Aplicações da Teoria dos Resíduos no Cálculo de Integrais Reais

GUSTAVO S. OLIVEIRA[1], ELISA R. SANTOS[2]

Resumo.

Este artigo apresenta um estudo sobre aplicações do Teorema dos Resíduos no cálculo de integrais reais, relacionando a teoria de funções de uma variável complexa com a teoria de funções de uma variável real.

Para isso, foram analisados previamente conceitos significativos para o entendimento dos procedimentos utilizados no cálculo de tais integrais. Na primeira parte, foram investigadas, por meio de definições, resultados e demonstrações, as funções holomorfas, introduzindo os conceitos de limite, continuidade, derivação, integração, além da apresentação de algumas funções elementares. Em seguida, uma síntese relativa a sequências e séries foi apresentada, compreendendo as séries de potências, essenciais no estudo das funções holomorfas. Além disso, as singularidades destas funções foram consideradas e, a partir daí, pôde-se classificá-las por meio da expansão de Laurent, elucidando o comportamento de funções em torno de determinados pontos singulares. Depois disso, foi definido o que é o resíduo de uma função, apresentando imediatamente como calculá-lo numa singularidade isolada, especialmente em polos.

Por fim, demonstrou-se o Teorema dos Resíduos e fez-se uso deste para calcular integrais reais. Este cálculo de integrais reais foi dividido em três casos. Com isto foi possível observar que algumas integrais reais podem ser vistas como integrais complexas e calculadas desta forma.

Palavras-chave: funções holomorfas, singularidades, Teorema dos Resíduos, integrais reais.

[1]Faculdade de Engenahria Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121, Santa Mônica, Uberlândia - MG, 38408-100. E-mail: gustavo.oliveira@ufu.br

[2]Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121, Santa Mônica, Uberlândia - MG, 38408-100. E-mail: elisars@ufu.br

Abstract.

This paper presents a study about applications of the Residue Theorem for evaluating real integrals, relating theory of functions of a complex variable to theory of functions of a real variable.

For this, we previously analyse significant concepts for the understanding of the procedures used in the evaluation of such integrals. In the first part, we investigate holomorphic functions, using definitions, results and proofs, introducing the concepts of limit, continuity, differentiation and integration. In addition, some elementary functions were presented. Then, we present a synthesis relative to sequences and series, comprising the power series that are essential in the study of holomorphic functions. Besides that, the singularities of these functions are considered and from then on it is possible to classify them by means of the Laurent Expansions, elucidating the behavior of functions in the neighborhood of certain singular points. After that, we define what is the residue of a function, presenting immediately how to calculate it in an isolated singularity, especially in poles.

Finally, we prove the Residue Theorem and make use of it to evaluate real integrals. This fact was divided into three cases. Thus we observe that some real integrals can be seen as complex integrals and can be calculated using this fact.

Key words: holomorphic functions, singularities, Residue Theorem, real integrals.

1 Introdução

Os números complexos surgiram no século XVI, devido ao interesse em determinar soluções para equações polinomiais de terceiro e quarto graus. Por um longo tempo, estes números não foram considerados legítimos, sendo tidos por existentes apenas na imaginação humana. É interessante que ainda hoje chamamos o número complexo i de *unidade imaginária*. Segundo [3], o passo decisivo no sentido de formalizar o conceito de número complexo, foi a representação geométrica desses números como pontos do plano. O primeiro matemático a ter uma visão clara de tal representação e explorá-la em suas investigações foi Gauss, conforme fica claro, embora de modo implícito, em sua dissertação escrita em 1797. Todavia, Gauss expôs ao público suas ideias a esse respeito de modo explícito apenas em 1831, com o propósito de introduzir os “inteiros Gaussianos”. O corpo dos números complexos foi finalmente definido de modo rigoroso por Hamilton em 1837.

A teoria das funções de uma variável complexa é uma extensão natural das funções de uma variável real. Desde seu surgimento, no final do século XVIII, esta teoria tem se mostrado uma das áreas mais frutíferas da matemática e de importância fundamental, tanto na matemática pura como nas áreas aplicadas. Segundo [1], através desta área foi possível compreender melhor as funções definidas por séries de potências, estabelecer relações importantes entre funções elementares (por exemplo, $e^{ix} = \cos(x) + i\,\mathrm{sen}(x)$), dar um sentido à afirmação “Todo polinômio possui pelo menos uma raiz”, entre outras realizações igualmente importantes.

Uma área notória dentro desta teoria é a Teoria dos Resíduos. No estudo de integrais de funções complexas, o termo *resíduo* foi introduzido em 1826 por A. L. Cauchy, no intuito de designar a diferença das integrais de uma função sobre dois caminhos com as mesmas extremidades, delimitando uma região onde a única singularidade é um polo da função. As integrais de funções holomorfas, sobre caminhos fechados que delimitam um número finito de singularidades, puderam então ser calculadas por simples soma de resíduos. Esta possibilidade foi estabelecida por Cauchy no denominado *Teorema dos Resíduos*, que possui uma vasta gama de aplicações. Desse modo, o presente texto se destina a aplicar esse teorema no cálculo de integrais impróprias de funções racionais e, integrais impróprias ou definidas que envolvam funções trigonométricas.

Este artigo é baseado em parte do projeto de iniciação científica desenvolvido pelo aluno Gustavo S. Oliveira, sob orientação da Profa. Dra. Elisa R. Santos, através do Programa Jovens Talentos para a Ciência - CAPES.

2 Preliminares

Nesta seção, serão apresentadas definições e resultados fundamentais para a compreensão dos métodos utilizados para o cálculo de integrais reais utilizando a Teoria dos Resíduos.

2.1 Funções Holomorfas

Explicitaremos nesta subseção conceitos associados às funções holomorfas. Introduziremos as funções complexas e noções básicas de limite, continuidade, derivada e funções elementares no campo complexo.

2.1.1 Funções Complexas

A noção de função complexa envolve, naturalmente, a consideração de duas variáveis reais. De fato, uma *função de uma variável complexa* é uma correspondência $f : D \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ que associa ao número $z \in D$ um único número complexo $w = f(z) \in \mathbb{C}$. O número w é chamado *imagem* de z por f e o conjunto D é chamado *domínio* de f. Como $z = x+iy = (x, y)$, também podemos dizer que a função f associa ao par $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ o par $w = (u(x, y), v(x, y)) = u(x, y)+iv(x, y) = f(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Neste caso, as funções u e v são chamadas *parte real* e *parte imaginária* de f, respectivamente.

Em muitas situações, é necessário que os domínios das funções sejam conjuntos abertos conforme definimos a seguir. Um conjunto $A \subset \mathbb{C}$ é dito *aberto* se, para todo $z_0 \in A$, existe um número real positivo r tal que o disco aberto (ou simplesmente disco de raio r e centro z_0)

$$D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$$

esteja contido em A.

Assim como para funções de uma variável real, também temos as definições de limite e derivada para funções de uma variável complexa.

2.1.2 Limite e Continuidade

Definição 2.1. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $f : A \to \mathbb{C}$ uma função complexa e $z_0 \in A$. Dizemos que o número $w_0 \in \mathbb{C}$ é o *limite* de f quando z tende a z_0 se, para todo número $\varepsilon > 0$, existe um número $\delta > 0$ tal que

$$0 < |z - z_0| < \delta \ \Rightarrow \ 0 < |f(z) - w_0| < \varepsilon.$$

Isso quer dizer que $|f(z) - w_0|$ fica tão pequeno quanto se queira, desde que z esteja suficientemente próximo de z_0. Neste caso, escrevemos

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = w_0.$$

O cálculo de limites de funções de uma variável complexa pode ser relacionado com o cálculo de limites de funções de duas variáveis reais através do seguinte teorema.

