

DESENVOLVIMENTO DE UMA FERRAMENTA COMPUTACIONAL EDUCACIONAL PARA SIMULAÇÃO DE PROBLEMAS DE DINÂMICA DOS FLUIDOS

SÉRGIO AUGUSTO ALBINO VIEIRA¹, ELIE LUIS MARTÍNEZ PADILLA², ARISTEU
DA SILVEIRA NETO³

RESUMO

O presente trabalho apresenta os avanços relacionados ao desenvolvimento de uma ferramenta computacional com fins educacionais que permita a solução numérica de problemas simplificados de mecânica dos fluidos, com e sem transferência de calor. O programa em desenvolvimento deve possibilitar a solução de problemas transientes bidimensionais considerando fluidos incompressíveis e newtonianos em coordenadas cartesianas e cilíndricas. O código numérico é baseado na solução bidimensional das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação de energia (Bird et al. 2002), usando o método dos volumes finitos (Patankar, 1980) com métodos de primeira e segunda ordem de aproximação (Padilla e Silveira Neto, 2005; Padilla et al. 2005). As linguagens escolhidas para desenvolvimento do software são C e C++ (Schildt, 1996). Até o presente momento, a linguagem de desenvolvimento escolhida, para o desenvolvimento da interface gráfica, tem atendido satisfatoriamente às exigências. O desenvolvimento desta ferramenta deve servir como base para ampliação das funcionalidades do software, possibilitando a solução de escoamentos externos. Por outro lado, o código numérico preliminar (isotérmico e em processo de validação) deve continuar seu desenvolvimento com a finalidade de integrar a equação de energia.

1 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 5P, Uberlândia - MG, CEP 38400-902 – sergioaugustoav@gmail.com

2 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 5P, Uberlândia - MG, CEP 38400-902 – epadilla@mecanica.ufu.br

3 – FEMEC, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121 - Campus Santa Mônica, Bloco 5P, Uberlândia - MG, CEP 38400-902 – aristeus@mecanica.ufu.br

ABSTRACT

This paper presents the advances related to the development of a computational tool with educational purposes that allows the numeric solution of simplified problems from fluid mechanics, with and without heat transfer. The program in development should enable the solution of two-dimensional transient problems considering incompressible and Newtonian fluids in Cartesian and cylindrical coordinates. The numeric code is based on the two-dimensional solution of the Navier-Stokes equations and the equation of energy conservation (Bird et al. 2002), using the finite volume method (Patankar, 1980) with first and second order methods of approximation (Padilla and Silveira Neto, 2005; Padilla et al. 2005). The languages chosen for the software development are C and C++ (Schildt, 1996). Until the present moment, the language chosen for development of the graphic interface has satisfactorily met the requirements. The development of this tool should prove itself useful as base for the extension of the numeric method, enabling the solution of external flows. Moreover, the preliminary numeric code (isothermic and in validation process) should continue its development with the aim of integrating the energy equation.

PALAVRAS-CHAVE: simulação, software, mecânica dos fluidos.

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho apresenta os avanços relacionados ao desenvolvimento de uma ferramenta computacional com fins educacionais que permita a solução numérica de problemas simplificados de mecânica dos fluidos, com e sem transferência de calor, e permita também o confronto entre as aulas teóricas e práticas com os resultados das simulações.

A idéia de desenvolver este trabalho partiu da necessidade em auxiliar o ensino das disciplinas de mecânica dos fluidos e transferência de calor nos cursos de

graduação e pós-graduação de engenharia mecânica e mecatrônica. Espera-se que através do uso desta ferramenta os alunos destas disciplinas possam apresentar um envolvimento maior em seu estudo. Certamente, esta ferramenta poderá se tornar útil para outros cursos e disciplinas.

2. METODOLOGIA

O programa em desenvolvimento deve possibilitar a solução de problemas transientes bidimensionais considerando fluidos incompressíveis e newtonianos em

coordenadas cartesianas e cilíndricas. Na primeira versão será possível resolver uma série de problemas de escoamentos internos isotérmicos e problemas de

convecção natural e mista no interior de cavidades retangulares.

Alguns exemplos citados acima são apresentados a seguir:

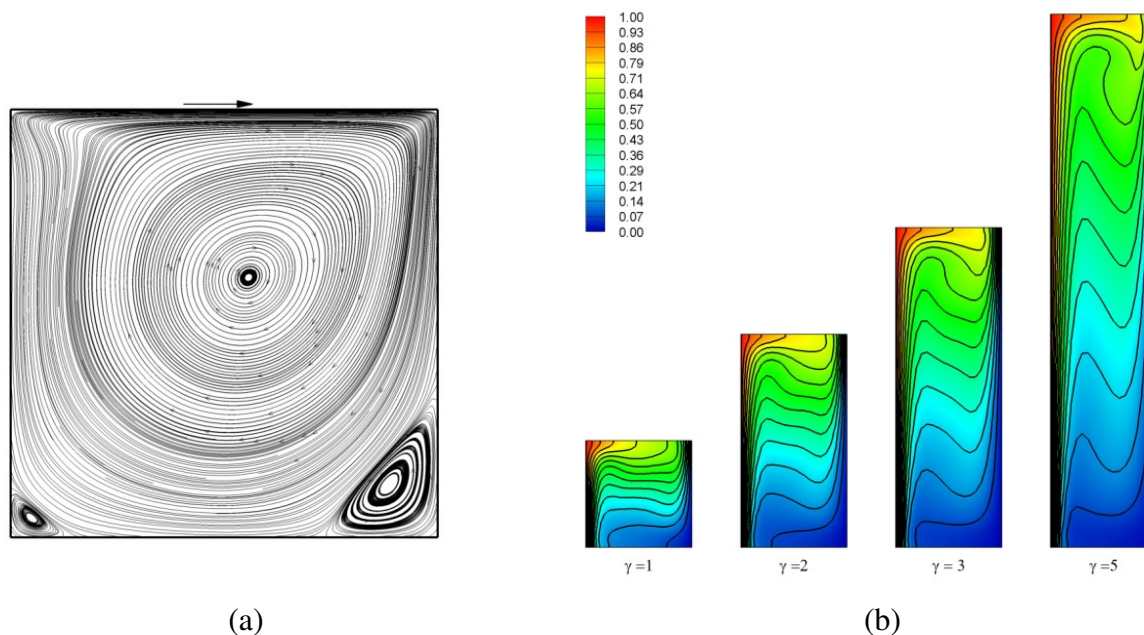


Figura 1 – Escoamento no interior de cavidades retangulares; (a) escoamento isotérmico em cavidades quadradas, (b) convecção natural com ΔT nas paredes da direção horizontal.

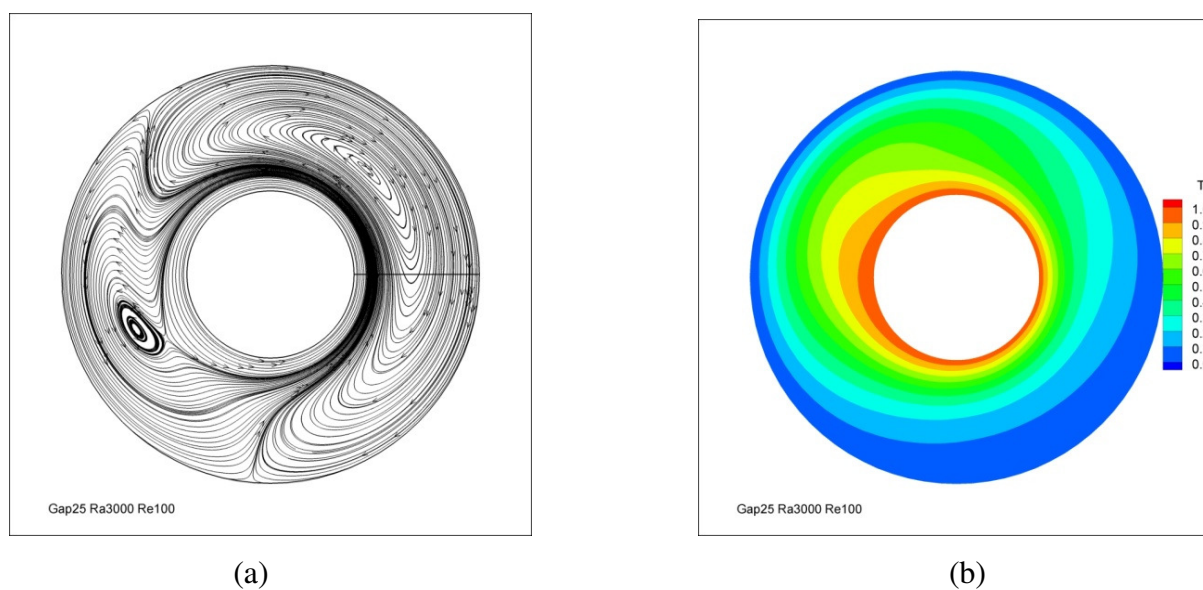


Figura 2 – Escoamento em convecção mista entre cilindros concêntricos rotativos e aquecidos; (a) linhas de corrente, (b) campos de temperatura.

