Uma conexão entre polinômios para-ortogonais e polinômios ortogonais na reta real[1]

LUIS HENRIQUE RODRIGUES DA SILVA[2], MARISA DE SOUZA COSTA[3]

Resumo. Neste trabalho, apresentamos os polinômios de Szegő, que são ortogonais no círculo unitário e, a partir deles, construímos sequências especiais de polinômios chamados de para-ortogonais. Além disso, apresentamos uma conexão entre certos polinômios para-ortogonais com polinômios ortogonais em $[-1,1]$ através da transformação $x = \dfrac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$.

Palavras chave: Polinômios ortogonais, polinômios de Szegő, polinômios para-ortogonais.

Abstract. In this work, it was introduced the Szegő polynomials, which are orthogonal on the unit circle and, from them, it was made many special sequences of polynomials called para-orthogonal. Besides that, we present a connection between certain para-orthogonal polynomials with orthogonal polynomials on $[-1,1]$ by the transformation $x = \dfrac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2})$.

Key words: Orthogonal polynomials, Szegő polynomials, para-orthogonal polynomials.

[1]Trabalho desenvolvido com o apoio da FAPEMIG.

[2]Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121, Santa Mônica, Uberlândia-MG, 38408-100. E-mail: luishenrique.ear@gmail.com

[3]Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila, 2121, Santa Mônica, Uberlândia-MG, 38408-100. E-mail: marisasc@ufu.br

1 Introdução

O estudo dos polinômios ortogonais está presente em vários ramos da Matemática. Por possuírem uma vasta aplicação em diversos tipos de problemas da Matemática Pura e das Ciências Aplicadas, os polinômios ortogonais na reta real foram objeto de estudo de muitos matemáticos famosos, tais como Jacobi, Legendre, Hermite e Laguerre. Tais polinômios possuem muitas propriedades interessantes que são fundamentais na resolução de certos problemas relacionados com Equações Diferenciais, Frações Contínuas e Teoria da Aproximação, por exemplo.

Nos últimos anos, uma classe especial de polinômios ortogonais tem despertado o interesse de muitos pesquisadores. Dada uma medida positiva $d\psi(z)$ definida no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, a sequência de polinômios ortogonais mônicos associados $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é definida por

$$\int_{\mathcal{C}} S_n(z)\,\overline{S_m(z)}\,d\psi(z) = 0, \text{ para todo } n \neq m.$$

Estes polinômios são também conhecidos como polinômios de Szegő, nome dado em homenagem ao primeiro matemático a estudá-los no início do século XX, Gábor Szegő. Assim como os polinômios ortogonais na reta real, os polinômios ortogonais no círculo unitário podem ser aplicados à resolução de problemas em diversas áreas.

Os polinômios de Szegő satisfazem a relação de recorrência

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z), \tag{1}$$

onde $S_0(z) = 1$ e $S_n^*(z) = z^n\overline{S_n(1/\bar{z})}$, $n \geq 1$. Os coeficientes $\alpha_n = -\overline{S_{n+1}(0)}$, $n \geq 0$, são conhecidos como coeficientes de reflexão ou coeficientes de Verblunsky. Um fato bastante interessante sobre estes coeficientes é que uma sequência de polinômios de Szegő e a medida associada podem ser completamente determinadas pela sequência $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ (ver [8]).

Em 1989, os matemáticos W. B. Jones, O. Njåstad e W. J. Thron apresentaram em [6] um estudo dos polinômios

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_nS_n^*(z) \tag{2}$$

com $|w_n| = 1$, chamando-os de polinômios para-ortogonais. Neste mesmo trabalho foi provado que esses polinômios possuem a importante propriedade de que seus zeros são todos simples e estão no círculo unitário $\mathcal{C}$. Desde então, tais polinômios têm sido amplamente estudados. Em [3], Bracciali *et al.* apresentaram uma aplicação dos polinômios para-ortogonais ao estudo do problema de análise de frequência.

Neste artigo, consideramos os polinômios de Szegő mônicos associados a uma medida simétrica $d\psi$ e estudamos algumas propriedades das sequências de polinômios para-ortogonais

(2). Dois casos especiais considerados neste trabalho são $w_n = 1$ e $w_n = -1$.

Por fim, usamos a transformação

$$x = \frac{1}{2}(z^{1/2} + z^{-1/2}),$$

que foi primeiramente estudada por Delsarte e Genin [5], para apresentar uma conexão existente entre os polinômios para-ortogonais

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(1,z)}{1+S_n(0)} \text{ e } R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(-1,z)}{(z-1)(1-S_{n+1}(0))}$$

e certos polinômios ortogonais simétricos no intervalo $[-1, 1]$.

2 Preliminares

Para um entendimento satisfatório do presente trabalho é necessário tratarmos inicialmente sobre alguns pré-requisitos básicos necessários para o estudo dos polinômios ortogonais no círculo unitário e para-ortogonais, tais como algumas definições e propriedades dos polinômios ortogonais na reta real e sequências encadeadas positivas. Os resultados desta seção serão apresentados sem demonstração, uma vez que esse não é o principal interesse desse artigo. Contudo, as demonstrações podem ser encontradas em [1], [2] e [4].

Seja ψ uma função real definida no intervalo (a, b), $-\infty \leq a < b \leq \infty$, limitada e não-decrescente. É chamado ponto de aumento de ψ qualquer ponto $\xi \in (a, b)$ tal que ψ não seja constante no intervalo $[\xi - \epsilon, \xi + \epsilon]$, ou seja, $\psi(\xi + \epsilon) - \psi(\xi - \epsilon) > 0$, qualquer que seja $\epsilon > 0$. Dessa forma, considerando que ψ possua infinitos pontos de aumento em (a, b), e se os momentos definidos por

$$\mu_r = \int_a^b x^r d\psi(x) \tag{3}$$

existem e são finitos para $r = 0, 1, 2, \ldots$, então $d\psi(x)$ é uma *distribuição positiva* (ou *medida positiva*) no intervalo (a, b). Caso $d\psi(x) = w(x)dx$, com $w(x) > 0$ em (a, b), porém não identicamente nula, então $w(x)$ é chamada *função peso*. Se, além disso, os momentos existirem para todo $r = 0, \pm1, \pm2, \ldots$, $d\psi(x)$ é dita uma *distribuição forte*. No caso onde $(a, b) \subseteq (0, \infty)$, $d\psi(x)$ é chamada uma *distribuição forte de Stieltjes*, denotada por $SS(a, b)$.

Se ψ é uma medida positiva em uma intervalo $[-b, b]$, $b > 0$, tal que vale a propriedade

$$d\psi(x) = -d\psi(-x), \qquad x \in [-b, b],$$

então ψ é denominada medida simétrica.

Definição 1. *Dizemos que* $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *é uma sequência de polinômios ortogonais com relação à medida* $d\psi(x)$ *no intervalo* (a,b) *se* P_n *possui grau exatamente* n *e*

$$\langle P_n, P_m \rangle_\psi = \int_a^b P_n(x)P_m(x)d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \textit{se } n \neq m, \\ \rho_n > 0, & \textit{se } n = m. \end{cases} \tag{4}$$

Se $\rho_n = 1$, a sequência é chamada de *sequência de polinômios ortonormais*. No caso onde o coeficiente que acompanha o termo de maior grau do polinômio é igual a 1, o polinômio é dito mônico.

Definição 2. *Dada uma sequência de números reais* $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$*, onde cada* μ_n *é definido por (3), os determinantes de Hankel de ordem* $n+1$ *associados são definidos por*

$$H_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_{n-1} \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{n-1} & \mu_n & \cdots & \mu_{2n-2} \end{vmatrix}, \; n \geq 0. \tag{5}$$

É possível provar que os determinantes de Hankel de ordem $n+1$, $n \geq 0$, são diferentes de zero se, e somente se, existe uma única sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ em (a,b) relativamente à distribuição $d\psi(x)$.

Além disso, dada uma sequência de polinômios ortogonais $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, podemos concluir que $\{P_j(x)\}_{j=0}^{n}$ forma uma base para o espaço dos polinômios de grau no máximo n, $\mathbb{P}_n$, pois cada polinômio P_j possui grau exatamente j.

Dizer que $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios ortogonais relativamente à medida $d\psi$ no intervalo (a,b) é equivalente a dizer que para todo polinômio $\pi \in \mathbb{P}_n$ de grau exatamente m,

$$\langle \pi, P_n \rangle = \int_a^b \pi(x)\, P_n(x)\, d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m < n, \\ \hat{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n, \end{cases}$$

ou ainda,

$$\langle x^m, P_n \rangle = \int_a^b x^m P_n(x)\, d\psi(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } 0 \leq m < n, \\ \tilde{\rho}_n \neq 0, & \text{se } m = n. \end{cases}$$

Ademais, dadas duas sequências de polinômios ortogonais relativamente à mesma medida $d\psi$ no intervalo (a,b), $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{Q_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$, existe uma sequência de números reais $\{k_j\}_{j=0}^{\infty}$ tal que

$$P_j(x) = k_j\, Q_j(x), \quad j = 0, 1, 2, ...,$$

onde k_j é uma constante que depende apenas de j.