Teorema 2.2 ([2], Seç. 13, Teorema 1)**.** *Sejam* $z = x + iy$, $z_0 = x_0 + iy_0$ *e* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. *O limite de* f *existe em* z_0 *e é igual a* $u_0 + iv_0$*, ou seja,*

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = u_0 + iv_0,$$

se, e somente se, os limites de u *e* v *existem em* (x_0, y_0) *e são iguais a* u_0 *e* v_0*, respectivamente,*

$$\lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} u(x, y) = u_0 \qquad e \qquad \lim_{(x,y) \to (x_0,y_0)} v(x, y) = v_0.$$

Similarmente às propriedades do limite de uma função real de uma variável, temos a seguir as propriedades do limite de uma função complexa.

Proposição 2.3 ([4], Cap. 3, Proposição 2.2)**.** *Sejam* $A \subset \mathbb{C}$ *um conjunto aberto,* $f_1 : A \to \mathbb{C}$ *e* $f_2 : A \to \mathbb{C}$ *duas funções complexas e* $z_0 \in A$. *Se* $\lim_{z \to z_0} f_1(z) = w_1$ *e* $\lim_{z \to z_0} f_2(z) = w_2$*, então:*

(i) $\lim_{z \to z_0} cf_1(z) = cw_1$*, onde* c *é qualquer número complexo;*

(ii) $\lim_{z \to z_0} (f_1(z) + f_2(z)) = w_1 + w_2$*;*

(iii) $\lim_{z \to z_0} (f_1(z)f_2(z)) = w_1 w_2$*;*

(iv) Se $w_1 \neq 0$*, então* $\lim_{z \to z_0} \dfrac{1}{f_1(z)} = \dfrac{1}{w_1}$.

Temos aqui também o conceito de função contínua.

Definição 2.4. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é *contínua no ponto* $z_0 \in A$ se $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. Se f é contínua em todos os pontos de A, dizemos que f é *contínua* em A.

Antes de apresentarmos propriedades peculiares referentes às funções complexas contínuas, faz-se necessário a recordação do conceito de composição de funções.

Definição 2.5. Se $f : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ são funções definidas nos abertos A e B, respectivamente, e tais que a imagem $f(A)$ está contida em B, tem sentido a expressão $g(f(z))$ para $z \in A$. A *composta de* f *e* g é, por definição, a função

$$\begin{aligned} g \circ f : A &\to \mathbb{C} \\ z &\mapsto g(f(z)). \end{aligned}$$

Assim sendo, podemos encerrar esta subseção com algumas propriedades.

Proposição 2.6 ([4], Cap. 3, Proposição 2.4)**.** *Sejam A e B abertos, e $f_1 : A \to \mathbb{C}$, $f_2 : A \to \mathbb{C}$ e $g : B \to \mathbb{C}$ funções complexas, com $f_1(A) \subset B$. Se f_1 e f_2 são ambas contínuas em $z_0 \in A$ e g é contínua em $f_1(z_0)$, então:*

(i) As funções $cf_1 : A \to \mathbb{C}$, $f_1 + f_2 : A \to \mathbb{C}$, $f_1 \cdot f_2 : A \to \mathbb{C}$ são contínuas em z_0, onde c é um número complexo qualquer;

(ii) Se $f_1(z_0) \neq 0$ então a função $\frac{1}{f_1} : A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0;

(iii) A função composta $g \circ f_1 : A \to \mathbb{C}$ é contínua em z_0.

2.1.3 Derivada

Sabemos que a derivada de uma função real de uma variável real no ponto x_0 é definida como o limite do quociente de Newton:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0).$$

Similarmente, podemos definir a derivada complexa da seguinte maneira.

Definição 2.7. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ um conjunto aberto, $z_0 \in A$ e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Se existir o limite

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0},$$

esse é chamado *derivada* de f no ponto z_0 e denotado por $f'(z_0)$. Neste caso, dizemos que f é *derivável* em z_0.

Algumas propriedades familiares também são válidas.

Proposição 2.8. *Se f é derivável em z_0 então f é contínua em z_0.*

Demonstração. Temos

$$\lim_{z \to z_0} (f(z) - f(z_0)) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \cdot (z - z_0) = f'(z_0) \cdot 0 = 0.$$

Logo, $\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$. □

Proposição 2.9 ([4], Cap. 3, Proposição 3.3)**.** *Se f e g são deriváveis em z_0, então também o são cf (c um número complexo qualquer), $f + g$, fg e $\frac{1}{f}$ (desde que $f(z_0) \neq 0$) e valem:*

(i) $(cf)'(z_0) = cf'(z_0)$;

(ii) $(f + g)'(z_0) = f'(z_0) + g'(z_0)$;

(iii) $(fg)'(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + g(z_0)f'(z_0)$*;*

(iv) $\left(\dfrac{1}{f}\right)'(z_0) = -\dfrac{f'(z_0)}{f(z_0)^2}$.

Além disso, temos a notável *Regra da Cadeia*, relacionada à composição de funções.

Proposição 2.10 ([4], Cap. 3, Proposição 3.4)**.** *Sejam* $f : A \to \mathbb{C}$ *e* $g : B \to \mathbb{C}$ *com* $f(A) \subset B$*. Se* f *é derivável em* z_0 *e* g *é derivável em* $f(z_0)$*, então* $g \circ f$ *é derivável em* z_0 *e*

$$(g \circ f)'(z_0) = g'(f(z_0))f'(z_0).$$

As proposições anteriores nos mostram que a derivada de funções de uma variável complexa possui muitas propriedades em comum com a derivada de funções de uma variável real. Enunciaremos a seguir dois resultados que nos auxiliam a decidir se uma função complexa possui derivada em um ponto, fazendo uso do conhecimento sobre derivadas parciais de funções de duas variáveis reais.

Proposição 2.11 ([4], Cap. 3, Proposição 3.5)**.** *Se a função* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *tem derivada no ponto* $z_0 = x_0 + iy_0$*, então*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) \quad e \quad \frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0). \tag{1}$$

Além disso,

$$f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\,\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0) - i\,\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0).$$

As equações (1) são chamadas *condições de Cauchy-Riemann*.

Para que seja válida a recíproca desta proposição, algumas condições devem ser respeitadas, conforme enunciamos a seguir.

Proposição 2.12 ([4], Cap. 3, Proposição 3.6)**.** *Sejam* $A \subset \mathbb{C}$ *aberto e* $f : A \to \mathbb{C}$ *dada por* $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ *tal que as derivadas parciais* $\dfrac{\partial u}{\partial x}, \dfrac{\partial u}{\partial y}, \dfrac{\partial v}{\partial x}, \dfrac{\partial v}{\partial y}$ *existem em* A *e são contínuas no ponto* $z_0 = x_0 + iy_0 \in A$*. Se as condições de Cauchy-Riemann são satisfeitas em* z_0*, então* f *é derivável em* z_0*.*

Por fim, podemos definir quando uma função é dita holomorfa:

Definição 2.13. Sejam $A \subset \mathbb{C}$ aberto e $f : A \to \mathbb{C}$ uma função complexa. Dizemos que f é *holomorfa* em A se $f'(z)$ existe para todo ponto $z \in A$.