- a. Escoamento isotérmico no interior de uma cavidade quadrada com tampa deslizante (Figura 1a), onde o escoamento interno é forçado pela movimentação da tampa formando uma célula recirculante principal e duas ou três células secundárias;
- b. Convecção natural em cavidades retangulares (Figura 1b), onde o escoamento é gerado pela diferença de temperatura ΔT entre as paredes;
- c. Convecção mista entre cilindros concêntricos (Figura 2), onde o escoamento é gerado pela rotação do cilindro interno e pela diferença de temperatura imposta nas superfícies dos cilindros.

2.1 CÓDIGO NUMÉRICO

O código numérico é baseado na solução bidimensional das equações de Navier-Stokes e da equação de conservação de energia usando o método dos volumes finitos (Patankar, 1980) com esquemas e métodos de primeira e segunda ordem de aproximação (Padilla e Silveira Neto, 2005; Padilla et al., 2005). Depois de feita uma revisão bibliográfica sobre linguagens de programação, foram

escolhidas para o desenvolvimento do software a C e C++ (Schildt, 1996).

2.2 MODELAGEM MATEMÁTICA

As equações que modelam a dinâmica dos escoamentos, objeto do presente estudo, são aquelas que representam a conservação da massa, o balanço da quantidade de movimento e a conservação da energia (Bird et al. 2002).

- Equação da Conservação da Massa

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_j} = 0 \quad (1)$$

- Equação do Balanço da Quantidade de Movimento

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial p}{\partial x_j} + \frac{\rho}{\rho_0} g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (2)$$

O escoamento é considerado incompressível com propriedades físicas constantes, com exceção do termo de empuxo ligado a variação de densidade causada pela expansão térmica do fluido. Utilizando-se da definição do coeficiente de expansão térmica, obtém-se uma nova

expressão para o balanço da quantidade de movimento:

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \frac{\partial(u_i u_j)}{\partial x_j} = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial \check{p}}{\partial x_j} - \beta \Delta T g_i + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\nu \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3)$$

- Equação da Conservação da Energia

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \frac{\partial(u_j T)}{\partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\alpha \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \quad (4)$$

onde u , p e T representam os campos da velocidade, pressão e temperatura, respectivamente. g_i é a aceleração da gravidade.

2.3 METODOLOGIA NUMÉRICA

O método numérico utilizado para a discretização espacial consiste na metodologia de volumes finitos (Patankar, 1980; Maliska, 1995) com malhas deslocadas. Para a discretização temporal são utilizados os métodos de Adams-Bashfort (2ª ordem) e Euler, e na discretização espacial os esquemas de diferenças centradas (2ª ordem) e upwind. Para o acoplamento pressão-velocidade é utilizado o método dos passos fracionados (Kim e Moin, 1985), que garante

conservação de massa com uma única interação. Quanto à solução dos sistemas lineares serão utilizados o método GCPC (Golub e VanLoan, 1990), gradiente conjugado pré-condicionado, e o método SIP (Stone, 1968), procedimento fortemente implícito.

2.4 INTERFACE GRÁFICA

Após feitas as consultas e revisões bibliográficas necessárias para escolha dos métodos numéricos e linguagens de programação adequadas, escolheu-se as linguagens C e C++, como já mencionado anteriormente, para o desenvolvimento da interface em questão. Para isso, foi utilizado um programa do tipo IDE (Integrated Development Environment ou Ambiente Integrado de Desenvolvimento) que faz uso da técnica RAD (Rapid Application Development ou Desenvolvimento Rápido de Aplicativos) que visa à maior produtividade dos desenvolvedores.

A interface desenvolvida deve ser intuitiva e com alto desempenho quanto à velocidade de execução e memória ocupada. Estas características tornam a ferramenta bastante ágil e permitem ao usuário interagir com o software sem a necessidade de ser experiente.

A interface é estruturada em dois módulos principais que dividem os

sistemas de coordenadas usados e três sub-módulos de operação. Os módulos principais são coordenadas retangulares e coordenadas cilíndricas, onde cada um possui os três sub-módulos que são o pré-processador, processador e pós-processador.

2.4.1 PRÉ-PROCESSADOR

O primeiro módulo da interface é o pré-processador. Nesta parte determina-se a geometria, tipo de malha, condições temporais e o tipo de caso a ser simulado. É possível visualizar, depois de informados os devidos parâmetros, exemplos da geometria, malha e tipo de caso. Tais visualizações tornam a compreensão do caso a ser estudado mais fácil. Esta parte do software gera um arquivo de dados que será utilizado para alimentar a execução do código numérico.

2.4.2 PROCESSADOR

O segundo módulo do programa é o processador. Neste módulo é dado o comando para que a simulação especificada no módulo anterior se inicie. Quando a simulação é iniciada uma janela de acompanhamento é aberta para monitoração dos cálculos e da convergência do caso a ser estudado.

2.4.3 PÓS-PROCESSADOR

O terceiro módulo de operação é um pós-processador para uma análise inicial dos resultados obtidos através de gráficos relativos ao escoamento.

3. RESULTADOS E DISCUSSÃO

O desenvolvimento da ferramenta computacional está sendo realizado em duas frentes: código numérico para solução das equações governantes e interface gráfica.

3.1 CÓDIGO NUMÉRICO

Como comentado anteriormente, as equações foram discretizadas usando o método dos volumes finitos sobre malha deslocada com: esquemas de interpolação espacial de primeira (upwind) e segunda ordem (diferenças centradas); método de discretização temporal de segunda ordem (Adams-Bashforth).

Para acoplar os campos de velocidade com o campo de pressão foi usado o método dos passos fracionados, na sua versão de dois passos. As implementações da solução numérica das equações governantes foram realizadas e o processo de validação foi iniciado. Inicialmente, o problema escolhido para a

validação do código numérico foi o da cavidade com tampa deslizante.

3.2 INTERFACE GRÁFICA

Até o momento só foi desenvolvido o módulo referente às coordenadas retangulares. Dentro deste módulo há um sub-módulo pronto, o pré-processador, e um módulo em estado avançado de desenvolvimento, o processador, sendo que já é possível utilizar a interface para dar início à simulação.

Por enquanto, o pós-processamento dos resultados deve ser feito através de um software adicional. Assim que o desenvolvimento do sub-módulo de processamento for concluído será dado início ao pós-processador.

Toda a interface desenvolvida até agora tem se mostrado bastante intuitiva. Além disso, o programa apresenta a descrição de cada componente quando o cursor do mouse é posicionado sobre o mesmo.

3.2.1 PRÉ-PROCESSADOR

Figura 3 – Pré-processador para coordenadas retangulares

O primeiro módulo de operação acessível ao usuário é o pré-processador

(Figura 3). Quando o programa é iniciado é este o módulo em que ele é aberto. Nesta

parte devem ser configuradas as características do problema a ser simulado. O pré-processador é dividido em quatro grupos de características, sendo eles geometria, malha, informações do tempo e tipo de caso. Cada grupo destes só poder ser acessado depois de informadas todas as características do grupo anterior.

O primeiro grupo a ter suas características definidas é o grupo

geometria. Nele devem ser fornecidas as informações relativas ao tamanho do domínio. Depois de fornecidos os dados é possível fazer a visualização do mesmo para certificar que a geometria foi escolhida corretamente. Ao final do grupo geometria há um botão de confirmação que habilita a próxima etapa para configuração, a definição da malha.