Uma das principais propriedades de uma sequência de polinômios ortogonais é que eles satisfazem uma relação de recorrência de três termos da forma

$$P_{n+1}(x) = (\gamma_{n+1}x - \beta_{n+1})P_n(x) - \alpha_{n+1}P_{n-1}(x), \quad n \geq 0, \tag{6}$$

onde $P_0(x) = 1,\ P_{-1}(x) = 0,\ \ \alpha_{n+1}, \beta_n, \gamma_n \in \mathbb{R},\ \ n \geq 1$ e

$$\gamma_{n+1} = \frac{a_{n+1,n+1}}{a_{n,n}} \neq 0, \qquad \beta_{n+1} = \gamma_{n+1}\frac{\langle xP_n, P_n\rangle}{\langle P_n, P_n\rangle}, \qquad \alpha_{n+1} = \frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\frac{\langle P_n, P_n\rangle}{\langle P_{n-1}, P_{n-1}\rangle} \neq 0.$$

Os polinômios ortogonais também possuem algumas propriedades interessantes em relação aos seus zeros. Uma delas é que todas as suas raízes são reais, distintas, e estão contidas no interior do intervalo de ortogonalidade em que a sequência foi definida. Além disso, os zeros de dois polinômios de graus consecutivos são entrelaçados, ou seja entre dois zeros consecutivos do polinômio de grau $n-1$, $P_{n-1}(x)$, existe somente um zero do polinômio $P_n(x)$.

As demonstrações destes fatos podem ser encontradas em [1], [2] e [4].

Definição 3. *Uma sequência de números reais $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ é chamada de sequência encadeada positiva se existe uma sequência $\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$, com $0 \leq g_0 < 1$ e $0 < g_n < 1$, $n \geq 1$, tal que*

$$a_n = (1 - g_{n-1})g_n, \quad n = 1, 2, 3, \ldots .$$

$\{g_k\}_{k=0}^{\infty}$ é chamada de sequência de parâmetros para $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ e g_0 é o parâmetro inicial.

Observamos que se $\{P_n\}$ é uma sequência de polinômios satisfazendo uma relação de recorrência de três termos do tipo (6) tal que os coeficientes β_n são todos nulos e $\{\alpha_n\}$ forma uma sequência encadeada, então P_n, $n \geq 1$, possui todos os seus zeros no intervalo $(-1, 1)$ (ver Chihara [4], pág. 108).

Definição 4. *Seja $d\psi(t)$ uma distribuição forte de Stieltjes em (a, b). Dizemos que $\{B_n(t)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios L-ortogonais com relação à medida $d\psi(x)$ em (a, b), onde $B_n(t)$ é mônico de grau exatamente n, se*

$$\int_a^b t^{-n+s}B_n(t)d\psi(t) = \begin{cases} 0, & se\ s = 0, \ldots, n-1, \\ \rho_n > 0, & se\ s = n. \end{cases} \tag{7}$$

Por possuírem propriedades bastante análogas às dos polinômios ortogonais na reta real, os polinômios L-ortogonais são, por vezes, chamados de polinômios similares aos ortogonais. Essa classe especial de polinômios também satisfaz a uma relação de recorrência de três termos e suas raízes também são reais, distintas e estão todas contidas no interior do intervalo de ortogonalidade em que a sequência é definida.

Para mais informações sobre os polinômios similares aos ortogonais, ver [2].

3 Polinômios Ortogonais no Círculo Unitário

Tomemos uma medida positiva ψ no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, isto é, $\psi(e^{i\theta})$ é uma função real, limitada e não-decrescente, definida em $0 \leq \theta \leq 2\pi$ e com suporte infinito em $\mathcal{C}$, onde os momentos trigonométricos são dados por

$$\mu_m = \int_{\mathcal{C}} z^{-m} d\psi(z) = \int_0^{2\pi} e^{-im\theta} d\psi(e^{i\theta}), \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots. \tag{8}$$

Observamos que $\overline{\mu_{-n}} = \mu_n$, o que decorre do fato de $\overline{e^{in\theta}} = e^{-in\theta}$. Além disso, note que $\psi(e^{i\theta})$ induz uma outra medida $\widetilde{\psi}(\theta)$ com suporte em $[0, 2\pi]$ que, por simplicidade, denotaremos por $\psi(\theta)$.

Consideremos o funcional linear

$$\mathcal{L}[z^m] = \int_{\mathcal{C}} z^m d\psi(z). \tag{9}$$

A partir da definição do funcional linear $\mathcal{L}$, podemos definir o produto interno

$$\langle f, g \rangle = \mathcal{L}\left[f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})}\right] = \int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})\overline{g(e^{i\theta})} d\psi(\theta). \tag{10}$$

Se tomarmos $f(z) = \sum_{k=p}^{q} a_k z^k$, com $p, q \in \mathbb{Z}$, $p \leq q$ e $a_k \in \mathbb{C}$, sabendo que $\mathcal{L}[z^m] = \mu_{-m}$, obtemos

$$\mathcal{L}[f] = \mathcal{L}\left[\sum_{k=p}^{q} a_k z^k\right] = \sum_{k=p}^{q} a_k \mu_{-k}. \tag{11}$$

Definição 5. *A matriz associada à sequência de momentos $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ definidos em (8), dada por*

$$T_n = \begin{pmatrix} \mu_0 & \mu_{-1} & \cdots & \mu_{-n} \\ \mu_1 & \mu_0 & \cdots & \mu_{-n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_n & \mu_{n-1} & \cdots & \mu_0 \end{pmatrix}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots, \tag{12}$$

é chamada matriz de Toeplitz de ordem n. Além disso, o determinante de T_n é conhecido como determinante de Toeplitz e detonado por $\Delta_n,\ n \geq 0$, com $\Delta_{-1} = 1$.

Dizemos que o funcional linear $\mathcal{L}$ é positivo-definido quando $\Delta_n > 0$, para todo $n = 0, 1, 2, \ldots$. Se $\Delta_n \neq 0$, $n = 0, 1, \ldots$, $\mathcal{L}$ é dito quase-definido.

Ademais, dada uma determinada sequência $\{\mu_n\}_{-\infty}^{\infty}$ de números complexos, dizemos que a sequência é hermitiana sempre que $\mu_n = \overline{\mu_{-n}}$, e será hermitiana positiva-definida se $\Delta_n > 0$, $n \geq 0$.

Definição 6. *Dado um funcional linear $\mathcal{L}$ positivo-definido, uma sequência de polinômios $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ é dita sequência de polinômios ortogonais com relação a $\mathcal{L}$, se*

$$\langle S_n, S_m \rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{S_m(z)}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } n \neq m, \\ \kappa_n^2 > 0, & \text{se } n = m. \end{cases} \tag{13}$$

Observamos que

$$\langle S_n, \pi_m \rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\overline{\pi_m(z)}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \hat{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } n = m, \end{cases} \tag{14}$$

para todo polinômio π_m de grau $m \leq n$, e

$$\langle S_n, z^m \rangle = \mathcal{L}\left[S_n(z)\frac{1}{z^m}\right] = \begin{cases} 0, & \text{se } m < n, \\ \tilde{\kappa}_n \neq 0, & \text{se } n = m, \end{cases} \tag{15}$$

para $n \geq 0$ e $0 \leq m \leq n$. Observa-se, ainda, que as definições (14) e (15) são equivalentes e também é possível demonstrar que, em (15), $\tilde{\kappa}_n = \dfrac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}$ (ver [2]).

Definição 7. *Dado um polinômio q_n de grau exatamente n, o recíproco de q_n é o polinômio de grau no máximo n*

$$q_n^*(z) = z^n\overline{q_n(1/\overline{z})}. \tag{16}$$

É importante observar que $(q_n^*)^* = q_n$. Assim, é possível demonstrar também que

$$\langle S_n^*, z^m \rangle = \begin{cases} \Delta_n/\Delta_{n-1}, & \text{se } m = 0, \\ 0, & \text{se } m = 1, 2, \ldots, n, \end{cases} \tag{17}$$

e

$$\langle S_n, S_m \rangle = \begin{cases} 0, & \text{se } m = 0, 1, \ldots, n-1, \\ \Delta_n/\Delta_{n-1}, & \text{se } m = n. \end{cases} \tag{18}$$

Os números $\alpha_n = -\overline{S_{n+1}(0)}$ são de suma importância no estudo dos polinômios ortogonais no círculo unitário e são conhecidos como coeficientes de Verblunsky ou, simplesmente, coeficientes de reflexão.