2.1.4 Função exponencial

A *função exponencial* é definida por

$$e^z = e^x(\cos y + i \operatorname{sen} y)$$

para $z = x + iy$. Tal função é holomorfa em todo o plano. Para vermos isso, basta observarmos que a parte real e a parte imaginária de

$$e^z = e^x \cos y + ie^x \operatorname{sen} y,$$

verificam as condições de Cauchy-Riemann para todo z. Verifica-se também que as derivadas parciais das partes real e imaginária de e^z são contínuas em todo o plano. Portanto, e^z tem derivada para todo z. Essa derivada é simplesmente $\partial e^z/\partial x$, que resulta ser a própria função e^z, como segue facilmente da expressão acima. Assim,

$$\frac{d}{dz}(e^z) = e^z \quad \text{para todo } z \in \mathbb{C}.$$

2.1.5 Funções trigonométricas

Apresentaremos agora as funções trigonométricas, essenciais no estudo de variáveis complexas. Antes de mais nada, é interessante notar que, da definição de função exponencial,

$$e^{iy} = \cos y + i \operatorname{sen} y \quad \text{e} \quad e^{-iy} = \cos(-y) + i \operatorname{sen}(-y) = \cos y - i \operatorname{sen} y.$$

Destas, advêm as seguintes igualdades:

$$\operatorname{sen} y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} \quad \text{e} \quad \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}.$$

De fato,

$$\frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i} = \frac{\cos y + i \operatorname{sen} y - \cos y + i \operatorname{sen} y}{2i} = \operatorname{sen} y$$

e

$$\frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2} = \frac{\cos y + i \operatorname{sen} y + \cos y - i \operatorname{sen} y}{2} = \cos y.$$

Estas são as chamadas *fórmulas de Euler*.

Fazendo uso delas, as funções trigonométricas poderão ser expandidas a todo o plano complexo. Assim, teremos:

$$\operatorname{sen} z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}, \quad \cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}.$$

$$\tan z = \frac{\operatorname{sen} z}{\cos z}, \quad \cot z = \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}, \quad \sec z = \frac{1}{\cos z}, \quad \csc z = \frac{1}{\operatorname{sen} z}.$$

Como no caso real, também temos as fórmulas de derivação já esperadas (que seguem das definições acima e da derivada da função exponencial):

$$(\operatorname{sen} z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\operatorname{sen} z.$$

Vinculadas novamente ao caso real, as identidades trigonométricas habituais continuam verdadeiras aqui. Assim sendo, temos as seguintes igualdades:

$$\operatorname{sen}(-z) = -\operatorname{sen} z, \quad \cos(-z) = \cos z,$$

$$\operatorname{sen}^2 z + \cos^2 z = 1,$$

$$\operatorname{sen}(z_1 + z_2) = \operatorname{sen} z_1 \cdot \cos z_2 + \cos z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2,$$

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 - \operatorname{sen} z_1 \cdot \operatorname{sen} z_2,$$

$$\operatorname{sen} z = \cos\left(\frac{\pi}{2} - z\right) \quad \text{e} \quad \cos z = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - z\right).$$

É importante citar que as duas primeiras identidades decorrem das definições de seno e cosseno dadas anteriormente, e as outras resultam das propriedades e definições da função exponencial.

2.2 Séries

Nesta subseção apresentaremos algumas preliminares sobre sequências, séries numéricas e séries de potências. Veremos que as séries de potências são essenciais no estudo das funções holomorfas, pois tais funções se expressam localmente como séries de potências.

2.2.1 Sequências e Séries numéricas

Definição 2.14. Uma *sequência numérica* é uma função do conjunto dos naturais $\mathbb{N}$ em $\mathbb{C}$,

$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}.$$

O número complexo $f(n)$ é chamado *n-ésimo termo* ou *termo geral* da sequência. Por simplicidade, denotaremos $f(n)$ por a_n e denotaremos a sequência por (a_n).

Definição 2.15. Um número complexo a é dito o *limite da sequência* (a_n) se os termos da sequência ficam arbitrariamente próximos de a para n suficientemente grande, isto é, se dado qualquer número $\varepsilon > 0$, é possível encontrar um número natural n_0 tal que, se $n \geq n_0$ então $|a_n - a| < \varepsilon$. Se a é o limite de a_n escrevemos

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \text{ou} \quad (a_n) \to a$$

e dizemos que a sequência (a_n) *converge* a a.

Uma sequência que não possui limite é chamada *divergente*.

Dada uma sequência numérica (z_n) podemos associar a ela uma nova sequência (s_n), chamada sequência das *somas parciais* de (z_n) definida recursivamente por:

$$\begin{aligned}
s_0 &= z_0 \\
s_1 &= s_0 + z_1 = (z_0) + z_1 \\
s_2 &= s_1 + z_2 = (z_0 + z_1) + z_2 \\
&\vdots \\
s_n &= s_{n-1} + z_n = (z_0 + z_1 + ... + z_{n-2} + z_{n-1}) + z_n = \sum_{i=0}^{n} z_i \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Definiremos o conceito de série numérica fazendo uso desta sequência de somas parciais.

Definição 2.16. Uma *série numérica* é a sequência (s_n) gerada por uma sequência (z_n) de números complexos. Se a sequência (s_n) converge para s, dizemos que a série *converge* e que sua *soma* é o número s. Se (s_n) diverge, dizemos que a série *diverge*. A série numérica gerada por (z_n) é denotada por $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} z_n$.

Referente às séries numéricas, uma classe que será bastante mencionada é a das séries que convergem absolutamente. Estas estão definidas a seguir:

Definição 2.17. A série numérica $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ é dita *absolutamente convergente* se a série $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$, gerada pela sequência $(|z_n|)$, for convergente.

2.2.2 Séries de potências

Estendendo nosso conhecimento sobre séries numéricas, consideraremos agora sequências de funções, ou seja, uma relação que a cada número $n \in N$ associa uma função complexa $f_n(z)$, definida num subconjunto de $\mathbb{C}$. Nos dedicaremos exclusivamente a sequências de potências de z, onde $f_n(z) = a_n z^n$, $a_n \in \mathbb{C}$.

Definição 2.18. Dada uma sequência $(a_n z^n)$, a série por ela gerada é chamada uma *série de potências de centro em* 0 e notada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Um conceito fortemente ligado a esse tipo de série é o de “raio de convergência”.

Lema 2.19 ([4], Cap. 4, Lema 2.3)**.** *Dada uma série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$, existe um disco fechado de centro em* 0 *tal que a série converge absolutamente em todos os pontos z no interior desse disco e, diverge em todos os pontos z exteriores a esse disco.*

Definição 2.20. O raio R do disco dado pelo Lema 2.19 é chamado de *raio de convergência* da série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Assim como no caso real, temos aqui o conceito de série de Taylor.

Teorema 2.21 ([4], Cap. 4, Corolário 2.13)**.** *Seja $f(z)$ uma função definida pela série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$, com raio de convergência $R > 0$. Então $f(z)$ é dada pela sua série de Taylor de centro em z_0,*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^n$$

e essa série converge absolutamente em qualquer $z \in D(z_0, R)$.