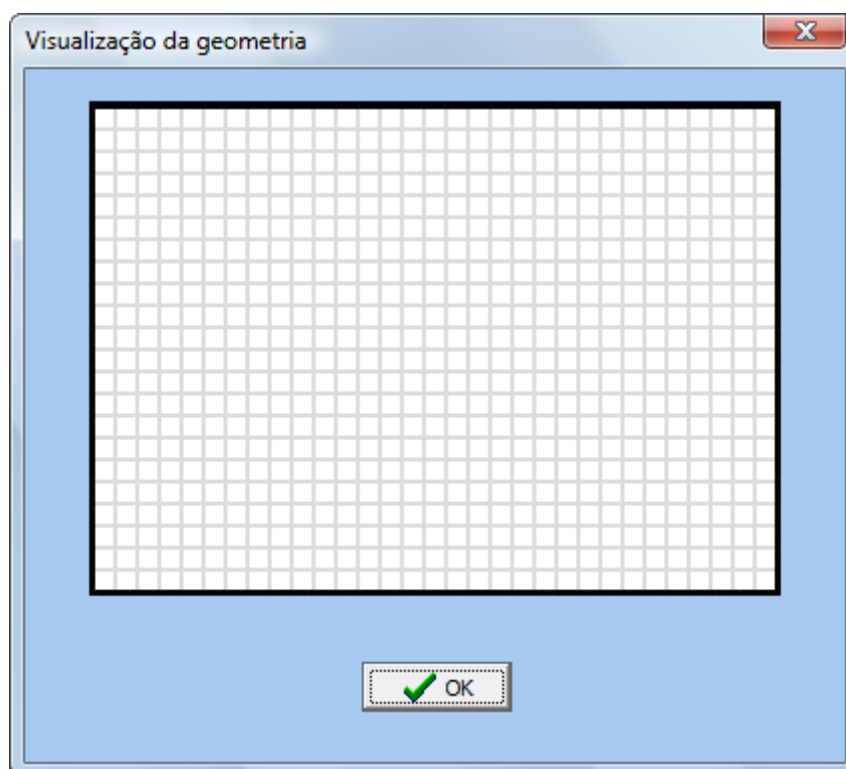


Figura 4 – Janela de visualização da geometria para um domínio $L=3$ m e $H=1$ m.

No grupo de definição malha há duas opções iniciais de escolha, uniforme (Figura 5) e não uniforme (Figura 6), que determinam o tipo de malha a ser utilizada na simulação. Quando se escolhe o tipo de malha, os campos para entrada da

quantidade de células em cada uma das direções para o tipo selecionado são habilitados. Depois de fornecidos os dados em questão, é possível fazer a visualização da malha para checar se esta foi definida

como desejado clicando no botão “Visualizar”.

Na janela de visualização da malha (Figura 4) é possível, além da visualização da mesma, salvar uma imagem da malha. Caso a malha definida não esteja de acordo

com o desejado, basta fechar a janela de visualização e redefini-la. Após definidas as configurações da malha pode-se prosseguir para o próximo grupo de dados através do botão de confirmação.

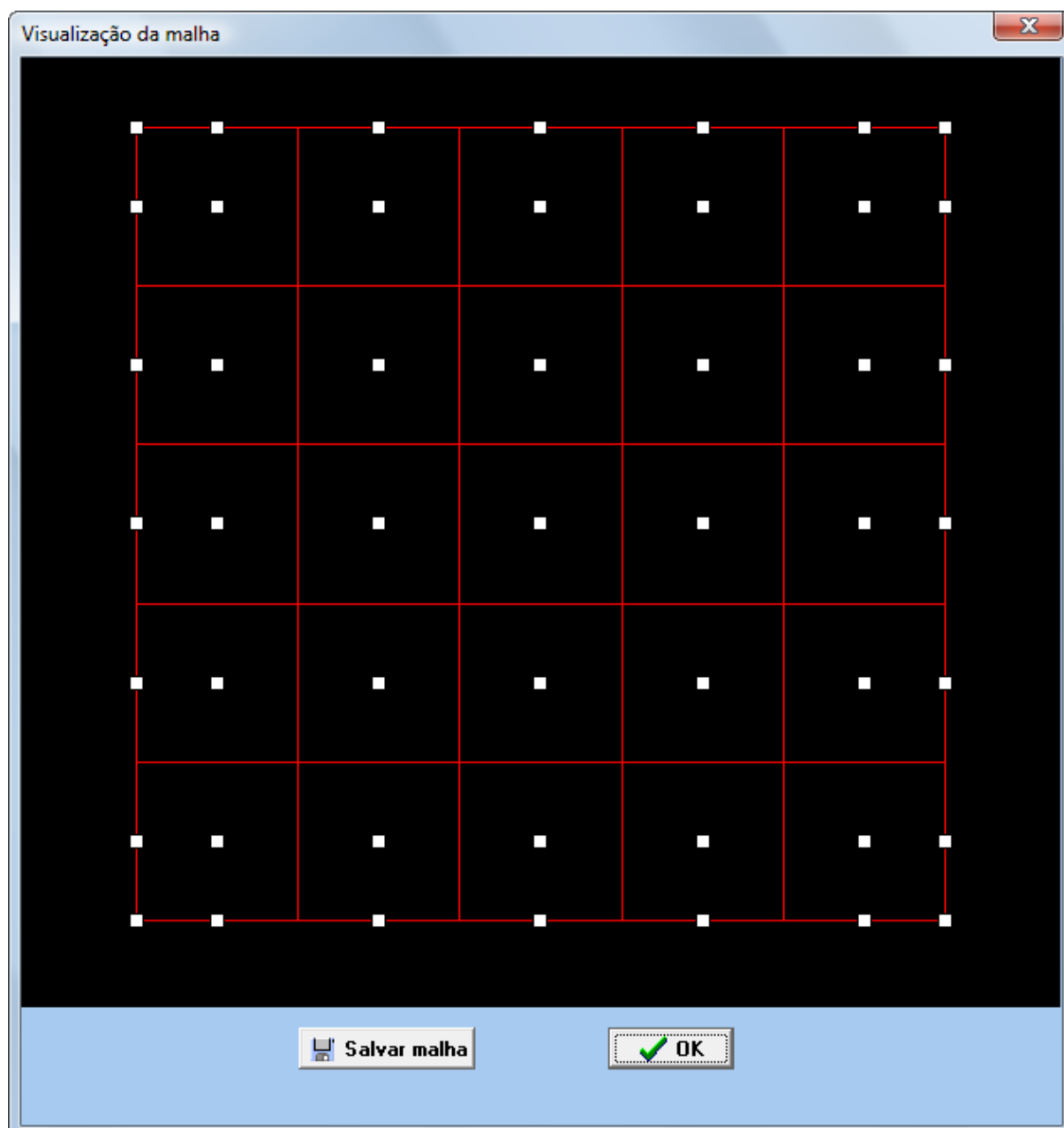


Figura 5 – Janela de visualização para uma malha uniforme com $M=5$ e $N=5$.