Os polinômios de Szegő mônicos satisfazem o par de relações de recorrência

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1} z S_{n-1}(z), \tag{19}$$

$$S_n(z) = (1 - |\alpha_{n-1}|^2) z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_n^*(z), \tag{20}$$

para $n \geq 1$, onde $S_0(z) = S_0^*(z) = 1$ e $|\alpha_n| < 1$, para todo $n \geq 0$.

A demonstração desses fatos podem ser encontradas em [2] ou em [8].

Se substituírmos a equação (19) em (20), encontramos a seguinte expressão

$$S_n(z) = z S_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1} S_{n-1}^*(z). \tag{21}$$

As relações de recorrência acima mostram que os polinômios de Szegő mônicos são completamente determinados pelos coeficientes de reflexão.

Teorema 1. *As raízes dos polinômios de Szegő, S_n, $n \geq 1$, estão todas contidas no disco unitário aberto $|z| < 1$.*

Demonstração: Seja

$$S_n(z) = (z - z_1)(z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

onde $z_1, z_2, \ldots, z_n$, $n \geq 1$, são os seus zeros. Mostraremos que o resultado é válido para z_1. A prova para as demais raízes segue de maneira análoga. Assim, dado um polinômio π de grau $n - 1$ definido como

$$\pi(z) = \frac{S_n(z)}{z - z_1} = (z - z_2) \ldots (z - z_n),$$

temos que $S_n(z) + z_1 \pi(z) = z\pi(z)$. Como $\|S_n + z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2$, segue que

$$\langle S_n, S_n \rangle + 2\langle S_n, z_1\pi \rangle + \langle z_1\pi, z_1\pi \rangle = \langle z\pi, z\pi \rangle.$$

Então,

$$\|S_n\|^2 + 2\langle S_n, z_1\pi \rangle + \|z_1\pi\|^2 = \|z\pi\|^2.$$

Como $\langle S_n, z_1\pi \rangle = 0$ e $\|z\pi\|^2 = \mathcal{L}\left[z\pi\overline{z\pi}\right] = \mathcal{L}\left[\pi\overline{\pi}\right] = \|\pi\|^2$, segue que

$$\|S_n\|^2 + \|z_1\pi\|^2 = \|\pi\|^2.$$

Assim, concluímos que

$$\|S_n\|^2 = (1 - |z_1|^2)\|\pi\|^2.$$

Dessa maneira, $(1 - |z_1|^2) > 0$ e, portanto, $|z_1|^2 < 1$. ∎

Para mais informações sobre os polinômios de Szegő, ver [8] e [9].

4 Polinômios Ortogonais e Polinômios Para-Ortogonais Reais

Nesta seção serão apresentados os chamados polinômios para-ortogonais e suas importantes propriedades, além do principal resultado do presente trabalho: uma conexão entre polinômios para-ortogonais e os polinômios ortogonais na reta real. Os resultados apresentados aqui podem ser encontrados em [2] e em [7].

4.1 Polinômios Para-Ortogonais

Os polinômios para-ortogonais estão relacionados com os polinômios de Szegő e possuem propriedades bastante importantes dentro da Análise Numérica como, por exemplo, o fato de seus zeros serem simples e estarem todos contidos no círculo unitário.

Consideremos, portanto, a sequência de polinômios de Szegő, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$, com relação a uma medida $d\psi$ definida no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$, ou seja,

$$\langle S_n, S_m \rangle = \int_{\mathcal{C}} S_n(z)\overline{S_m(z)}d\psi(z) = 0, \quad \text{se } n \neq m.$$

Definição 8. *Dizemos que $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência de polinômios para-ortogonais com relação à medida ψ, se X_n é de grau $n \geq 0$ e*

$$\begin{aligned} \langle X_n, 1 \rangle &\neq 0, \\ \langle X_n, z^m \rangle &= 0, \quad m = 1, 2, \ldots, n-1, \\ \langle X_n, z^n \rangle &\neq 0. \end{aligned}$$

Note que, diferentemente dos polinômios ortogonais, esses polinômios não satisfazem $\langle X_n, 1 \rangle = 0$ e, por essa razão, são chamados de para-ortogonais. Observemos, ainda, que pela Definição 8, as sequências de polinômios de Szegő e de seus recíprocos, $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{S_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, não são sequências de polinômios para-ortogonais.

Definição 9. *Dizemos que um polinômio X é κ-invariante se, para $\kappa \in \mathbb{C}$, $\kappa \neq 0$,*

$$X^*(z) = \kappa X(z), \quad \forall\, z \in \mathbb{C}. \tag{22}$$

A sequência $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ é dita $\{\kappa_n\}$-invariante se, para cada n, X_n é κ_n-invariante.

Consideremos as seguintes funções

$$S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z), \quad z, w_n \in \mathbb{C},\ n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{23}$$

Usando as relações de ortogonalidade satisfeitas pelas sequências $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{S_n^*\}_{n=0}^{\infty}$, obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s}[S_n(z) + w_n S_n^*(z)]d\psi(z) = 0, \quad s = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{24}$$

O teorema a seguir fornece uma importante caracterização dos polinômios para-ortogonais κ-invariantes.

Teorema 2. *Seja $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios de Szegő relativamente à medida $d\psi$. Se $c_n, w_n \in \mathbb{C}$, $c_n \neq 0$, $n \geq 0$, com $|w_n| = 1$, e se $\kappa_n = \overline{c_n}\dfrac{\overline{w_n}}{c_n}$, então $\{c_n S_n(w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante de polinômios para-ortogonais com relação a ψ e $|\kappa_n| = 1$, $n \geq 0$.*

Demonstração: Sabemos que o termo independente dos polinômios recíprocos é igual ao coeficiente que acompanha o termo de maior grau do respectivo polinômio de Szegő, isto é, $S_n^*(0) = 1$. Além disso, como $\overline{\alpha}_n = -S_{n+1}(0)$, segue que

$$\begin{aligned} S_n(w_n, z) = S_n(z) + w_n S_n^*(z) &= (z^n + \ldots + S_n(0)) + w_n(S_n(0)z^n + \ldots + 1) \\ &= (z^n + \ldots - \overline{\alpha}_{n-1}) + w_n(-\alpha_{n-1}z^n + \ldots + 1) \\ &= (1 - w_n\alpha_{n-1})z^n + \ldots + (w_n - \overline{\alpha}_{n-1}). \end{aligned}$$

Entretanto, como $|\alpha_{n-1}| < 1$, chegamos à conclusão que o polinômio $S_n(w_n, z)$ possui grau n e, também, $S_n(w_n, z) \neq 0$. Agora, por (23), obtemos

$$\begin{aligned} (c_n S_n(w_n, z))^* &= \overline{c}_n(S_n^*(z) + \overline{w}_n S_n(z)) \\ &= \overline{c}_n\overline{w}_n(S_n(z) + w_n S_n^*(z)) \\ &= \kappa_n c_n S_n(w_n, z). \end{aligned}$$

E, portanto, concluímos que $\{c_n S_n(w_n, z)\}_{n=0}^{\infty}$ é uma sequência $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariante.

Por fim, para provarmos a para-ortogonalidade basta fazermos o produto interno de $S_n(w_n, z)$ com z^k, $k = 0, 1, \ldots, n$, e usar as relações de ortogonalidade dos polinômios S_n e S_n^*. ■

Teorema 3. *Seja $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios de Szegő relativamente à medida $d\psi$. Dada uma sequência de polinômios para-ortogonais com relação a $d\psi$, $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$, então*

$$X_n(z) = c_n S_n(w_n, z), \quad z \in \mathbb{C}, \quad n \geq 0, \tag{25}$$

onde

$$c_n = \frac{\langle X_n, S_n\rangle}{\langle S_n, S_n\rangle} - d_n\frac{\langle S_n^*, S_n\rangle}{\langle S_n, S_n\rangle} \neq 0, \quad e\ w_n = \frac{d_n}{c_n}, \tag{26}$$

com

$$d_n = \frac{\langle X_n, 1\rangle}{\langle S_n^*, 1\rangle} \neq 0. \tag{27}$$

Além disso, se X_n é também κ_n-invariante, $n \geq 0$, então

$$|w_n| = 1, \quad \kappa_n = \frac{\overline{c}_n \overline{w}_n}{c_n} \;\; e \;\; |\kappa_n| = 1. \tag{28}$$