Terminaremos esta subseção apresentando a definição de função analítica.

Definição 2.22. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função. Dizemos que f é *analítica* em U se, para todo ponto $z_0 \in U$, f se expressa como uma série de potências de centro z_0 com raio de convergência $R_{z_0} > 0$.

2.3 Integração

Vamos agora definir a integral de uma função complexa. Antes de mais nada, apresentaremos alguns conceitos topológicos necessários ao estudo de tal integral.

Definição 2.23. Sejam $z_0 = (x_0, y_0)$ um ponto do plano complexo $\mathbb{C}$ e a um número real positivo. O conjunto $\overline{D}(z_0, a)$ formado pelos pontos tais que

$$|z - z_0| \leq a$$

é chamado *disco fechado* de raio a e centro z_0.

Lembre-se que já definimos *disco aberto* anteriormente na Subseção 2.1.1.

Definição 2.24. Um subconjunto V do plano é *limitado* se existe um número positivo R tal que $|z| < R$ qualquer que seja $z \in V$.

Seja $J = [a, b]$ com $a < b$. Uma aplicação $\gamma : J \to \mathbb{C}$ associa cada $t \in J$ a um ponto $\gamma(t) = x(t) + iy(t)$ no plano complexo. A imagem $\gamma(J)$ é uma curva no plano complexo a qual chamaremos de *caminho*. Os pontos $\gamma(a)$ e $\gamma(b)$ são chamados *ponto inicial* e *ponto final* do caminho γ, respectivamente. Chama-se *caminho fechado* a todo caminho cujos pontos inicial $\gamma(a)$ e final $\gamma(b)$ coincidem.

Definição 2.25. Um *caminho suave* em $\mathbb{C}$ é uma aplicação

$$\gamma : J \to \mathbb{C}$$

com derivada contínua em todos os pontos de J, onde $J \subset \mathbb{R}$ é um intervalo da forma $J = [a, b]$ com $a < b$.

Definição 2.26. Um *caminho suave por partes* em $\mathbb{C}$ é uma coleção finita de caminhos suaves $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$, $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$, $\ldots$, $\gamma_n : [a_n, b_n] \to \mathbb{C}$, satisfazendo $\gamma_i(b_i) = \gamma_{i+1}(a_{i+1})$ para $1 \leq i \leq n - 1$.

Usaremos a notação $\gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ quando nos referirmos a caminhos suaves por partes. Observe que um caminho suave é, em particular, um caminho suave por partes.

Definição 2.27. Um caminho suave por partes e fechado é dito um *caminho simples* se cada ponto $\gamma(t)$ corresponde a um único valor de t. Intuitivamente, isto significa que, à medida que t varia de a até b, o ponto $\gamma(t)$ percorre a curva $\gamma(J)$, passando uma só vez por cada um de seus pontos. Dessa forma, o caminho não possui autointerseções.

Definição 2.28. Se $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ é um caminho suave, seu *comprimento* é definido por

$$l(\gamma) = \int_a^b |\gamma'(t)| dt.$$

Definição 2.29. Um subconjunto não vazio $U \subset \mathbb{C}$ é chamado um *domínio* se U é aberto e se, dados dois pontos quaisquer p e q em U, existe um caminho suave por partes, inteiramente contido em U, cujos pontos inicial e final são p e q, respectivamente.

Agora estamos prontos para definir a integral de uma função complexa.

Definição 2.30. Sejam $\gamma : [a, b] \to \mathbb{C}$ um caminho suave e seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua, onde $U \subset \mathbb{C}$ é um domínio. A *integral* da função f ao longo do caminho γ é o número complexo

$$\int_\gamma f(z) dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t) dt.$$

Como a integral $\int_\gamma f(z) dz$ é dada através de integrais de linha, o sentido do caminho γ influencia no valor da integral. Mais precisamente, temos que

$$\int_{\gamma^-} f(z) dz = -\int_\gamma f(z) dz,$$

onde γ^- é o caminho obtido percorrendo γ no sentido contrário.

Naturalmente, o conceito de integral pode ser expandido a caminhos que sejam suaves por partes e também a união de caminhos suaves por partes, resultando na seguinte definição.

Definição 2.31. Sejam U e f como na definição acima. Se $\gamma = \gamma_1 * \gamma_2 * \cdots * \gamma_n$ é um caminho suave por partes em U, definimos a integral de $f(z)$ ao longo de γ por

$$\int_\gamma f(z)dz = \int_{\gamma_1} f(z)dz + \int_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int_{\gamma_n} f(z)dz.$$

E se λ é uma união finita de caminhos suaves por partes $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$, ou seja, $\lambda = \lambda_1 \cup \cdots \cup \lambda_n$, definimos a integral de $f(z)$ ao longo de λ por

$$\int_\lambda f(z)dz = \int_{\lambda_1} f(z)dz + \cdots + \int_{\lambda_n} f(z)dz,$$

onde as integrais sobre $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ são calculadas conforme a primeira parte dessa definição.

O conceito de "primitiva" dos estudos no campo real apresenta-se também aqui, conforme segue:

Definição 2.32. Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua. Uma função $F : U \to \mathbb{C}$ é chamada uma *primitiva* de f, se F é holomorfa em U e $F'(z) = f(z)$ para todo ponto $z \in U$.

Além disso, temos o Teorema Fundamental do Cálculo adaptado para as integrais complexas:

Teorema 2.33 ([4], Cap. 5, Teorema 1.6)**.** *Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua, F uma primitiva de f em U e γ um caminho suave por partes em U unindo o ponto z_0 ao ponto z_1. Então*

$$\int_\gamma f(z)dz = F(z_1) - F(z_0).$$

Em particular, se o caminho é fechado então

$$\int_\gamma f(z)dz = 0.$$

Exibiremos agora um resultado técnico útil para demonstrações de resultados posteriores.

Lema Técnico 2.34 ([4], Cap. 5, Lema Técnico 1.8)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio, $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua e $\gamma(t), a \leq t \leq b$, um caminho suave por partes em U, de comprimento $l(\gamma)$. Seja $K \geq 0$ um número real tal que $|f(\gamma(t))| \leq K$ para todo $a \leq t \leq b$. Então*

$$\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq Kl(\gamma).$$

Tendo dito isso, vamos à caracterização geral de funções que tem primitiva num domínio por meio de um teorema.

Teorema 2.35 ([4], Cap. 5, Teorema 1.9). *Seja $f : U \to \mathbb{C}$ uma função contínua definida no domínio $U \subset \mathbb{C}$. As seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) f *tem uma primitiva em* U.

(ii) $\int_\gamma f(z)dz = 0$ *para qualquer caminho fechado, suave por partes* γ *em* U.

(iii) $\int_\lambda f(z)dz$ *só depende dos pontos inicial e final de qualquer caminho suave por partes* λ *em* U.

Antes de finalizar esta subseção, enunciaremos um teorema que pode ser provado através da teoria de integração complexa.

Teorema 2.36 ([4], Cap. 5, Teorema 2.12). *Sejam $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa, onde U é um domínio em $\mathbb{C}$ e $z_0 \in U$ um ponto qualquer. Então*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}(z - z_0)^n$$

ou seja, f é dada por sua série de Taylor de centro em z_0 e, portanto, é uma função analítica. Além disso, essa série converge em qualquer disco (aberto) $D(z_0, r) \subset U$, isto é, o raio de convergência R da série acima é a menor entre as distâncias de z_0 aos pontos da fronteira de U.