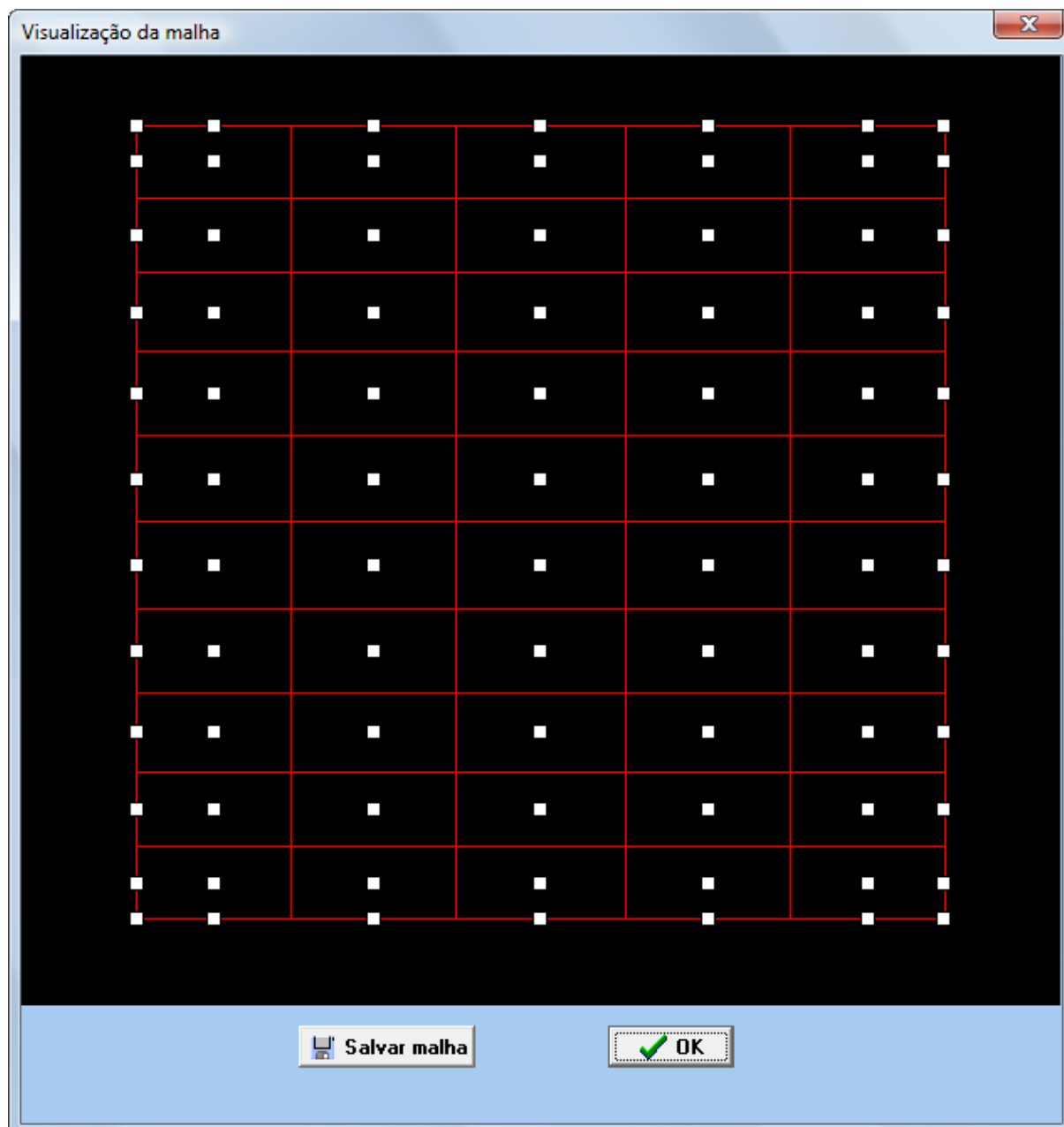


Figura 6 – Janela de visualização para uma malha não uniforme com $M=5$ e $N=10$.

O próximo grupo na seqüência é relativo ao tempo. Neste grupo encontram-se apenas três campos disponíveis. Os dois primeiros campos são referentes ao problema que se quer analisar, sendo eles tempo total de simulação e passo de tempo inicial.

O ultimo campo é referente ao pós-processamento dos resultados, pois é este campo que controla o intervalo de tempo em que serão criados os arquivos de saída com as informações desejadas sobre o escoamento.

Mais uma vez, depois de informados todos os dados, um botão de confirmação leva ao próximo passo.

O último grupo de opções a serem configuradas no pré-processador é o tipo de caso. Este grupo é dividido em duas partes.

Na sua parte principal são determinadas algumas constantes relativas ao problema em geral, como aceleração da gravidade, densidade do fluido e viscosidade cinemática do fluido, bem como o prefixo do nome dos arquivos de saída.

A segunda parte do grupo é relativa a qual caso será simulado, como, por exemplo, a cavidade com tampa deslizante que está sendo usado para validação do código. Para abrir esta parte basta clicar no botão com o nome do caso e uma janela para escolha dos parâmetros específicos deste será aberta.

Nesta janela específica se encontram as outras opções de configuração e também uma imagem ilustrativa do problema (Figura 7). Para o caso em questão há a possibilidade de escolher qual tampa será a deslizante e o respectivo número de Reynolds desejado na região e as características quanto as condições de temperatura.

Para configuração das condições de temperatura deve ser escolhido se o problema será isotérmico ou não, sendo que, para o caso de ser não isotérmico, quatro campos adicionais são habilitados onde se deve entrar com os valores de temperatura de cada parede, e as constantes α e β .

Encerradas todas as configurações específicas referentes ao caso, basta clicar no botão de confirmação para retornar à tela principal do pré-processador.

Ao final deste grupo há o último botão de confirmação que encerra a definição do caso a ser estudado. Quando o botão de confirmação é acionado todas as características definidas – geometria, malha, tempo, tipo de caso – são gravadas em um arquivo .dat. O arquivo .dat consiste em um arquivo de texto onde estão presentes as configurações acima citadas e alguns campos para orientar o usuário. A ordem que os dados estão organizados no arquivo correspondem à ordem seguida pelo código numérico. Juntamente com a criação do arquivo .dat, o pré-processador desabilita todos os campos e opções, retornando ao seu estado inicial.

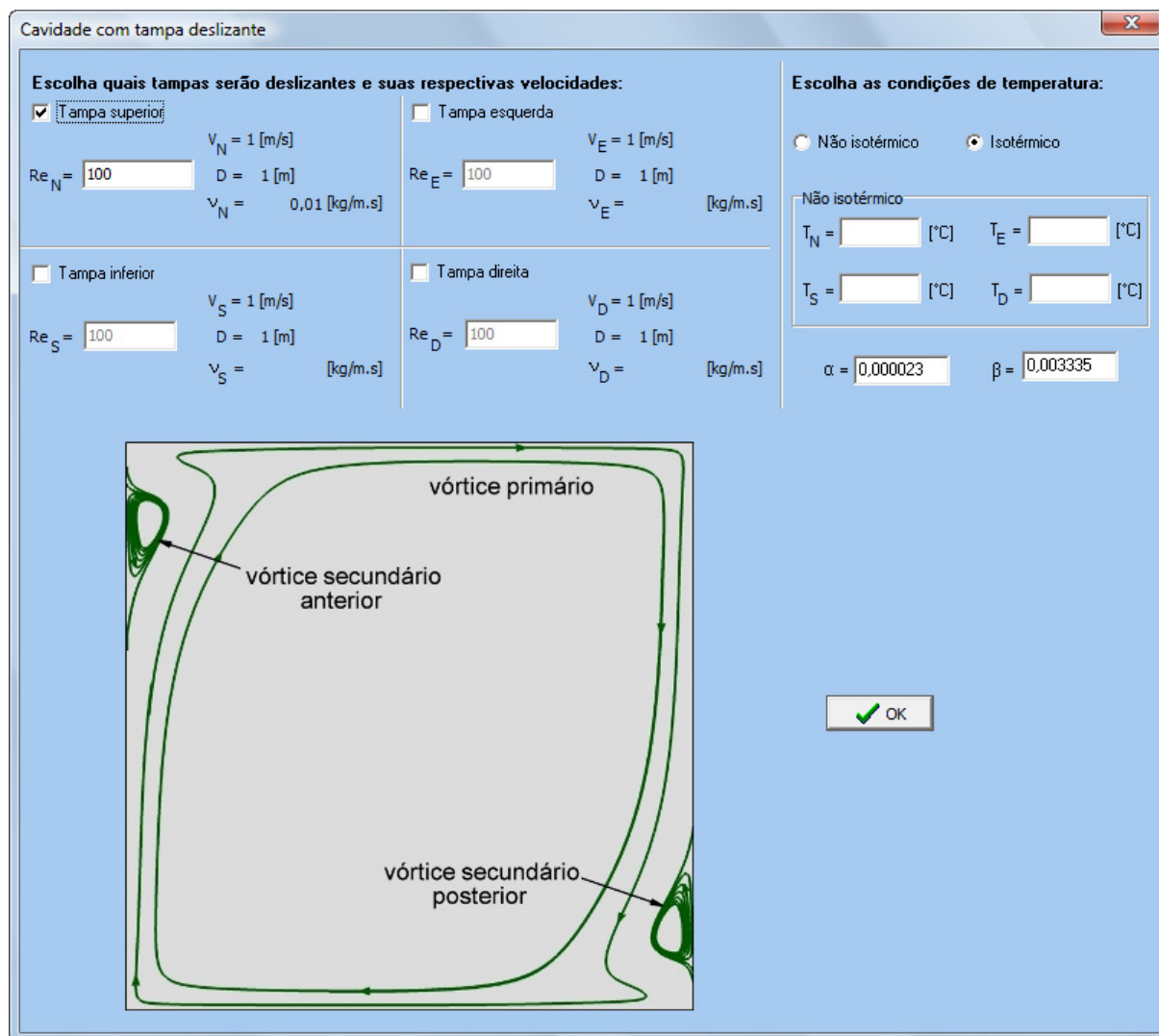


Figura 7 – Janela para o caso da cavidade com tampa deslizante.