Demonstração: Tomemos o polinômio $T_n(z) = X_n(z) - c_n S_n(z) - d_n S_n^*(z)$, $n \geq 0$. Fazendo o produto interno de T_n por S_n obtemos, por meio das definições de c_n e d_n,

$$\begin{aligned}
\langle T_n, S_n \rangle &= \langle X_n - c_n S_n - d_n S_n^*, S_n \rangle \\
&= \langle X_n, S_n \rangle - c_n \langle S_n, S_n \rangle - d_n \langle S_n^*, S_n \rangle \\
&= \langle X_n, S_n \rangle - \langle X_n, S_n \rangle + d_n \langle S_n^*, S_n \rangle - d_n \langle S_n^*, S_n \rangle.
\end{aligned}$$

Assim, $\langle T_n, S_n \rangle = 0$. Através das relações de ortogonalidade dos polinômios de Szegő, segue que

$$\begin{aligned}
\langle T_n, S_0 \rangle &= \langle X_n - c_n S_n - d_n S_n^*, S_0 \rangle \\
&= \langle X_n, S_0 \rangle - c_n \langle S_n, S_0 \rangle - d_n \langle S_n^*, S_0 \rangle \\
&= \langle X_n, S_0 \rangle - \frac{\langle X_n, 1 \rangle}{\langle S_n^*, 1 \rangle} \langle S_n^*, S_0 \rangle.
\end{aligned}$$

Dessa forma, $\langle T_n, S_0 \rangle = 0$. Logo, concluímos que

$$\langle T_n, S_n \rangle = \langle T_n, S_0 \rangle = 0, \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{29}$$

Precisamos provar que $T_n \equiv 0$, $n \geq 0$. Para $n = 0$ é imediato. Mostraremos, então, para $n \geq 1$. Para tanto, expressemos T_n da seguinte forma

$$T_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(z), \quad a_k \in \mathbb{C}.$$

Substituindo a expressão acima no produto interno $\langle T_n, S_0 \rangle$, $n \geq 1$, obtemos por (29), $a_0 = a_n = 0$. Em particular, $T_1(z) = 0$.

Sabendo que X_n é um polinômio para-ortogonal, obtemos, para $n \geq 2$,

$$\langle T_n, z \rangle = 0 \Rightarrow \left\langle \sum_{k=0}^{n} a_k S_k(z), z \right\rangle = 0 \Rightarrow a_1 \langle S_1, z \rangle = 0 \Rightarrow a_1 = 0.$$

Procedendo desta maneira, concluímos que $a_1 = a_2 = \ldots = a_{n-1} = 0$, e, por conseguinte, $T_n(z) \equiv 0$, $n \geq 0$. Dessa maneira,

$$X_n(z) = c_n S_n(z) + d_n S_n^*(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{30}$$

Caso c_n seja nulo, da definição dos para-ortogonais e de (30), temos que $d_n\langle S_n^*, z^n\rangle = \langle X_n, z^n\rangle \neq 0$. Entretanto, isso contradiz a ortogonalidade de S_n^* e, assim, chegamos a um absurdo. Portanto, $c_n \neq 0$.

De maneira análoga, se d_n for igual a zero, então $c_n\langle S_n, 1\rangle = \langle X_n, 1\rangle \neq 0$. E, assim, chegamos a mais um absurdo contradizendo a ortogonalidade de S_n. Assim, $d_n \neq 0$.

Então, para $n \geq 0$,

$$X_n(z) = c_n\left(S_n(z) + \frac{d_n}{c_n}S_n^*\right), \quad z \in \mathbb{C}.$$

Dessa forma, denotando $\dfrac{d_n}{c_n} = w_n$, temos que

$$X_n(z) = c_n S_n(w_n, z).$$

Suponhamos que X_n é um polinômio κ_n-invariante, $n \geq 0$. Por (30) e $X_n^*(z) = \overline{c}_n S_n^*(z) + \overline{d}_n S_n(z)$, temos que

$$(\overline{d}_n - \kappa_n c_n)S_n(z) + (\overline{c}_n - \kappa_n d_n)S_n^*(z) = 0.$$

Logo, concluímos que $\kappa_n = \dfrac{\overline{d}_n}{c_n} = \dfrac{\overline{c}_n}{d_n}$, pelo fato dos polinômios $S_n(z)$ e $S_n^*(z)$ serem linearmente independentes. Em outras palavras, $|c_n| = |d_n|$. ■

Os polinômios para-ortogonais $S_n(w_n, z)$ podem ainda serem representados de uma outra forma. Para tanto, partiremos de

$$S_n(z) = zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z), \tag{31}$$

obtendo, dessa forma,

$$S_n^*(z) = S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z). \tag{32}$$

Substituindo as expressões (31) e (32) na definição dos polinômios $S_n(w_n, z)$, isto é, em (23), temos que

$$\begin{aligned} S_n(w_n, z) &= zS_{n-1}(z) - \overline{\alpha}_{n-1}S_{n-1}^*(z) + w_n\left[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)\right] \\ &= (1 - w_n\alpha_{n-1})zS_{n-1}(z) + (w_n - \overline{\alpha}_{n-1})S_{n-1}^*(z) \\ &= (1 - w_n\alpha_{n-1})\left[zS_{n-1}(z) + \frac{w_n - \overline{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n\alpha_{n-1}}\right]S_{n-1}^*(z). \end{aligned}$$

Sabendo que $|w_n| = 1$ e denotando $\tau_n = \dfrac{w_n - \overline{\alpha}_{n-1}}{1 - w_n\alpha_{n-1}}$, temos que

$$\tau_n = \frac{w_n(1-\overline{w}_n\overline{\alpha}_{n-1})}{1-w_n\alpha_{n-1}}.$$

Assim, concluímos que $|\tau_n| = 1$. Utilizando a nossa expressão de $S_n(w_n, z)$ na forma mônica obtemos, por fim, a expressão

$$S_n(\tau_n, z) = zS_{n-1}(z) + \tau_n S^*_{n-1}(z), \quad n = 0, 1, 2, \ldots. \tag{33}$$

Teorema 4. *Seja $\{X_n\}_{n=0}^{\infty}$ uma sequência de polinômios para-ortogonais $\{\kappa_n\}_{n=0}^{\infty}$-invariantes com relação à distribuição $d\psi$. Então, os n zeros do polinômio X_n, $n \geq 1$, são simples e estão todos contidos no círculo unitário $\mathcal{C} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$.*

Demonstração: Denotemos X_n, $n \geq 1$, da seguinte forma

$$X_n(z) = c_0 + c_1 z + \ldots + c_n z^n, \quad c_n \neq 0, \quad c_k \in \mathbb{C}, \quad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Assim,

$$X^*_n(z) = \overline{c}_0 z^n + \overline{c}_1 z^{n-1} + \ldots + \overline{c}_n. \tag{34}$$

De início, suponhamos que X_n é κ_n-invariante e, portanto,

$$X^*_n(z) = \kappa_n X_n(z), \quad \kappa_n \neq 0. \tag{35}$$

Pelas duas últimas expressões, (34) e (35), observamos que

$$c_0 = X_n(0) = \kappa_n^{-1} X^*_n(0) = \frac{\overline{c}_n}{\kappa_n} \neq 0. \tag{36}$$

Consideremos os zeros de mutiplicidade ímpar de X_n, contadas as suas multiplicidades, no círculo unitário $\mathcal{C}$, denotados por $x_1, x_2, \ldots, x_p$. Caso esses zeros não existam, então teremos $p = 0$. Caso existam, $1 \leq p \leq n$. Se provarmos que $p = n$ então o teorema é demonstrado.

Supondo que y é um zero de X_n que não está contido no círculo unitário, então $1/\overline{y}$ também é um zero de X_n que não está em $\mathcal{C}$, pois X_n é κ_n-invariante. Logo, esses zeros que não estão no círculo unitário acontecem aos pares $(y, 1/\overline{y})$.

Sabemos que dada uma raíz de X_n no círculo unitário, y, então $y = 1/\overline{y}$. Por conseguinte, há um número par de zeros de X_n em $\mathcal{C}$ que não pertencem ao conjunto $\{x_1, x_2, \ldots, x_p\}$. Assim, os zeros de X_n que ocorrem aos pares, podendo estar ou não contidos em $\mathcal{C}$, são denotados por

$$y_1, \frac{1}{\overline{y}_1}, y_2, \frac{1}{\overline{y}_2}, \ldots, y_q, \frac{1}{\overline{y}_q}.$$

Se esses zeros não existirem, então $q = 0$. Além disso, $n = p + 2q$, e, por (36), temos que $y_j \neq 0$ para $j = 1, 2, \ldots, q$.

Seja

$$P(z) = \begin{cases} (z-x_1)\dots(z-x_p), & \text{se } p \geq 1, \\ 1, & \text{se } p = 0, \end{cases}$$

$$Q(z) = \begin{cases} (z-y_1)\dots(z-y_q), & \text{se } q \geq 1, \\ 1, & \text{se } q = 0, \end{cases}$$

e $R(z) = z^q P(z)$.