3 Singularidades e Resíduos

Nesta seção, definiremos o que são singularidades (ou pontos singulares) de uma função holomorfa. Classificaremos tais pontos em três categorias distintas por meio do Teorema de Laurent. Depois disto, definiremos o conceito de resíduo de uma função em um ponto singular. Por fim, demonstraremos o Teorema dos Resíduos e apresentaremos métodos para o cálculo de tais resíduos.

As demonstrações apresentadas nesta seção foram retiradas da referência [4].

Definição 3.1. Um *ponto singular* de uma função complexa f (ou *singularidade* de f) é um ponto z_0 tal que existe um disco aberto $D(z_0, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| < r\}$ no qual f é holomorfa exceto no ponto z_0.

Apresentaremos agora algumas notações que utilizaremos ao longo do artigo. Se ρ_1 e ρ_2 são números reais satisfazendo $0 \leq \rho_1 < \rho_2$ e a é um número complexo, o anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$ é o conjunto aberto definido por

$$A(a, \rho_1, \rho_2) = \{z \in \mathbb{C} : \rho_1 <| z - a |< \rho_2\}.$$

Escrevemos $A(a, \rho_1, \infty)$ para denotar o anel ilimitado $\{z \in \mathbb{C} : \rho_1 <\mid z - a \mid\}$. Observe que $A(a, 0, \rho_2)$ é $D(a, \rho_2) \setminus \{a\}$.

Teorema 3.2 ([4], Cap. 6, Teorema 1.1 - Teorema de Laurent)**.** *Seja f uma função holomorfa no anel $A(a, \rho_1, \rho_2)$. Então*

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

sendo que a série $\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m}$ *converge absolutamente fora do disco fechado* $\overline{D}(a, \rho_1)$ *e a série* $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$ *converge absolutamente no disco* $D(a, \rho_2)$. *Além disso, essa expansão é única e os coeficientes* b_m *e* a_n *são dados por*

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{m-1} dz, \quad m \geq 1$$

e

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}} d\omega, \quad n \geq 0,$$

onde γ *é um círculo de centro em* a*, orientado no sentido anti-horário e contido em* $A(a, \rho_1, \rho_2)$.

A expansão dada pelo teorema anterior é chamada *série de Laurent* de f. Esta expansão é muito importante, pois ela nos permite estudar singularidades de funções complexas. Usaremos essa expansão para dividir as singularidades isoladas em três categorias distintas.

Definição 3.3. Suponha que f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$ e considere sua série de Laurent em torno de a como no teorema anterior. Dizemos que:

(i) a é uma *singularidade removível* de f se $b_m = 0$ para $m \geq 1$;

(ii) a é um *polo de ordem* k de f se $b_k \neq 0$ e $b_m = 0$ para $m > k$;

(iii) a é uma *singularidade essencial* de f se $b_m \neq 0$ para uma infinidade de valores de m.

Considerando essa classificação, podemos discutir resultados sobre como determinadas funções se comportam em torno de uma singularidade.

Proposição 3.4. *Seja f uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$. Então as seguintes afirmativas são equivalentes:*

(i) a é singularidade removível de f.

(ii) existe o $\lim_{z\to a} f(z)$.

(iii) $|f|$ *é limitado em algum anel* $A(a,0,\delta) \subset A(a,0,\rho)$.

Demonstração. Suponha que (i) valha . Então a série de Laurent de f em $A(a,0,\rho)$ é

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

e, portanto, $\lim_{z\to a} f(z) = a_0$, ou seja, vale (ii). Suponha (ii) válida e seja $\alpha = \lim_{z\to a} f(z)$. Da definição de limite temos que existe $\delta > 0$, que podemos tomar menor que ρ, tal que $0 < |z - a| < \delta$ implica $|f(z) - \alpha| < 1$. Mas isso nos diz que $|f(z)| < 1 + |\alpha|$ para $z \in A(a,0,\delta)$ e vale (iii). Finalmente, suponha (iii) válida, ou seja, existe K tal que $|f(z)| \leq K$ para $z \in A(a,0,\delta)$. Os coeficientes b_m das potências negativas da série de Laurent de f são dados por

$$b_m = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} f(z)(z-a)^{m-1} dz, \quad m \geq 1,$$

onde $\gamma(t) = a + re^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$ e $0 < r < \rho$. Pelo Lema Técnico 2.34

$$|b_m| \leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} |f(z)||(z-a)|^{m-1}|dz| \leq \frac{1}{2\pi} K r^{m-1} 2\pi r = K r^m.$$

Fazendo r tender a 0, concluímos que $b_m = 0$ para $m \geq 1$ e a é singularidade removível de f. □

Corolário 3.5. *Se* $b_m \neq 0$ *para algum* $m \geq 1$*, então* $|f|$ *é ilimitado em qualquer disco de centro em* a.

Demonstração. De fato, a não é singularidade removível e então o item (iii) da proposição anterior não pode ocorrer. □

Proposição 3.6. *Se* f *é uma função holomorfa no anel* $A(a,0,\rho)$*, então* a *é um polo de ordem* k *de* f *se, e somente se,* $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z)$ *existe e é um número complexo não nulo.*

Demonstração. Suponha que a seja um polo de ordem k de f. Então a série de Laurent de f em $A(a,0,\rho)$ se escreve

$$f(z) = \frac{b_k}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{b_1}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n, \quad b_k \neq 0$$

e daí

$$(z-a)^k f(z) = b_k + \cdots + b_1 (z-a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^{n+k}.$$

Logo, $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = b_k \neq 0$. Por outro lado, suponha que $\lim_{z\to a}(z-a)^k f(z) = \alpha \neq 0$. Olhe para a função $g(z) = (z-a)^k f(z)$. Por (ii) da Proposição 3.4, g tem uma singularidade removível em a e, portanto, é dada por uma série de potências centrada em a e convergente no disco $D(a,\rho)$, digamos

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n.$$

Além disso, $a_0 = \alpha$. Vem então que

$$f(z) = \frac{\alpha}{(z-a)^k} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{z-a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k}(z-a)^n$$

e a é polo de ordem k de f. □

Corolário 3.7. *Se f é uma função holomorfa no anel $A(a,0,\rho)$ e a é polo de ordem k de f, então $\lim_{z\to a}|f(z)| = \infty$.*

Demonstração. Usando a mesma notação da proposição anterior temos

$$\lim_{z\to a}|f(z)| = \lim_{z\to a}\frac{|g(z)|}{|z-a|^k} = \infty,$$

já que $\lim_{z\to a}|g(z)| = |\alpha|$. □

O leitor deve ter notado que pouco se discorreu sobre as singularidades essenciais, até o momento. Isso se deve ao fato de que as funções holomorfas se comportam de forma descontrolada em torno delas. Um resultado ([4], Cap. 6, Pág. 146) devido ao matemático francês Picard afirma que, *se a é singularidade essencial de uma função holomorfa f no anel $A(a,0,\rho)$ então, dado qualquer $0 < r \leq \rho$, a imagem por f do anel $A(a,0,r)$, $f(A(a,0,r))$, é todo o plano $\mathbb{C}$, com a possível exceção de no máximo um ponto!* Não demonstraremos o Teorema de Picard neste texto devido a sua complexidade. Relativamente a esse tipo de singularidade, somos capazes de demonstrar um outro resultado, conhecido como Teorema de Casorati-Weierstrass.