3.2.2 PROCESSADOR

O segundo módulo de operação da interface é o processador (Figura 8). Neste módulo encontra-se o botão que aciona o início da simulação. Posteriormente nesta tela haverá também a possibilidade de adicionar sondas no escoamento em questão.

Quando o botão “Calcular” é acionado o programa faz a leitura do arquivo de dados gerado no pré-

processador e inicia o cálculo das variáveis.

Inicialmente o programa que faz o cálculo numérico e a interface eram dois programas separados. A interface gerava o arquivo de dados e o botão “Calcular” abria o executável que executava os cálculos e gerava os arquivos de saída. A razão desta estrutura era aumentar a velocidade de processamento do software.

Com o avanço do desenvolvimento do software optou-se por ter uma janela de

acompanhamento da simulação para verificar se o caso em questão está atingindo a convergência e, caso não esteja convergindo, cancelar a simulação (Figura 9).

Para desenvolvimento desta janela não era possível continuar com os dois códigos separados, pois não era possível acessar os dados para gerar o gráfico de acompanhamento ao mesmo tempo em que o código numérico estava escrevendo os mesmos no arquivo de saída.

Foi escolhido então incluir o código que realiza os cálculos da simulação como no código da interface. Para isso as funções utilizadas foram incluídas como bibliotecas e o código principal do cálculo numérico foi adicionado no sub-módulo de processamento, sendo acionado pelo botão “Calcular”.

Desta maneira os dados calculados pelo código numérico podem ser passados para a janela de acompanhamento antes de serem escritos no arquivo de saída, ao final do laço de tempo.

Para assegurar que o desempenho do software não foi prejudicado com a junção dos códigos foram feitas duas simulações, uma com os códigos separados e uma com

os códigos juntos, para se comparar o tempo de execução. Um dos arquivos de saída dos cálculos consiste nas informações finais de tempo do programa e é este arquivo que será comparado.

As configurações escolhidas para a simulação de comparação foram:

- Domínio: $L = 1 \text{ m}$; $H = 1 \text{ m}$
- Malha: $M = 20$; $N = 20$
- Tempo: tempo total = 2 s;
 $dt = 0,01 \text{ s}$; $dt \text{ Tecplot} = 1,0 \text{ s}$
- Constantes: $ka = 0,026238$;
 $g = 9,81 \text{ m/s}^2$
- Fluido: $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$;
 $\nu = 0,01 \text{ kg/m.s}$
- Caso: tampa superior; $Re=100$;
isotérmico; $\alpha = 0,0000229$;
 $\beta = 0,003335$

Analisando o arquivo de saída citado acima, para ambos os casos calculados, o passo de tempo foi de 0,01 segundos, o tempo final de simulação foi de 2,0 segundos e o tempo de processamento da CPU foi de 32 segundos. A partir destes resultados pode-se concluir que não houve perdas na junção dos códigos.

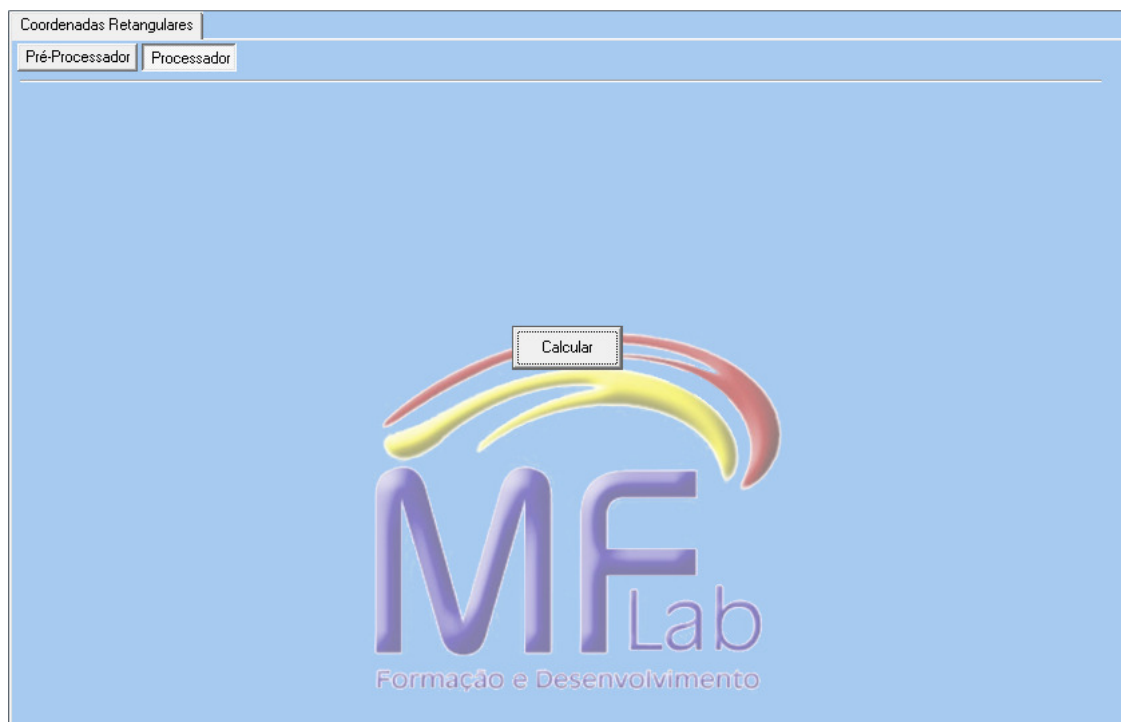


Figura 8 – Tela do sub-módulo de processamento.