De imediato, observamos que

$$X_n(z) = P(z)Q(z)\left(z - \frac{1}{\overline{y}_1}\right)\dots\left(z - \frac{1}{\overline{y}_q}\right).$$

Agora, suponhamos que $p < n$ e, dessa forma, $q \geq 1$. Logo,

$$\begin{aligned} \langle X_n, R\rangle &= \int_{\mathcal{C}} X_n(z)\overline{R(z)}d\psi(z) \\ &= \int_{\mathcal{C}} P(z)Q(z)\left(z - \frac{1}{\overline{y}_1}\right)\dots\left(z - \frac{1}{\overline{y}_q}\right)\overline{P(z)}\frac{1}{z^q}d\psi(z) \\ &= \frac{(-1)^q}{y_1\cdots y_q}\int_{\mathcal{C}} P(z)Q(z)\overline{P(z)Q(z)}d\psi(z) \\ &= \frac{(-1)^q}{y_1\cdots y_q}\langle PQ, PQ\rangle. \end{aligned}$$

Logo, $\langle X_n, R\rangle \neq 0$. Sabemos que grau de R é $p+q$ mas as condições de para-ortogonalidade implicam que seu grau seja igual a n. Assim, chegamos a um absurdo, pois tomamos $q \geq 1$, e portanto, $p+q$ é menor do que $p+2q = n$. Assim, devemos ter $q = 0$ e $p = n$. ■

4.2 Polinômios Para-Ortogonais Reais

Daremos início ao estudo das sequências de polinômios para-ortogonais definidas na reta real. Para tanto, trabalharemos com medidas simétricas $d\psi$ definidas em $\mathcal{C}$, isto é, distribuições que satisfazem $d\psi(1/z) = -d\psi(z)$, ou ainda, de modo equivalente, medidas $\psi(e^{i\theta})$ satisfazendo $d\psi(e^{i(2\pi-\theta)}) = -d\psi(e^{i\theta})$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

Para medidas simétricas, os momentos trigonométricos definidos em (8) são todos reais e, ainda, $\mu_n = \mu_{-n}$. Por conseguinte, os polinômios de Szegő associados a $d\psi$ também são reais.

Definiremos agora duas sequências especiais de polinômios para-ortogonais contruídas no final do século XX pelos matemáticos Delsarte e Genin. Para isso, consideraremos duas sequências iniciais de polinômios para-ortogonais que são obtidas a partir de (23) escolhendo $w_n = 1$ e $w_n = -1$, isto é,

$$\{S_n(1,z)\}_{n=0}^{\infty} \text{ e } \{S_n(-1,z)\}_{n=0}^{\infty}.$$

Consideremos os zeros de S_n como sendo $z_1, z_2, \ldots, z_n$, e observemos que

$$\begin{aligned} S_n(-1,z) &= S_n(z) - S_n^*(z) \\ S_n(-1,z) &= (z-z_1)(z-z_2)\ldots(z-z_n) - (1-zz_1)(1-zz_2)\ldots(1-zz_n). \end{aligned}$$

Por conta disso, $z = 1$ é raíz de $S_n(-1,z)$ e, dessa forma, o polinômio é divisível por $(z-1)$. Podemos, agora, definir as sequências de interesse, que são duas sequências de polinômios para-ortogonais mônicos, $\{R_n^{(1)}\}_{n=0}^{\infty}$ e $\{R_n^{(2)}\}_{n=0}^{\infty}$, dadas por

$$R_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(1,z)}{1+S_n(0)} = \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1+S_n(0)}, \quad n \geq 0, \tag{37}$$

e

$$R_n^{(2)}(z) = \frac{S_{n+1}(-1,z)}{(z-1)(1-S_{n+1}(0))} = \frac{S_{n+1}(z)+S_{n+1}^*(z)}{(z-1)(1-S_{n+1}(0))}, \quad n \geq 0. \tag{38}$$

Teorema 5. *A seguinte relação é válida*

$$2zS_{n-1}(z) = R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z), \quad n \geq 1. \tag{39}$$

Demonstração: Observe que

$$R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) = \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1+S_n(0)} + \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{(z-1)(1-S_n(0))}.$$

Como os coeficientes de reflexão são reais e $\alpha_{n-1} = -S_n(0)$, seque que

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(z) + (z-1)R_{n-1}^{(2)}(z) &= \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1-\alpha_{n-1}} + \frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{(z-1)(1+\alpha_{n-1})} \\ &= \frac{2}{1-\alpha_{n-1}^2}(S_n(z)+\alpha_{n-1}S_n^*(z)). \end{aligned}$$

Assim, o teorema segue imediatamente da relação de recorrência (20). ■

Teorema 6. *Os polinômios mônicos $R_n^{(1)}$ e $R_n^{(2)}$ satisfazem às relações de recorrência de três termos*

$$R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)}zR_{n-1}^{(i)}(z), \quad i = 1,2, \quad n \geq 1, \tag{40}$$

com as condições iniciais $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $R_1^{(i)}(z) = z+1$, e

$$d_{n+1}^{(1)} = \frac{1}{4}(1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1}) \text{ e } d_{n+1}^{(2)} = \frac{1}{4}(1+\alpha_{n-1})(1-\alpha_n).$$

Demonstração: Sejam $S_n^{(1)}(z)$ e $S_n^{(2)}(z)$ dados por

$$S_n^{(1)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 + S_n(0)} \quad \text{e} \quad S_n^{(2)}(z) = \frac{S_n(z) + S_n^*(z)}{1 - S_n(0)}. \tag{41}$$

Note que $R_n^{(1)}(z) = S_n^{(1)}(z)$ e $R_n^{(2)}(z) = \dfrac{S_{n+1}^{(2)}(z)}{z-1}$.

Para que o teorema seja demonstrado, basta provarmos que os polinômios $S_n^{(1)}(z)$ e $S_n^{(2)}(z)$, $n \geq 1$, satisfazem às relações

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1)S_n^{(1)}(z) - (1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(1)}(z), \\ S_{n+1}^{(2)}(z) &= (z+1)S_n^{(2)}(z) - (1+\alpha_{n-2})(1-\alpha_{n-1})zS_{n-1}^{(2)}(z), \end{aligned}$$

onde $\alpha_{-1} = -1$, $S_0^{(1)}(z) = S_0^{(2)}(z) = 1$, $S_1^{(1)}(z) = z+1$ e $S_1^{(2)}(z) = z-1$.

Por (19) e (21), obtemos

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{zS_n(z) - \alpha_n S_n^*(z) + S_n^*(z) - \alpha_n z S_n(z)}{1-\alpha_n}, \quad n \geq 0,$$

que se reduz a

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = zS_n(z) + S_n^*(z).$$

Mutiplicando e dividindo a expressão anterior por $(1-\alpha_{n-1})$ chegamos em

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = \frac{(z - \alpha_{n-1}z + 1 - 1)S_n(z)}{1-\alpha_{n-1}} + \frac{(1 - \alpha_{n-1} + z - z)S_n^*(z)}{1-\alpha_{n-1}}.$$

Colocando, agora, $(z+1)$ em evidência na equação acima e usando novamente as relações (19) e (21), ficamos com

$$\begin{aligned} S_{n+1}^{(1)}(z) &= (z+1)\left(\frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1-\alpha_{n-1}}\right) - \frac{(1+\alpha_{n+1}z)[zS_{n-1}(z) - \alpha_{n-1}S_{n-1}^*(z)]}{1-\alpha_{n-1}} \\ &\quad - \frac{(\alpha_{n-1}+z)[S_{n-1}^*(z) - \alpha_{n-1}zS_{n-1}(z)]}{1-\alpha_{n-1}}. \end{aligned}$$

Colocando $S_{n-1}(z) + S_{n-1}^*(z)$ em evidência, segue que

$$S_{n+1}^{(1)}(z) = (z+1)\left(\frac{S_n(z)+S_n^*(z)}{1-\alpha_{n-1}}\right) - (1-\alpha_{n-2})(1+\alpha_{n-1})z\left(\frac{S_{n-1}(z)+S_{n-1}^*(z)}{1-\alpha_{n-2}}\right).$$

Por fim, por meio da definição de $S_n^{(1)}(z)$ a primeira relação é demonstrada. As condições iniciais seguem imediatamente e, de modo análogo, a segunda relação é demonstrada. ■

Uma característica importante desses polinômios $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, reside no fato deles serem auto-inversíveis, ou seja, satisfazerem

$$z^n R_n^{(i)}(1/z) = R_n^{(i)}(z). \tag{42}$$

Teorema 7. *São válidas as seguintes relações de L-ortogonalidade*

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 0 \le s \le n-1, \tag{43}$$

e

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)(z-1) d\psi(z) = 0, \qquad 0 \le s \le n-1. \tag{44}$$

Demonstração: A demonstração da relação (44) segue imediatamente de (24) e da definição de $R_n^{(2)}(z)$.