Teorema 3.8 (Teorema de Casorati-Weierstrass)**.** *Seja f uma função holomorfa em $A(a,0,\rho)$ e suponha que a é singularidade essencial de f. Então, dados $0 < r \leq \rho$, $\varepsilon > 0$ e $\alpha \in \mathbb{C}$, existe um número complexo β tal que $\beta \in A(a,0,r)$ e $|f(\beta) - \alpha| < \varepsilon$.*

Demonstração. Observe que esse teorema nos diz que em qualquer anel $A(a,0,r)$, com $r \leq \rho$, existe uma sequência $(\beta_n) \to a$ tal que $f((\beta_n)) \to \alpha$, onde α é um número complexo escolhido a revelia.

Considere a série de Laurent de f centrada em a

$$f(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

onde, por hipótese, uma infinidade de coeficientes b_m são não nulos. Dado α, olhe para a função $g(z) = f(z) - \alpha$. A série de Laurent de g é

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a)^m} + a_0 - \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} a_n (z-a)^n$$

e, portanto, a também é singularidade essencial de g. Considere as seguintes duas possibilidades mutuamente excludentes:

(i) existe uma sequência (β_n) de pontos no anel $A(a,0,\rho)$, com $\lim_{n\to\infty} \beta_n = a$ e tal que $g(\beta_n) = 0$ para todo n.

(ii) não existe sequência de zeros de g convergindo a a.

Se vale (i), então dados $r > 0$ e $\varepsilon > 0$, podemos achar N tal que $n \geq N$ fornece $0 < |\beta_n - a| < r$ e trivialmente $|g(\beta_n)| = 0 < \varepsilon$, mas isso é o mesmo que $|f(\beta_n) - \alpha| < \varepsilon$. Tomando $\beta = \beta_N$, o teorema fica demonstrado nesse caso.

Se (i) não vale, então vale (ii). Como não existe sequência de zeros de g convergindo a a, podemos encontrar um número $\tau > 0$ tal que $g(z) \neq 0$ para z no anel $A(a,0,\tau)$. Nesse caso, dados $r > 0$ e $\varepsilon > 0$ olhamos para $\frac{1}{g(z)}$ e temos duas possibilidades:

(1) ou existe $\beta \in A(a,0,\tau) \cap A(a,0,r)$ tal que $\left|\frac{1}{g(\beta)}\right| > \frac{1}{\varepsilon}$;

(2) ou $\left|\frac{1}{g(z)}\right|$ é limitado no anel $A(a,0,\tau) \cap A(a,0,r)$.

Se (1) ocorre então $|g(\beta)| < \varepsilon$ e, portanto, $|f(\beta) - \alpha| < \varepsilon$. Nesse caso, o teorema está demonstrado.

Se (2) ocorre então, pela Proposição 3.4, $\frac{1}{g(z)}$ tem uma singularidade removível em a. Portanto, $\frac{1}{g(z)}$ tem expansão em série de potências convergente no disco $D(a,\tau) \cap D(a,r)$, digamos

$$\frac{1}{g(z)} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a)^n.$$

Seja c_{n_0} o primeiro coeficiente não nulo dessa série. Então

$$\frac{1}{g(z)} = (z-a)^{n_0} \sum_{n=n_0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-n_0}.$$

Fazendo $h(z) = \sum\limits_{n=n_0}^{\infty} c_n (z-a)^{n-n_0}$, temos que h é holomorfa no disco $D(a,\tau) \cap D(a,r)$ e $h(a) = c_{n_0} \neq 0$. Como $\frac{1}{g(z)} = (z-a)^{n_0} h(z)$, temos que $(z-a)^{n_0} g(z) = \frac{1}{h(z)}$ e, portanto,

$$\lim_{z\to a} (z-a)^{n_0} g(z) = \frac{1}{h(a)} \neq 0.$$

Então, pela Proposição 3.6, g tem um polo de ordem n_0 em a, o que contradiz o fato de a ser singularidade essencial de g. Logo, (2) nunca ocorre e o teorema está demonstrado. $\square$

Introduziremos agora o conceito de resíduo e demonstraremos a seguir o Teorema dos Resíduos, o qual será a ferramenta utilizada para o cálculo de integrais reais na próxima seção.

Definição 3.9. Se f é uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$, o *resíduo* de f em a é o coeficiente b_1 do termo $\dfrac{1}{z-a}$ de sua série de Laurent com centro em a.

Usaremos a notação $res(f, a)$ para designar o resíduo de f em a. Antes de enunciarmos o Teorema dos Resíduos, é pertinente definirmos o termo *curva de Jordan suave por partes*.

Definição 3.10. Uma *curva de Jordan suave por partes* é um caminho suave por partes, fechado e simples.

Visto isso, estamos prontos para enunciar o Teorema dos Resíduos, um dos mais importantes teoremas que fundamentam esse artigo.

Teorema 3.11 (Teorema dos Resíduos)**.** *Seja f uma função holomorfa definida num domínio $U \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$. Suponha que $\gamma \subset U \setminus \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ é uma curva de Jordan suave por partes, orientada no sentido anti-horário, tal que a região fechada e limitada por ela determinada está contida em U e contém todos os pontos $a_1, a_2, \dots, a_m$. Então*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} f(z)dz = res(f, a_1) + res(f, a_2) + \cdots + res(f, a_m).$$

Antes de demonstrarmos esse teorema, iremos enunciar o Teorema de Cauchy, o qual será necessário para o desenvolvimento da demonstração do Teorema 3.11.

Teorema 3.12 ([4], Cap. 5, Teorema 2.13 - Teorema de Cauchy)**.** *Sejam $U \subset \mathbb{C}$ um domínio e $f : U \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa. Seja $V \subset \mathbb{C}$ um subconjunto fechado e limitado, cuja fronteira ∂V consiste de um número finito de curvas de Jordan suave por partes, $\partial V = \gamma_1 \cup \cdots \cup \gamma_n$, e tal que $V \setminus \partial V$ é um domínio. Então*

$$\int\limits_{\partial V} f(z)dz = 0.$$

Vamos então à prova do Teorema dos Resíduos.

Demonstração. Para cada singularidade isolada a_j de f, escolha um círculo γ_j centrado em a_j satisfazendo as seguintes condições: γ_k não tem ponto comum com γ_n se $k \neq n$ e γ_j não tem ponto comum com γ, para $1 \leq j \leq m$ (veja Figura 1).

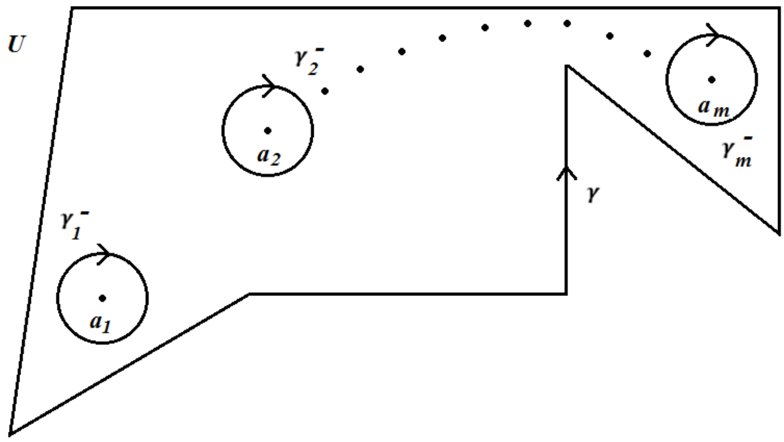

Figura 1: Curva γ. Fonte: [4], p. 149.