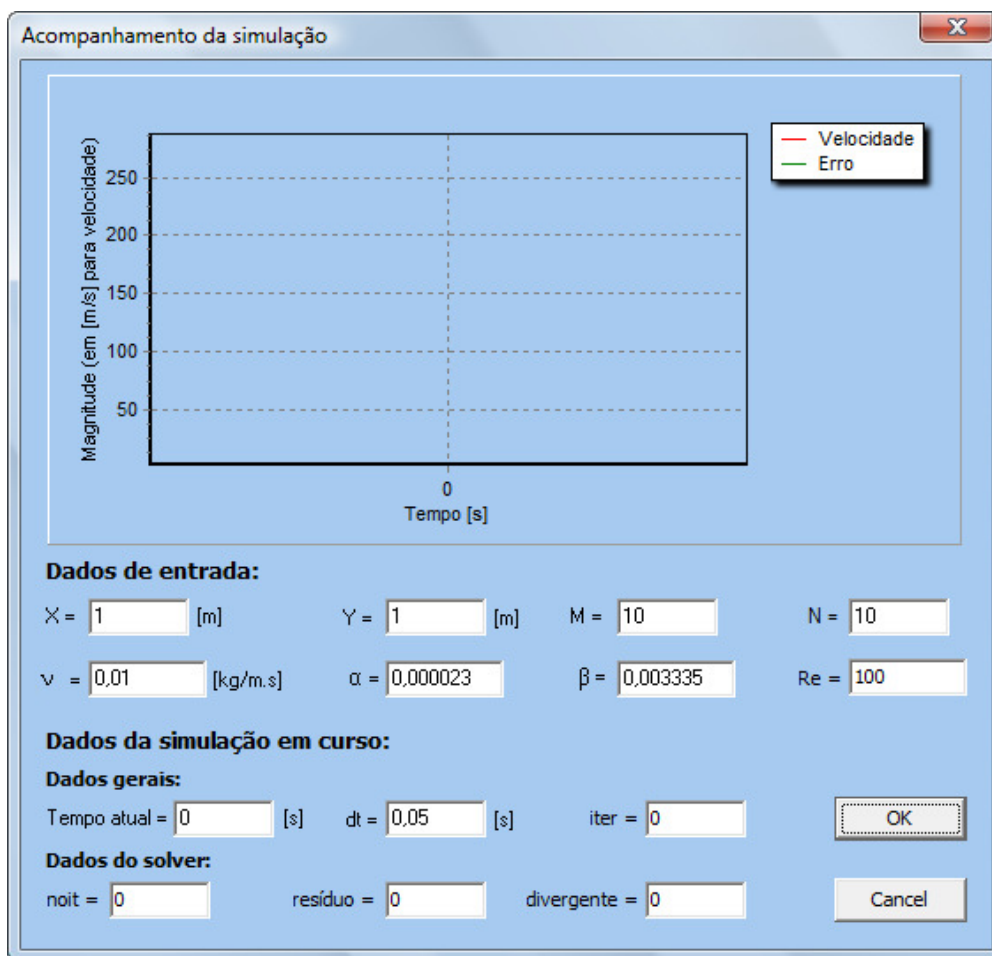


Figura 9 – Janela de acompanhamento da simulação.

Após a comparação dos tempos de execução descrita acima, utilizou-se um software de pós-processamento para analisar mais detalhadamente os dados contidos nos arquivos de saída numéricos do caso em questão.

Os campos de velocidade u e v , nas direções x e y respectivamente, e o campo de pressão estão apresentados nas figuras abaixo (Figuras 10-12). Todos os resultados apresentados correspondem ao tempo final da simulação, ou seja, $t = 2$ s.

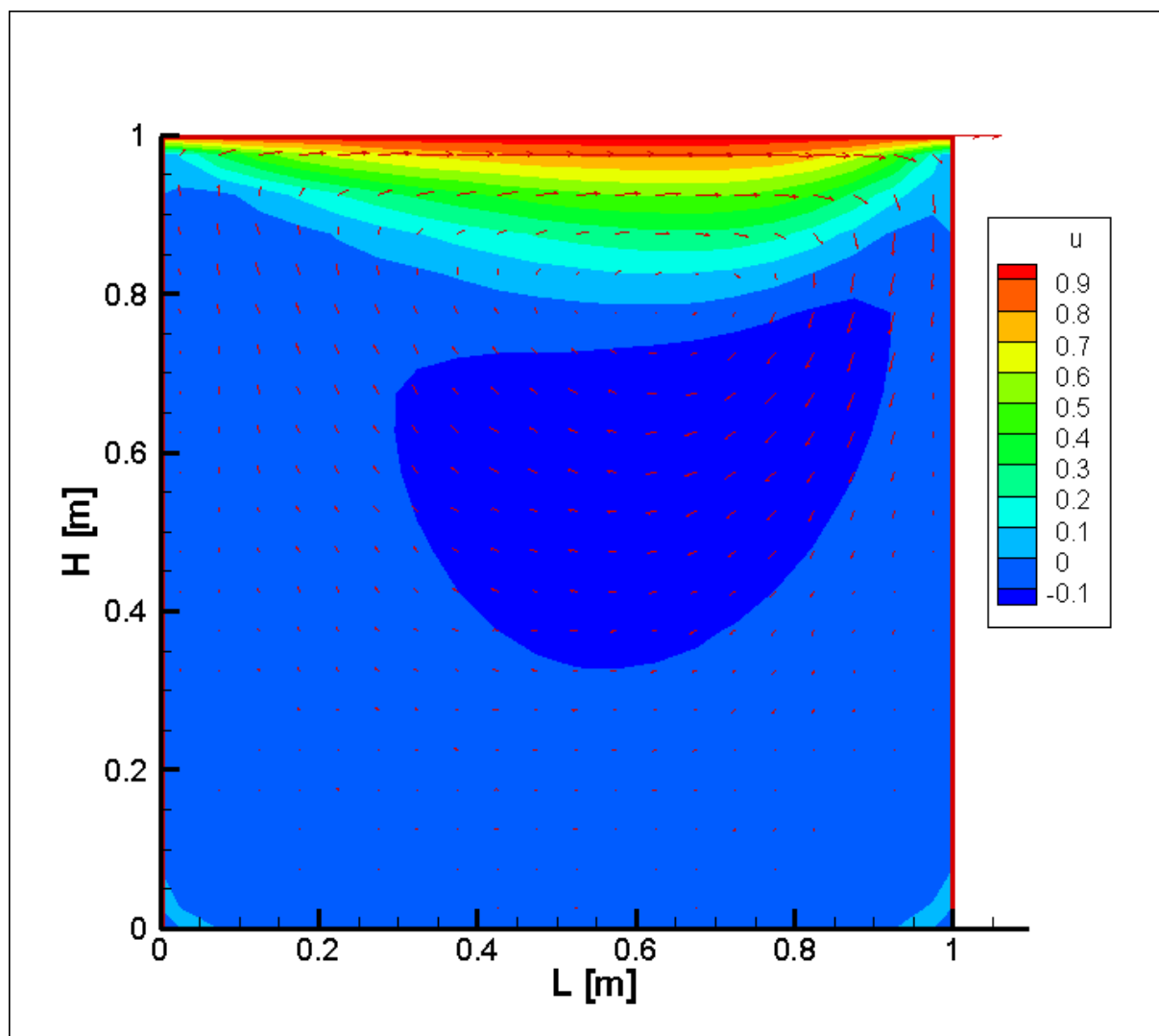


Figura 10 – Campo de velocidade u (velocidade em x). Os valores apresentados na legenda estão em m/s