Provemos, então, a relação (43). Para tanto, a partir de (24) obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z-1}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 1 \le s \le n-1. \tag{45}$$

Tomando o polinômio $P_{n,s}(z) = (z-1)z^{s-1}$, $s = 1, 2, \ldots, n-1$, ficamos com

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n} P_{n,s}(z) R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 1 \le s \le n-1. \tag{46}$$

Se tomarmos o polinômio $P_{n,n}(z) = z + z^{n+1}$, então a relação acima também será válida para $s = n$. Da relação (45), obtemos

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(1)}(z) \frac{1}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 1 \le s \le n-1. \tag{47}$$

Agora, fazendo $z = 1/z$ no lado direito da equação acima, pelo fato de $d\psi$ ser uma medida simétrica e os polinômios $R_n^{(\psi,1)}$ serem auto-inversíveis, segue que

$$\int_{\mathcal{C}} z^{-n}[z^s + z^{n-s}] R_n^{(1)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi(z) = 0, \qquad 1 \le s \le n-1. \tag{48}$$

Basta fazermos $s = 1$ em $z^s + z^{n-s}$ para obter o polinômio $P_{n,n}$. Assim, esses polinômios formam um conjunto linearmente independente, onde para cada monômio z^s, $s = 0, 1, \ldots, n-1$, há uma única combinação linear em que $z^s = d_1^{(s)} P_{n,1}(z) + d_2^{(s)} P_{n,2}(z) + \ldots + 1/2 P_{n,n}(z)$. Logo, de (46) a relação (43) é demonstrada. ■

4.3 Polinômios Ortogonais e Polinômios Para-Ortogonais Reais

Nesta seção, usaremos a transformação

$$x = x(z) = \frac{1}{2}\left(z^{1/2} + z^{-1/2}\right), \tag{49}$$

para relacionar os polinômios para-ortogonais $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, com os polinômios ortogonais dentro do intervalo de ortogonalidade $[-1,1]$.

É fácil observar que a relação (49) também pode ser escrita como $x = \cos(\theta/2)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$, pelo fato de $z = e^{i\theta}$.

Consideremos a partir de agora duas medidas simétricas no intervalo $[-1,1]$, $d\psi_1$ e $d\psi_2$ satisfazendo

$$d\psi_2(x) = (1-x^2)d\psi_1(x). \tag{50}$$

Denotaremos por $\{P_n^{\psi_k}(x)\}_{n=0}^{\infty}$, $k = 1,2$, a sequência de polinômios ortogonais com relação à medida $d\psi_k$. De posse de uma dessas sequências, é possível obter informações sobre a outra, como por meio da seguinte expressão provinda da fórmula de Christoffel (ver [9], pág. 29),

$$(1-x^2)P_n^{\psi_2}(x) = \frac{-1}{P_n^{\psi_1}(1)}\left\{P_n^{\psi_1}(1)P_{n+2}^{\psi_1}(x) - P_{n+2}^{\psi_1}(1)P_n^{\psi_1}(x)\right\}. \tag{51}$$

Além disso, é possível provar que, para cada $n \geq 2$,

$$P_n^{\psi_1}(x) = P_n^{\psi_2}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\psi_2}(x), \tag{52}$$

onde

$$d_{n-2} = \frac{\int_{-1}^{1} P_n^{\psi_1}(x)P_{n-2}^{\psi_2}(x)d\psi_2(x)}{\int_{-1}^{1}(P_{n-2}^{\psi_2}(x))^2 d\psi_2(x)} = -\frac{\int_{-1}^{1}(P_n^{\psi_1}(x))^2 d\psi_1(x)}{\int_{-1}^{1}(P_{n-2}^{\psi_2}(x))^2 d\psi_2(x)}. \tag{53}$$

Lema 1. *Para cada $n \geq 2$, são válidas as seguintes relações*

$$\frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+1}^{\psi_2}}{\alpha_n^{\psi_1}}, \tag{54}$$

e

$$d_{n-1} - d_{n-2} = \alpha_{n+1}^{\psi_2} - \alpha_{n+1}^{\psi_1}, \tag{55}$$

onde $d_0 = -\dfrac{\alpha_3^{\psi_1}\alpha_2^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_1^{\psi_2}} = \alpha_2^{\psi_2} - \alpha_2^{\psi_1}$.

Demonstração: Sabemos que

$$\int_{-1}^{1}(P_n^{\psi_k}(x))^2 d\psi_k(x) = \alpha_{n+1}^{\psi_k}\alpha_n^{\psi_k}\ldots\alpha_2^{\psi_k}\alpha_1^{\psi_k}.$$

Assim, segue que

$$d_{n-2} = -\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}\alpha_n^{\psi_1}\ldots\alpha_2^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_{n+1}^{\psi_2}\alpha_n^{\psi_2}\ldots\alpha_2^{\psi_2}\alpha_1^{\psi_2}} \quad \text{e} \quad \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}} = \frac{\alpha_{n+2}^{\psi_1}}{\alpha_n^{\psi_2}}.$$

A primeira expressão para d_0 segue imediatamente da expressão anterior para $n = 2$.

Da relação de recorrência de $P_n^{\psi_2}(x)$, temos que

$$P_{n-2}^{\psi_2}(x) = \frac{xP_{n-1}^{\psi_2}(x) - P_n^{\psi_2}(x)}{\alpha_n^{\psi_2}}.$$

Agora, por (52), obtemos

$$P_{n-2}^{\psi_2}(x) = \frac{P_n^{\psi_1}(x) - P_n^{\psi_2}(x)}{d_{n-2}}.$$

Igualando as duas últimas expressões, chegamos em

$$\begin{aligned} (xP_{n-1}^{\psi_2}(x) - P_n^{\psi_2}(x))d_{n-2} &= (P_n^{\psi_1}(x) - P_n^{\psi_2}(x))\alpha_n^{\psi_2} \Rightarrow \\ P_n^{\psi_1}(x) &= P_n^{\psi_2}(x) - \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\psi_2}}P_n^{\psi_2}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\psi_2}}xP_{n-1}^{\psi_2}(x). \end{aligned}$$

E, dessa forma,

$$P_n^{\psi_1}(x) = \left(1 - \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\psi_2}}\right)P_n^{\psi_2}(x) + \frac{d_{n-2}}{\alpha_n^{\psi_2}}xP_{n-1}^{\psi_2}(x), \quad n \geq 2.$$

Prosseguindo, agora mais uma vez de (52) e da relação de recorrência de $P_n^{\psi_1}(x)$, obtemos

$$\begin{aligned} P_{n+1}^{\psi_1}(x) &= xP_n^{\psi_1}(x) - \alpha_{n+1}^{\psi_1}P_{n-1}^{\psi_1}(x) \\ &= x(P_n^{\psi_2}(x) + d_{n-2}P_{n-2}^{\psi_2}(x)) - \alpha_{n+1}^{\psi_1}\left[\left(1 - \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}\right)P_{n-1}^{\psi_2}(x) + \frac{d_{n-3}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}xP_{n-2}^{\psi_2}(x)\right] \\ &= xP_n^{\psi_2}(x) - \left(\alpha_{n+1}^{\psi_1} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}\right)P_{n-1}^{\psi_2}(x) + x\left(d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}\right)P_{n-2}^{\psi_2}(x), \end{aligned}$$

ou, ainda,

$$P_{n+1}^{\psi_2}(x) + d_{n-1}P_{n-1}^{\psi_2}(x) = xP_n^{\psi_2}(x) - \left(\alpha_{n+1}^{\psi_1} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}\right)P_{n-1}^{\psi_2}(x) + \left(d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}\right)P_{n-2}^{\psi_2}(x)$$

que, isolando $P_{n+1}^{\psi_2}(x)$,

$$P_{n+1}^{\psi_2}(x) = xP_n^{\psi_2}(x) - \left(\alpha_{n+1}^{\psi_1} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}} + d_{n-1}\right)P_{n-1}^{\psi_2}(x) + \left(d_{n-2} - d_{n-3}\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{\alpha_{n-1}^{\psi_2}}\right)P_{n-2}^{\psi_2}(x).$$

Assim, por (54), segue que

$$P_{n+1}^{\psi_2}(x) = xP_n^{\psi_2}(x) - \left(\alpha_{n+1}^{\psi_1} - d_{n-2} + d_{n-1}\right)P_{n-1}^{\psi_2}(x).$$

Dessa forma,

$$\alpha_{n+1}^{\psi_2} = \alpha_{n+1}^{\psi_1} - d_{n-2} + d_{n-1} \Rightarrow \alpha_{n+1}^{\psi_2} - \alpha_{n+1}^{\psi_1} = d_{n-1} - d_{n-2},$$

que, portanto, demonstra (55) para $n \geq 3$.