Oriente os γ_j, $1 \leq j \leq m$, no sentido anti-horário. Pelo Teorema de Cauchy temos

$$\int\limits_{\gamma \cup \gamma_1^- \cup \gamma_2^- \cup \cdots \cup \gamma_m^-} f(z)dz = 0.$$

Mas isso equivale a

$$\int\limits_{\gamma} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_1^-} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2^-} f(z)dz + \cdots + \int\limits_{\gamma_m^-} f(z)dz = 0,$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \int\limits_{\gamma} f(z)dz &= -\int\limits_{\gamma_1^-} f(z)dz - \int\limits_{\gamma_2^-} f(z)dz - \cdots - \int\limits_{\gamma_m^-} f(z)dz \\ &= \int\limits_{\gamma_1} f(z)dz + \int\limits_{\gamma_2} f(z)dz + \cdots + \int\limits_{\gamma_m} f(z)dz. \end{aligned}$$

Nos resta, portanto, calcular $\int\limits_{\gamma_j} f(z)dz$, $j = 1, \ldots, m$. Ora, o Teorema de Laurent nos diz que, se

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m \frac{1}{(z-a_j)^m} + \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z-a_j)^n$$

é a série de Laurent de f em torno de a_j, então

$$b_1 = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\gamma_j} f(z)dz.$$

Logo, $\int\limits_{\gamma_j} f(z)dz = 2\pi i \cdot res(f, a_j)$ e o teorema está demonstrado. $\square$

Apresentaremos a seguir resultados que nos auxiliarão a calcular o resíduo de f em determinado ponto singular. Note que se a for singularidade removível de f então $res(f, a) = 0$, visto que os coeficientes b_m da série de Laurent desta função serão iguais a zero para $m \geq 1$. Além disso, é importante mencionar que, se a é singularidade essencial de f então não dispomos de procedimentos para o cálculo de $res(f, a)$, e este deve ser calculado via série de Laurent. Porém, se a é um polo dispomos da proposição a seguir (que será de muita utilidade no cálculo de algumas integrais reais por meio do Teorema dos Resíduos na próxima seção).

Proposição 3.13. *Seja f uma função holomorfa no anel $A(a, 0, \rho)$.*

(i) Se a é um polo de ordem 1 de f, então $res(f, a) = \lim\limits_{z \to a} (z - a) f(z)$.

(ii) Se a é um polo de ordem $k > 1$ de f, considere a função $g(z) = (z - a)^k f(z)$ e então

$$res(f, a) = \frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}.$$

Demonstração. *(i)* A série de Laurent de f no anel $A(a, 0, \rho)$ é dada por

$$f(z) = \frac{res(f, a)}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Assim sendo, $(z - a) f(z) = res(f, a) + \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{n+1}$ e então $\lim\limits_{z \to a} (z - a) f(z) = res(f, a)$.

(ii) A série de Laurent de f no anel $A(a, 0, \rho)$ é dada por

$$f(z) = \frac{b_k}{(z - a)^k} + \frac{b_{k-1}}{(z - a)^{k-1}} + \cdots + \frac{res(f, a)}{z - a} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^n.$$

Multiplicando por $(z - a)^k$ obtemos

$$g(z) = b_k + b_{k-1}(z - a) + \cdots + res(f, a)(z - a)^{k-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - a)^{n+k}.$$

Observe que g é holomorfa no disco $D(a, \rho)$ e, portanto, a expressão acima é sua série de Taylor de centro em a. Mas então o coeficiente de $(z - a)^{k-1}$ é precisamente $\frac{g^{(k-1)}(a)}{(k-1)!}$. $\square$

Atente-se para o fato de que o procedimento descrito no item (ii) da proposição anterior para a determinação do resíduo de f em a será conveniente caso essa função seja "manejável" e, além disso, a ordem k não seja alta, pois, como já observado, devemos calcular a derivada de uma função que é definida pelo produto de duas outras, o que pode não ser tão simples caso esses "requisitos" não sejam satisfeitos.

Com isso em mãos, enunciaremos a seguir exemplos do emprego do Teorema dos Resíduos por meio de uma aplicação notável no campo real.

4 Cálculo de Integrais Reais utilizando Resíduos

Uma das aplicações importantes da teoria dos resíduos consiste no cálculo de certos tipos de integrais reais. Apresentaremos a seguir três casos que ilustram alguns métodos úteis. Os exemplos utilizados podem ser encontrados em [2].

Caso 1. Integrais Impróprias de Funções Racionais. Integrais do tipo

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)} dx, \tag{2}$$

onde p e q são polinômios sem fator comum, podem ser calculadas facilmente com o auxílio da teoria dos resíduos, desde que os zeros de q sejam conhecidos. Vamos supor que q não tenha zeros reais, pois se $q(x)$ contém um fator $(x - x_0)^k$, onde $k \in \mathbb{N}$, então o integrando torna-se infinito no ponto x_0 e de tal ordem que a integral imprópria

$$\int_{a}^{x_0} \frac{p(x)}{q(x)} dx,$$

em que a é uma constante real qualquer, não converge.

Na verdade, a integral (2) existe quando, e somente quando, o grau de q é maior do que o de p, no mínimo por duas unidades, e q não tem zeros reais.

Como exemplo, vamos usar resíduos para determinar o valor da integral elementar

$$I = \int_{0}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{x^2 + 1} dx. \tag{3}$$

A segunda integral representa uma integração, ao longo de todo o eixo real, da função complexa

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 1} = \frac{1}{z + i} \frac{1}{z - i}; \tag{4}$$

função esta que tem polos de ordem 1 nos pontos $z = i$ e $z = -i$.

Seja C_R o semicírculo superior de um círculo $|z| = R$, onde $R > 1$ (Figura 2).

Integrando f ao longo da fronteira da região semicircular, no sentido anti-horário, temos

$$\int_{-R}^{R} f(x) dx + \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \cdot res(f, i),$$

pelo Teorema dos Resíduos. Da expressão (4) e da Proposição 3.13 para $f(z)$, temos que

$$res(f, i) = \left. \frac{1}{z + i} \right|_{z=i} = \frac{1}{2i}.$$

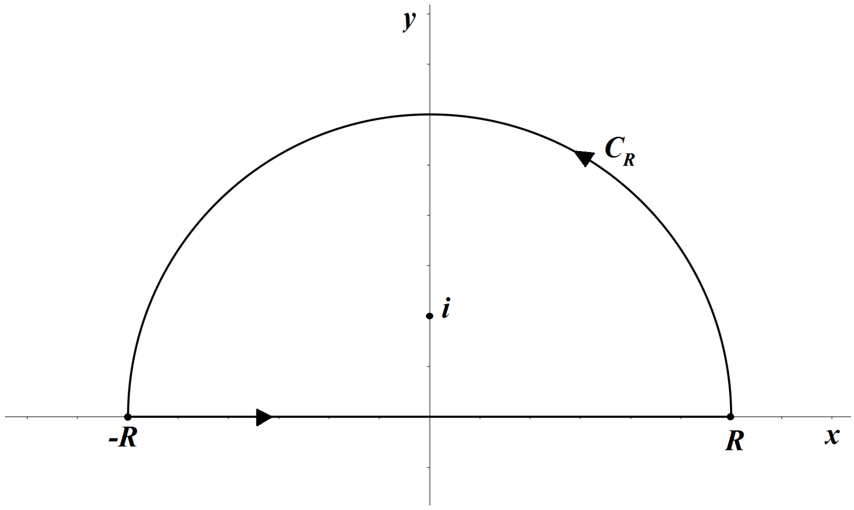

Figura 2: Curva C_R. Fonte: [2], p. 155.