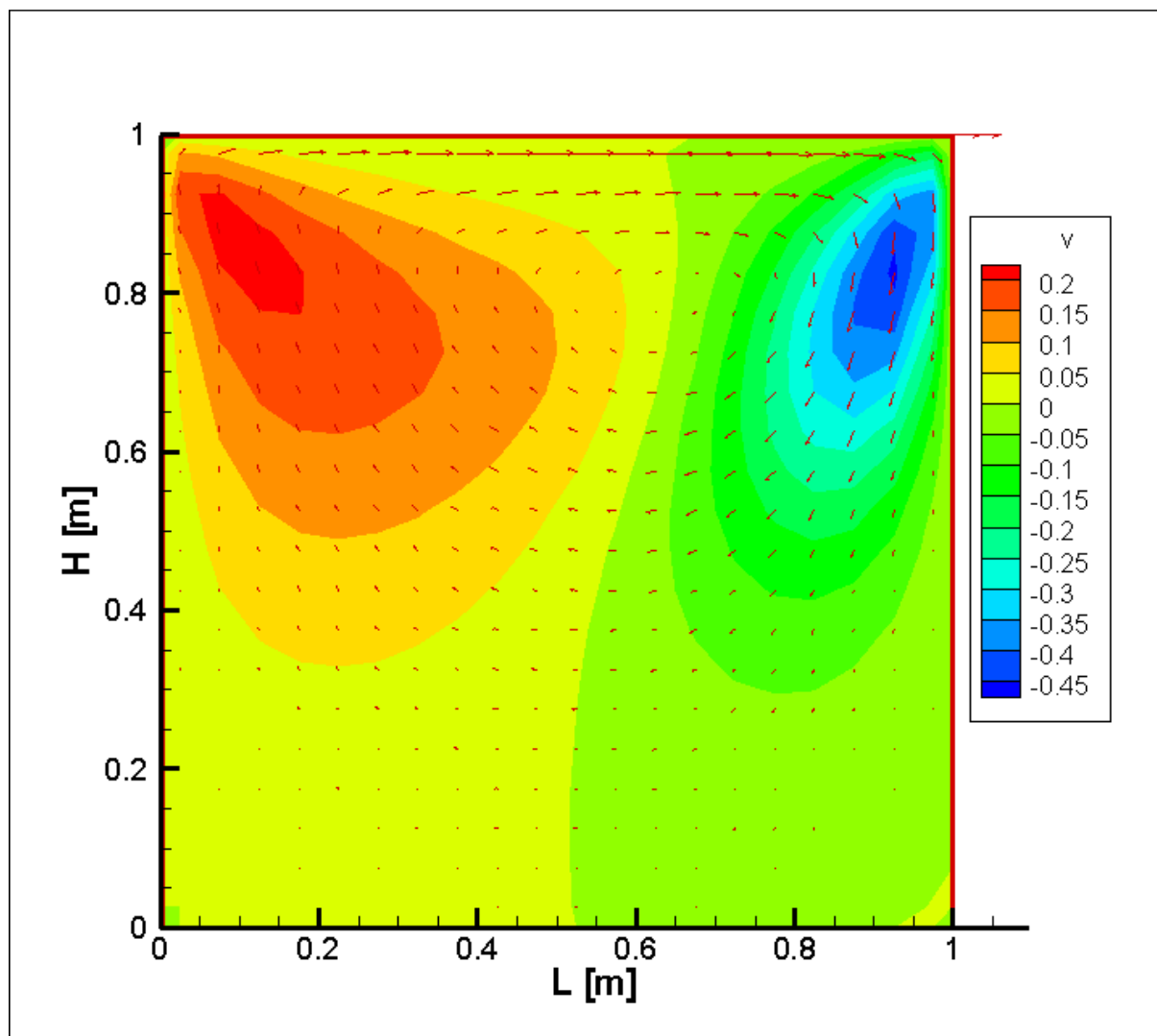


Figura 11 – Campo de velocidade v (velocidade em y). Os valores apresentados na legenda estão em m/s

O módulo da velocidade u (Figura 10) se mostra maior com valores nas regiões próximas à tampa, pois é esta quem acelera o fluido dentro da cavidade, e diminuem à medida que as linhas mais externas do escoamento que estão em contato com a tampa se distanciam da mesma.

No campo de velocidade v (Figura 11) os valores são maiores próximo a tampa e nos cantos, pois além da presença

da tampa impondo velocidade no escoamento, este sofre uma mudança de direção devido à presença das paredes laterais.

Os valores das velocidades não chegam a se igualar ao valor da velocidade da tampa devido ao efeito da viscosidade do fluido, que causa perdas na transmissão da força de cisalhamento. Sendo assim, pode-se dizer que o comportamento do

campo de velocidade está dentro do esperado.

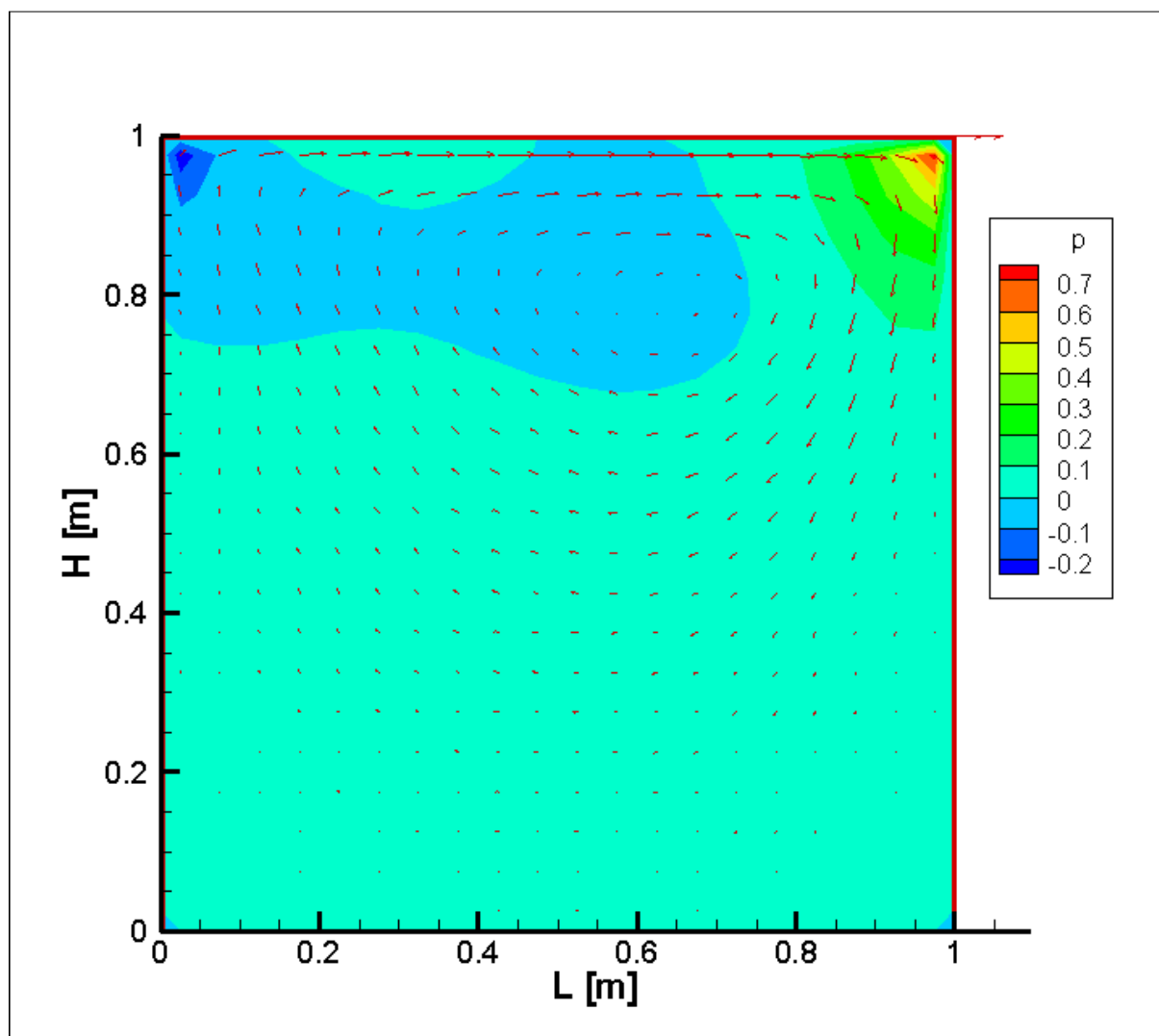
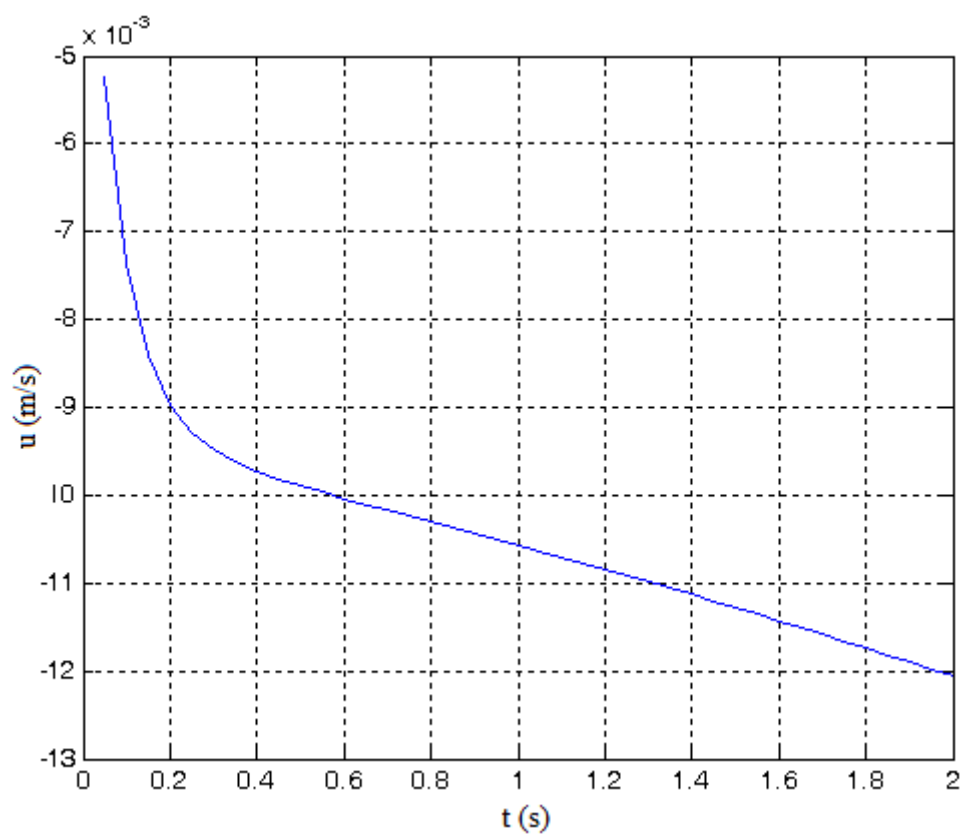
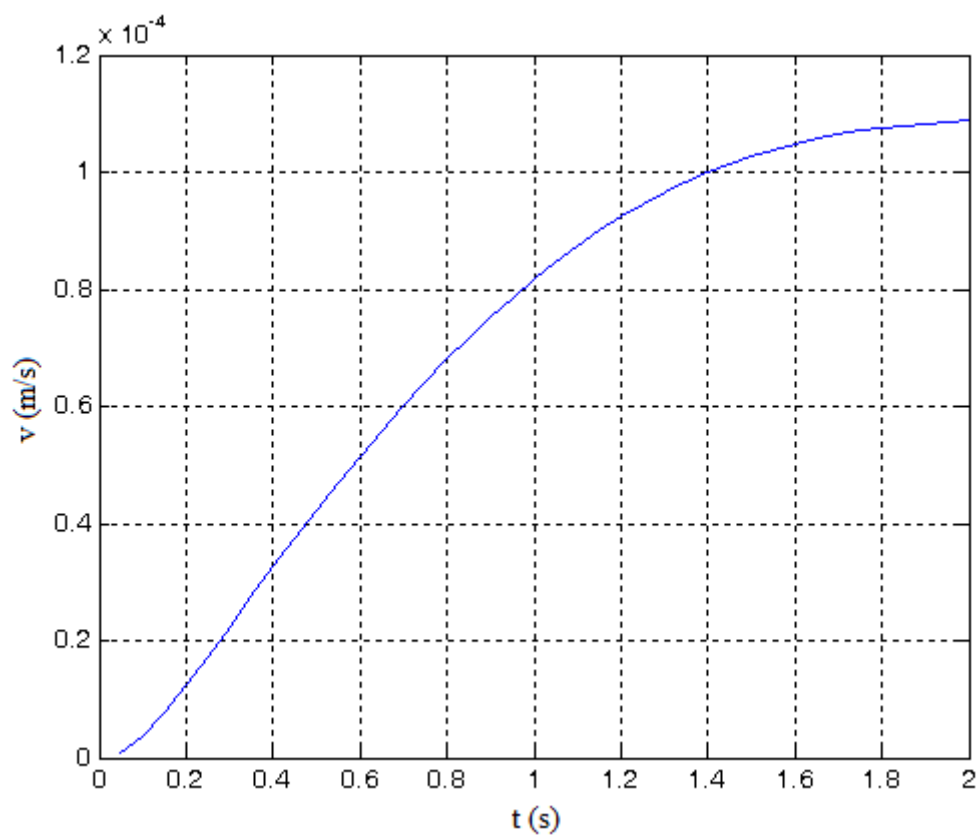