Novamente de (52) para $n = 2$, obtemos

$$P_2^{\psi_1}(x) = P_2^{\psi_2}(x) + d_0 P_0^{\psi_2}(x) \Rightarrow P_2^{\psi_1}(x) = P_2^{\psi_2}(x) - d_0 \Rightarrow x^2 - \alpha_2^{\psi_1} = x^2 - \alpha_2^{\psi_2} + d_0.$$

Logo,

$$d_0 = \alpha_2^{\psi_2} - \alpha_2^{\psi_1},$$

que equivale à segunda expressão.

Por fim, verificaremos que (55) vale para $n = 2$. Seguindo da maneira como feito anteriormente, temos que

$$P_3^{\psi_2}(x) = xP_2^{\psi_2}(x) - \left(\alpha_3^{\psi_1} - d_0 + d_1\right) P_0^{\psi_2}(x).$$

Portanto, $\alpha_3^{\psi_2} - \alpha_3^{\psi_1} = d_1 - d_0$. ■

Agora, consideremos uma sequência de números reais $\{l_n\}$ tal que

$$(l_{n+1} - 1) = \frac{\alpha_{n+2}^{\psi_1}}{\alpha_n^{\psi_2}}(l_{n-1} - 1), \quad n \geq 2, \tag{56}$$

com $l_0 = 1$, $(l_1 - 1) = -2\alpha_2^{\psi_1}$, e $(l_2 - 1) = \dfrac{-\alpha_3^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_1^{\psi_2}}$.

De posse da sequência $\{l_n\}$, as seguintes relações são válidas

$$\frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \quad n \geq 2, \tag{57}$$

e

$$(l_{n+1} - 1)(l_n - 1) = -4d_{n-1}, \quad n \geq 1. \tag{58}$$

De fato,

$$\frac{(l_{n+1} - 1)}{(l_{n-1} - 1)} = \frac{\alpha_{n+2}^{\psi_1}}{\alpha_n^{\psi_2}} = \frac{d_{n-1}}{d_{n-2}}, \quad n \geq 2.$$

que corresponde à relação (57).

A segunda expressão é facilmente demonstrada por meio de indução matemática. Para tanto, consideremos incialmente $n = 1$ e chegamos em

$$(l_2 - 1)(l_1 - 1) = \left(\frac{-2\alpha_3^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_1^{\psi_2}}\right)\left(-2\alpha_2^{\psi_1}\right) = 4\frac{\alpha_3^{\psi_1}\alpha_2^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_1^{\psi_2}} = -4d_0.$$

Suponhamos, agora, que vale para $n = k$, isto é, $(l_{k+1} - 1)(l_k - 1) = -4d_{k-1}$.

Então, para $n = k+1$,

$$(l_{k+2}-1)(l_{k+1}-1) = \frac{\alpha_{k+3}^{\psi_1}}{\alpha_{k+1}^{\psi_2}}(l_k-1)(l_{k+1}-1) = -4\frac{\alpha_{k+3}^{\psi_1}}{\alpha_{k+1}^{\psi_2}}d_{k-1} = -4\left(\frac{\alpha_{k+3}^{\psi_1}\alpha_{k+2}^{\psi_1}\dots\alpha_2^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_{k+1}^{\psi_2}\alpha_k^{\psi_2}\dots\alpha_2^{\psi_2}\alpha_1^{\psi_2}}\right).$$

Portanto, $(l_{k+2}-1)(l_{k+1}-1) = -4d_k$.

Lema 2. *Os elementos da sequência* $\{l_n\}$ *satisfazem*

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}\alpha_{2n}^{\psi_1}\dots\alpha_2^{\psi_1}}{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\dots\alpha_2^{\psi_2}}, \qquad \frac{(l_{2n}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{\psi_1}\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\alpha_{2n-3}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}} \tag{59}$$

e

$$\frac{(l_{2n-1}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\alpha_{2n-3}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{2n+1}^{\psi_1}\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}}, \qquad \frac{(l_{2n}+1)}{2} = \frac{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\dots\alpha_2^{\psi_2}}{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}\alpha_{2n}^{\psi_1}\dots\alpha_2^{\psi_1}}. \tag{60}$$

Demonstração: Inicialmente, usaremos (56) trocando n por $2n$. Assim,

$$\begin{aligned}\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} &= \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}}{\alpha_{2n}^{\psi_2}}(l_{2n-1}-1) = \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}\alpha_{2n}^{\psi_1}}{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-2}^{\psi_2}}(l_{2n-3}-1) = \dots \\ &= \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}\alpha_{2n}^{\psi_1}\dots\alpha_6^{\psi_1}\alpha_4^{\psi_1}}{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-2}^{\psi_2}\dots\alpha_4^{\psi_2}\alpha_2^{\psi_2}}(l_1-1) = \frac{1}{2}\frac{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}\alpha_{2n}^{\psi_1}\dots\alpha_6^{\psi_1}\alpha_4^{\psi_1}\alpha_2^{\psi_1}}{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-2}^{\psi_2}\dots\alpha_4^{\psi_2}\alpha_2^{\psi_2}}(-2).\end{aligned} \tag{61}$$

Dessa forma,

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+2}^{\psi_1}\alpha_{2n}^{\psi_1}\dots\alpha_4^{\psi_1}\alpha_2^{\psi_1}}{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-2}^{\psi_2}\dots\alpha_4^{\psi_2}\alpha_2^{\psi_2}}.$$

Seguindo de maneira análoga, trocando n por $2n-1$, chegamos em

$$\frac{(l_{2n}-1)}{2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{\psi_1}\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_3^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}{\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\alpha_{2n-3}^{\psi_2}\dots\alpha_3^{\psi_2}\alpha_1^{\psi_2}}.$$

Por (58) e (55),

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2}\frac{(l_{2n}-1)}{2} = -d_{2n-1},$$

e, assim,

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2} = -\frac{d_{2n-1}}{(l_{2n}-1)/2} = -\frac{\alpha_{2n+1}^{\psi_2}-\alpha_{2n+1}^{\psi_1}+d_{2n-2}}{(l_{2n}-1)/2}, \quad n \geq 1.$$

Da segunda relação em (59), obtemos

$$\frac{(l_{2n+1}-1)}{2}=\frac{\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\alpha_{2n-3}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{2n+1}^{\psi_1}\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}}+\frac{(d_{2n-2}-\alpha_{2n+1}^{\psi_1})\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\dots\alpha_3^{\psi_2}\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{2n+1}^{\psi_1}\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_3^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}},\quad n\geq 1.$$

Por fim,

$$\frac{l_{2n+1}}{2}-\frac{1}{2}+1=\frac{\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\alpha_{2n-3}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{2n+1}^{\psi_1}\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}},$$

e chegamos na primeira expressão em (60).

A demonstração da segunda expressão é feita de modo análogo. ■

Lema 3. *Se $d\psi_1$ e $d\psi_2$ satisfazem (50), então existe uma sequência de números reais $\{l_n\}$ tal que, para cada $n\geq 1$,*

$$\alpha_{n+1}^{\psi_1}=-\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n-1}+1),\qquad \alpha_{n+1}^{\psi_2}=-\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n+1}+1)\tag{62}$$

e

$$d_{n-1}=-\frac{1}{4}(l_n-1)(l_{n+1}-1)\tag{63}$$

onde $l_0=1$ e $l_1=1-2\alpha_2^{\psi_2}$.

Demonstração: Por (59) e (60),

$$(l_n-1)=-2\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_2}\alpha_{n-1}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{n-1}^{\psi_1}\alpha_{n-3}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}},$$

$$(l_{n-1}+1)=2\frac{\alpha_{n-1}^{\psi_2}\alpha_{n-3}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{n-1}^{\psi_1}\alpha_{n-3}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}}\quad\text{e}\quad(l_{n+1}+1)=2\frac{\alpha_{n+1}^{\psi_2}\alpha_{n-1}^{\psi_2}\dots\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{n+1}^{\psi_1}\alpha_{n-1}^{\psi_1}\dots\alpha_1^{\psi_1}}.$$

Dessa maneira, para cada $n\geq 1$,

$$(l_n-1)(l_{n-1}+1)=-4\alpha_{n+1}^{\psi_1},$$

e

$$(l_n-1)(l_{n+1}+1)=-4\alpha_{n+1}^{\psi_2}.$$

Agora, de (58), segue que

$$d_{n-1}=-\frac{1}{4}(l_{n+1}-1)(l_n-1),\quad n\geq 1.$$

Da definição da sequência obtemos, por fim, $l_0 = 1$ e $l_1 = 1 - 2\alpha_2^{\psi_2}$. ■

A seguir, apresentamos algumas relações existentes entre os polinômios de Szegő S_n ortogonais com relação a uma determinada medida simétrica e os polinômios para-ortogonais $R_n^{(i)}$, $i = 1, 2$, com polinômios ortogonais no intervalo $[-1, 1]$ obtidos através da transformação (49).