Portanto, quando $R > 1$,

$$\int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \pi - \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1}. \tag{5}$$

Ora, $|z| = R$ quando z está sobre C_R, e

$$|z^2+1| \geq |z^2| - 1 = R^2 - 1.$$

Consequentemente,

$$\left| \int_{C_R} \frac{dz}{z^2+1} \right| \leq \int_{C_R} \frac{|dz|}{R^2-1} = \frac{\pi R}{R^2-1},$$

e esta quantidade tende para zero quando R tende para o infinito. Segue-se da fórmula (5) que

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{dx}{x^2+1} = \pi. \tag{6}$$

Logo,

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

O limite (6) é conhecido como *valor principal de Cauchy* da integral na fórmula (7). Em geral,

$$\lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} f(x)dx = V.P. \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx. \tag{8}$$

Caso 2. Integrais Impróprias envolvendo Funções Trigonométricas. Como exemplo de outro tipo de integral que pode ser calculada por meio de integrais curvilíneas e da teoria dos resíduos, consideremos a integral

$$\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{x^2+1} = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos(x)dx}{x^2+1}. \tag{9}$$

Como $|\cos(z)|$ cresce como e^y quando y tende para o infinito, o método usado acima não se aplica aqui sem algumas modificações.

Ora, $\cos(x)$ é a parte real de e^{ix}; portanto,

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)dx}{x^2+1} = \frac{1}{2}Re\left(\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}dx}{x^2+1}\right). \tag{10}$$

Escrevemos $f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z^2+1}$ e notamos que

$$|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1 \text{ para } y \geq 0. \tag{11}$$

As singularidades da nossa função f são os polos simples $z = \pm i$. Em $z = i$ o resíduo de f é

$$res(f,i) = \left.\frac{e^{iz}}{z+i}\right|_{z=i} = \frac{1}{2ei},$$

e portanto,

$$\int_{-R}^R \frac{e^{ix}dx}{x^2+1} + \int_{C_R} \frac{e^{iz}dz}{z^2+1} = 2\pi i \cdot res(f,i) = \frac{\pi}{e}, \tag{12}$$

onde C_R é o semicírculo superior do círculo $|z| = R$ $(R > 1)$ (Figura 2). Em vista da desigualdade (11), segue-se, como antes, que a segunda integral em (12) tende para zero quando R tende para o infinito, de modo que

$$\int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ix}dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{e}.$$

A parte real desta integral coincide portanto, com o valor da própria integral. Então, de acordo com (10),

$$\int_0^\infty \frac{\cos(x)dx}{x^2+1} = \frac{\pi}{2e}.$$

Caso 3. Integrais Definidas de Funções Trigonométricas. O método de resíduos também é útil no cálculo de integrais definidas do tipo

$$\int_0^{2\pi} F(\operatorname{sen}(\theta), \cos(\theta))d\theta, \tag{13}$$

em que F é um quociente de polinômios de $\operatorname{sen}(\theta)$ e $\cos(\theta)$. Se considerarmos θ como argumento de z sobre o círculo unitário, temos $z = e^{i\theta}$ e podemos escrever

$$\operatorname{sen}(\theta) = \frac{z - z^{-1}}{2i}, \ \cos(\theta) = \frac{z + z^{-1}}{2} \ \text{ e } \ dz = ie^{i\theta}d\theta = izd\theta. \tag{14}$$

Assim, a integral (13) passa a representar uma integral de linha de uma função racional de z ao longo do círculo unitário. Essa integral de linha, por sua vez, pode ser calculada pelo Teorema dos Resíduos, desde que conheçamos os zeros do polinômio no denominador.

Como exemplo, vamos computar o valor da integral

$$I = \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{\frac{5}{4} + \operatorname{sen}(\theta)}.$$

Observe que o denominador do integrando nunca se anula. Em termos de pontos z sobre o círculo unitário, podemos escrever, de acordo com as fórmulas (14),

$$\frac{5}{4} + \operatorname{sen}(\theta) = \frac{5}{4} + \frac{z - \frac{1}{z}}{2i} = \frac{1}{4iz}(2z^2 + 5iz - 2)$$

e

$$I = \int_C \frac{4dz}{2z^2 + 5iz - 2} = \int_C \frac{2dz}{(z + 2i)(z + \frac{1}{2}i)},$$

onde C é o círculo $|z| = 1$ (Figura 3).

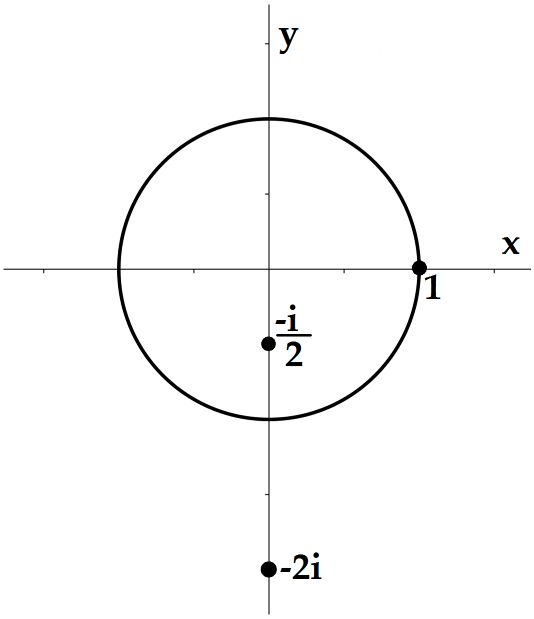

Figura 3: Curva C. Fonte: [2], p. 160.

O único ponto singular do integrando, interior a C, é o polo de ordem um, $z = -\frac{i}{2}$, e o resíduo do integrando nesse ponto é $\frac{4}{3i}$. Portanto, pelo Teorema dos Resíduos,

$$I = 2\pi i \cdot \frac{4}{3i} = \frac{8}{3}\pi.$$

Referências

[1] LINS NETO, A. *Funções de uma Variável Complexa.* Rio de Janeiro: Projeto Euclides, SBM, 1996.

[2] CHURCHIL, R. V. *Variáveis Complexas e suas Aplicações.* São Paulo: MCGraw-Hill do Brasil e Editora da Universidade de São Paulo, 1975.

[3] FERNANDEZ, C. S.; BERNARDES JR., N. C. *Introdução às Funções de uma Variável Complexa.* 2. ed. Rio de Janeiro: Coleção Textos Universitários, SBM, 2008.

[4] SOARES, M. G. *Cálculo em uma variável complexa.* Rio de Janeiro: Impa, 2007.

[5] BOURCHTEIN, A.; BOURCHTEIN, L. *Teoria das Funções de uma Variável Complexa.* Rio de Janeiro: LTC, 2014.