado para Reynolds 100 com as malhas de 20x20, 40x40 e 60x60 percebeu-se uma diferença muito pequena nos resultados encontrados para as

velocidades U , Figura (5.10), e V , Figura (5.13), quando comparados aos valores encontrados por Ghia et al(1982). Deste modo, o uso de qualquer uma das malhas pode ser considerado uma boa aproximação, e dessa forma vê-se que para Reynolds 100 não é necessária utilização de uma malha muito refinada, a menos que a exatidão requerida seja alta.

Ao se comparar as velocidades U em $x/L = 0,5$, Figura (5.11), e V em $y/L = 0,5$, Figura (5.14), para Reynolds 400 é claramente visível que a malha de 20×20 apresentou uma diferença grande quando comparado com os valores encontrados por Ghia et al(1982). Já a malha de 40×40 se aproximou relativamente bem dos valores informados por Ghia et al(1982), e com a malha de 60×60 obteve-se uma boa precisão dos campos de velocidade.

No último caso, para perceber a diferença do refino da malha para Reynolds diferentes, foram testadas as três malhas (20×20 , 40×40 e 60×60) para Reynolds 1000. Como pode ser observado nos resultados nas Figuras (5.12) e (5.15), nenhuma delas se aproximou muito bem dos resultados obtidos por Ghia et al(1982); sendo que as malhas de 20×20 e a de 40×40 apresentaram erros significativos. Em contrapartida, a malha de 60×60 apresentou erros menores.

Observa-se nas figuras que todas as três malhas usadas apresentam um erro relativamente pequeno para o escoamento com número de Reynolds 100. Além disso, nenhuma das três malhas apresentam resultados com boa exatidão para o escoamento com número de Reynolds 1000. Através dos testes realizados e dos resultados obtidos, nas Figuras (5.10) à (5.15) observou-se que à medida que se aumenta o número de Reynolds do escoamento é necessário refinar a malha para que sejam obtidos bons resultados. Dessa forma, não existe a garantia de que uma malha que gerou bons resultados para um determinado número de Reynolds (em geral menor) irá gerar bons resultados para um número de Reynolds maior.

6. CONCLUSÃO

No presente trabalho tinha-se como objetivo a elaboração de um modelo computacional para resolver o problema do escoamento no interior de uma cavidade com tampa deslizante. A partir dessa necessidade foi desenvolvido o código computacional e o mesmo foi validado através dos resultados obtidos por Ghia et al(1982).

Através do modelo computacional desenvolvido neste trabalho foi possível perceber e comprovar várias teorias estudadas em mecânica dos fluidos. Por exemplo, foi observado que em um ponto de estagnação realmente tem-se uma região de alta pressão, que o centro de um vórtice corresponde à uma região de baixa pressão, que as velocidades do fluido próximas às paredes apresentam magnitudes próximas à magnitude das velocidades das paredes, como também foi possível tirar uma série de outras observações que são citadas na literatura .

O código computacional desenvolvido apresentou bons resultados para o problema da cavidade bidimensional, sendo que para isso é preciso ajustar alguns parâmetros que devem ser modificados à medida que se emprega diferentes números de Reynolds, como os parâmetros: número de elementos da malha, passo de tempo e tolerância para satisfação da conservação da massa.

7. AGRADECIMENTOS

Agradecemos á todos os professores do laboratório MFLAB da Universidade Federal de Uberlândia pela ajuda na realização do trabalho, e também ao apoio financeiro dado pelos órgãos FAPEMIG, CNPq e pela empresa Petrobrás, sem os quais não seria possível a realização do trabalho.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Ghia, U., Ghia, K.N. and Shin, C.T., “ High-Re Solutions for Incompressible Flow Using the Navier-Stokes equations and a Multigrid Method”, J. Comput. Phys. 48, pp. 387-411.
- Kim, J. and Moin, P., 1985, “Application of a Fractional Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations”, J. Comp. Phys., 59, pp. 308-323.
- Maliska, C.R. (2003) - “Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional”, 2ª edição revista e ampliada. Ed. LTC – Livros Técnicos e Científicos.
- Patankar, S.V., 1980, ”Numerical Heat transfer and Fluid Flow”, Hemisphere Publishing Corporation, New York.