Teorema 8. *(i) Seja ϕ uma medida positiva no círculo unitário tal que os polinômios de Szegő S_n, $n \geq 0$, são reais. Sejam*

$$4\alpha_{n+1}^{\psi_1} = (1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) > 0 \quad e \quad 4\alpha_{n+1}^{\psi_2} = (1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n), \quad n \geq 1,$$

e as medidas positivas $d\psi_1$ e $d\psi_2$ definidas por

$$d\psi_1(x(z)) = -d\phi(z) \quad e \quad d\psi_2(x(z)) = -(1 - x^2)d\phi(z),$$

com $x(z) = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2})$, cujos suportes estão contidos em $[-1, 1]$. Então, para $i = 1, 2$, as sequências de polinômios $\{P_n^{\psi_i}\}_{n=0}^{\infty}$, definidas por

$$P_n^{\psi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z), \quad n \geq 0, \tag{64}$$

são sequências de polinômios ortogonais mônicos com relação à medida $d\psi_i$ e satisfazem às relações de recorrência

$$P_{n+1}^{\psi_i}(x) = x P_n^{\psi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\psi_i} P_{n-1}^{\psi_i}(x), \quad n \geq 1, \tag{65}$$

com as condições inciais $P_0^{\psi_i}(x) = 1$ e $P_1^{\psi_i}(x) = x$.

(ii) Reciprocamente, sejam $d\psi_1$ e $d\psi_2$ duas medidas positivas definidas em $[-1, 1]$ satisfazendo (50) e suponhamos que os respectivos polinômios ortogonais mônicos $P_n^{\psi_1}$ e $P_n^{\psi_2}$ satisfaçam a recorrência (65). Então, os coeficientes de reflexão α_n dos polinômios de Szegő, S_n, associados à medida positiva $d\phi(z) = -d\psi_1(x(z))$, satisfazem

$$\alpha_{n-1} = -1 + \frac{4\alpha_{n+1}^{\psi_1}}{1 - \alpha_{n-2}} \quad e \quad \alpha_n = 1 - \frac{4\alpha_{n+1}^{\psi_2}}{1 + \alpha_{n-1}}, \quad n \geq 1, \tag{66}$$

com $\alpha_{-1} = 1$. Explicitamente, podem ser dados por

$$\alpha_{2n-2} = 1 - 2\frac{\alpha_{2n-1}^{\psi_2}\alpha_{2n-3}^{\psi_2}\cdots\alpha_3^{\psi_2}\alpha_1^{\psi_2}}{\alpha_{2n-1}^{\psi_1}\alpha_{2n-3}^{\psi_1}\cdots\alpha_3^{\psi_1}\alpha_1^{\psi_1}}, \quad e \quad \alpha_{2n-1} = 1 - 2\frac{\alpha_{2n}^{\psi_2}\alpha_{2n-2}^{\psi_2}\cdots\alpha_2^{\psi_2}}{\alpha_{2n}^{\psi_1}\alpha_{2n-2}^{\psi_1}\cdots\alpha_2^{\psi_1}}, \quad n \geq 1, \tag{67}$$

com

$$R_n^{(i)}(z) = (4z)^{n/2} P_n^{\psi_i}(x(z)), \quad i = 1, 2. \tag{68}$$

Demonstração: Manipulando a relação de recorrência dos polinômios mônicos $R_n^{(i)}(z)$, $i = 1, 2$, de forma a multiplicar ambos os lados da expressão (40) por $(4z)^{-(n+1)/2}$, obtemos

$$(4z)^{-(n+1)/2} R_{n+1}^{(i)}(z) = (z+1)(4z)^{-(n+1)/2} R_n^{(i)}(z) - 4d_{n+1}^{(i)} z (4z)^{-(n+1)/2} R_{n-1}^{(i)}(z),$$

com $R_0^{(i)}(z) = 1$ e $(4z)^{-1/2} R_1^{(i)}(z) = (4z)^{-1/2}(z+1)$.

Da transformação (49), segue que

$$(4z)^{-1/2}(z+1) = (1/2)(z^{1/2} + z^{-1/2}) = x(z) = x.$$

Além disso, sabemos que $(4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z) = P_n^{\psi_i}(x)$, e, portanto,

$$P_{n+1}^{\psi_i}(x) = x P_n^{\psi_i}(x) - \alpha_{n+1}^{\psi_i} P_{n-1}^{\psi_i}(x),$$

com $P_0^{\psi_i}(x) = 1$ e $P_1^{\psi_i}(x) = x$.

Por conseguinte, a relação de recorrência de três termos (65) é satisfeita pelos polinômios $P_n^{\psi_i}(x) = (4z)^{-n/2} R_n^{(i)}(z)$.

Consideremos, agora, as sequências

$$\{g_n^{\psi_1} = (1 + \alpha_{n-1})/2\} \quad \text{e} \quad \{g_n^{\psi_2} = (1 - \alpha_n)/2\},$$

e observemos que

$$(1 - g_{n-1}^{\psi_1}) g_n^{\psi_1} = \frac{1}{4}(1 - \alpha_{n-2})(1 + \alpha_{n-1}) = \alpha_{n+1}^{\psi_1},$$

e

$$(1 - g_{n-1}^{\psi_2}) g_n^{\psi_2} = \frac{1}{4}(1 + \alpha_{n-1})(1 - \alpha_n) = \alpha_{n+1}^{\psi_2}.$$

Dessa forma, concluímos que $\{\alpha_{n+1}^{\psi_1}\}$ e $\{\alpha_{n+1}^{\psi_2}\}$ são sequências encadeadas associadas às sequências de parâmetros $\{g_n^{\psi_1}\}$ e $\{g_n^{\psi_1}\}$, respectivamente. Portanto, os zeros dos polinômios $P_n^{\psi_i}(x)$, $i = 1, 2$, estão todos contidos no intervalo $(-1, 1)$ e, pelo Teorema de Favard (ver [4], pág. 21), $P_n^{\psi_i}(x)$, $i = 1, 2$, constituem uma sequência de polinômios ortogonais.

Tomando $d\psi_1(x) = -d\phi(z)$, e observando que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z)(z-1) d\phi(z) &= \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) \frac{z}{z-1} \frac{z-1}{z} d\phi(z) \\
&= \int_{\mathcal{C}} z^{-n+s} R_n^{(2)}(z) \frac{z}{z-1} d\psi_2(z),
\end{aligned}$$

onde

$$d\psi_2(z) = \frac{(z-1)^2}{z} d\phi(z) = -(1-x^2) d\phi(z),$$

obtemos as medidas $d\psi_1$ e $d\psi_2$.

Agora, para obtermos a segunda parte do item (ii) do teorema, basta usarmos as equações (60) fazendo $l_{2n-1} = -\alpha_{2n-2}$ e $l_{2n} = -\alpha_{2n-1}$.

Por fim, a primeira parte do item (ii) é obtida por meio de (62) com $l_n = -\alpha_{n-1}$.

■

Referências

[1] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F. *Polinômios Ortogonais e Similares, Propriedades e Aplicações.* Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, São José do Rio Preto, 2008.

[2] ANDRADE, E. X. L.; BRACCIALI, C. F., RANGA, A. Sri. *Polinômios que Satisfazem uma Relação de Recorrência de Três Termos*. São Carlos: SBMAC, 2014. (Notas em Matemática Aplicada, v.74)

[3] BRACCIALI, C. F.; LI, X.; RANGA, A. Sri. Real Orthogonal Polynomials in Frequency Analysis. *Mathematics of Computation.*, 74, p. 341-362, 2005.

[4] CHIHARA, T.S. *An Introduction to Orthogonal Polynomials.* Mathematics and its Applications Series, Gordon and Breach, New York, 1978.

[5] DELSARTE, P.; GENIN, Y. V. The Split Levinson Algorithm. *IEEE Transactions on Acoustics Speech and Signal Processing*, 34, p. 470-478, 1986.

[6] JONES, W. B.; NJÅSTAD, O.; THRON, W. J. Moment Theory, Orthogonal Polynomials, Quadrature, and Continued Fractions Associated with the Unit Circle. *Bulletin of the London Mathematical Society* 21, p. 113-152, 1989.

[7] MARTINS, F.A. *Polinômios Para-Ortogonais e Análise de Frequência.* Dissertação de Mestrado, Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho - UNESP, São José do Rio Preto, 2005.

[8] SIMON, B. *Orthogonal Polynomials on the Unit Circle*. Pat 1. American Mathematical Society Colloquium Publications, v. 54, part 1, Providence, RI, 2004.

[9] SZEGŐ, G. *Orthogonal Polynomials.* American Mathematical Society Colloquium Publications, New York, 23, 1939.