Figura 12 – Campo de pressão para o escoamento em questão.

Os valores do campo de pressão apresentados na legenda da figura 12 são apenas uma indicação da intensidade do campo e não valores reais de pressão.

Pode-se notar que as áreas de maior pressão se encontram nos cantos superiores da cavidade onde o fluido em movimento possui os maiores módulos de velocidades

em ambas as direções, como pode ser visto nas figuras 10 e 11. Nas figuras 13 e 14 são apresentados um exemplo da distribuição temporal local das componentes da velocidade, comportamento que descreve o histórico de desenvolvimento local do escoamento rumo a atingir o estado permanente.

Figura 13 – Gráfico do *tempo [s] x velocidade em x [m/s]*Figura 14 – Gráfico do *tempo [s] x velocidade em y [m/s]*

A partir dos campos de velocidade e pressão obtidos pode-se concluir que os resultados obtidos através do programa em desenvolvimento estão dentro do esperado, se aproximando dos casos estudados e apresentados na bibliografia (Padilla et al., 2005).

4. CONCLUSÃO

Até o presente momento, as linguagens de desenvolvimento escolhidas para o desenvolvimento da interface gráfica tem atendido satisfatoriamente às exigências. A mistura dos dois tipos de linguagem, C e C++, não apresentou nenhum conflito e o programa utilizado para estruturação da interface tem atendido a todos os requisitos necessários.

A interface desenvolvida tem se mostrado rápida, leve e de fácil manipulação. Estas características tornam a ferramenta ágil e permite que o usuário possa interagir com esta sem muita experiência.

O sub-módulo de pré-processamento tem-se mostrado estável e transmitido as informações de configuração dos casos de maneira correta. As mudanças que estão sendo estudadas para este módulo são puramente estéticas para melhor integração dos usuários do programa.

O sub-módulo de processamento ainda está em fase de desenvolvimento

mas esta se mostra em estágio avançado visto que já é possível utilizar a interface para configuração e cálculo da simulação. A janela de acompanhamento da simulação ainda apresenta alguns problemas relativos à sua abertura.

Os próximos passos de desenvolvimento do processador são resolver os problemas da janela de acompanhamento e introduzir os campos que serão responsáveis pela adição de sondas de monitoramento em posições diferentes no fluido.

O sub-módulo de pós-processamento terá seu desenvolvimento iniciado assim que o desenvolvimento do processamento for finalizado. Este será estruturado como uma série de gráficos sobre o escoamento, como gráficos de velocidade, temperatura e pressão.

Assim, o software em questão consegue proporcionar uma oportunidade de entender melhor os mecanismos que geram e atuam em cada tipo de problema, conhecendo a física envolvida.

O desenvolvimento desta ferramenta deve servir como base para ampliação das funcionalidades da ferramenta numérica, possibilitando a solução de escoamentos externos.

Por outro lado, o código numérico preliminar (isotérmico e em processo de validação) deve continuar seu

desenvolvimento com a finalidade de integrar a equação de energia.

Apesar do problema escolhido para validação possuir uma geometria simples, o mesmo é muito utilizado para validação de códigos pois o escoamento desenvolvido na cavidade se mostra complexo.

Os próximos passos do desenvolvimento do código numérico são o término da validação do código isotérmico, o desenvolvimento do código não isotérmico e o desenvolvimento de ambos os códigos para o sistema de coordenadas cilíndricas.

Portanto, conclui-se que o projeto foi executado dentro do cronograma especificado e continuará seu desenvolvimento implementando as novas ferramentas para melhor utilização da interface e os novos modelos de cálculo.

5. BIBLIOGRAFIA

Bird, R. B., Stewart, W. E. e Lightfoot, E. N., 2002, *Transport Phenomena*, Ed. Jhon Wiley & Sons Inc., New York, USA.

Golub, G.H., VanLoan, C., 1990, *Matrix computation*. Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore.

Kim, J. and Moin, P., 1985, Application of a Fractional Step Method to Incompressible Navier-Stokes Equations, *J. Comp. Phys.*, 59, pp. 308-323.

Padilla, E. L. M., Silveira Neto, A., 2005, Large-eddy Simulation of Transition to Turbulence in Heated Annular Channel, *Comptes Rendus Mecanique*, v. 333, n. 8, p. 599-604, 2005.

Padilla, E. L. M., Martins, A. L. e Silveira Neto, A., 2005, Large-Eddy Simulation of the Three-Dimensional Unstable Flow in a Lid-Driven Cavity. 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, Proc. of COBEM 2005, v. 1, p. 1-8.

Patankar, S. V., 1980, *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*, Hemisphere Publishing Corporation.

Stone, H. L., 1968, Iterative Solution of Implicit Approximations of Multidimensional Partial Differential Equations, *SIAMJ Numer. Anal.*, vol. 5, pp. 530-558.

Schildt, Herbet, 1996, “C Completo e Total”, Ed. Makron Books, São Paulo, Brasil.