

MODELAGEM, SIMULAÇÃO E CONTROLE DE UMA AERONAVE MULTIRROTORA

Felipe Machini M. Marques¹

Leonardo Sanches²

RESUMO

Neste trabalho é apresentado uma modelagem dinâmica de uma aeronave multirrotoira genérica com seis graus de liberdade a partir dos princípios da Mecânica Clássica. O modelo é avaliado a através de simulações computacionais feitas na plataforma MATLAB/SIMULINK® de forma que seu comportamento seja condizente com o de uma aeronave real. A partir do modelo dinâmico, as equações do movimento são linearizadas e escritas na forma de espaço de estados para que as técnicas de controle linear possam ser aplicadas. Neste caso, as técnicas de controle MIMO tornam-se mais viáveis uma vez que o sistema possui múltiplos estados acoplados entre si e vários sinais de controle. Os controladores do tipo LQR e LQT foram projetados e aplicados enquanto que seus desempenhos foram avaliados levando em consideração a resposta do sistema para diferentes entradas e parâmetros de controle. Por fim, foi testado um algoritmo que gera sinais de entrada para a aeronave de acordo com uma trajetória pré-definida, de tal forma que este conceito pode tornar a aeronave autônoma e ser empregado em diferentes missões para diferentes aeronaves da mesma categoria.

Palavras-chave: VANTs, controle moderno, multirrotores, modelagem dinâmica.

¹ - Bacharel em engenharia aeronáutica pela Universidade Federal de Uberlândia. Realiza pesquisa na área de dinâmica do voo e controle de aeronaves não tripuladas.

² Professor Dr da Faculdade de Engenharia Mecânica da Universidade Federal de Uberlândia. Área de pesquisa em dinâmica de sistema não lineares e mecânica do voo e controle de aeronaves

ABSTRACT

In this work, a dynamic model of a six degree of freedom generic multi-rotor system is developed using the classical mechanical principles. The model is verified using computational simulations developed on MATLAB/SIMULINK[®] such that its behavior follows a real aircraft motion. From the dynamic model, the equations of motion are linearized and written on the state-space format, so the linear control techniques can be applied. In this case, the MIMO control technique is indicated to be more feasible since the system has multiple states attached to each other and multiple control input signals. Thus, LQR and LQT controllers were developed and tested considering the system response for different inputs and control parameters. Finally, an algorithm, which generates input signals for the aircraft for a given pre-established trajectory, was experimented. With this concept, the aircraft might operate autonomously and it could be used on different missions for different aircrafts on the same category.

Keywords: UAVs, modern control, multi-rotor, dynamical modeling.

1. INTRODUÇÃO

Os multirrotores fazem parte de uma categoria de aeronaves similares ao tradicional helicóptero porém com mais de dois rotores. As configurações mais comuns, levando em conta o número de motores, são: os tricópteros (3 rotores), quadrópteros (4 rotores), hexacópteros (6 rotores) e os octópteros (8 rotores). O acréscimo de rotores proporciona à aeronave maior tração maior empuxo e, conseqüentemente maior capacidade de carga. Por outro lado, a construção da aeronave se torna mais cara e complexa devido à quantidade de equipamentos a serem instalados.

Talvez, o maior atrativo destas aeronaves seja a sua simplicidade de controle, que consiste apenas em ajustar a velocidade de rotação de cada motor de forma independente, permitindo o controle de suas condições de operação (altitude, atitude e velocidade). Esta característica peculiar torna a caracterização dinâmica mais simples o que facilita a implementação de voos autônomos e rádio controlados, colocando os multirrotores na categoria dos VANTs (Veículos Aéreos Não Tripulados). Atualmente, as principais áreas de aplicação dos VANTs são: fotografias aéreas, vigilância, sensoriamento remoto, agricultura e o mercado aposta que a sua aplicabilidade ainda tende a crescer ainda mais.

Este projeto trata de uma aeronave do tipo hexacóptero a qual consegue manter um voo pairado estável equilibrado pelas forças e momentos produzidos pelos seis rotores (Castillo et. al, 2005). Porém, as estratégias de obtenção das equações dinâmicas e técnicas de controle podem ser aplicadas a outras configurações desta categoria de aeronave.

Diversas estratégias de modelagem e controle foram testadas em aeronaves multirrotores, porém a maioria delas utiliza técnicas clássicas *SISO* (controles *PID*), obtendo as equações dinâmicas linearizadas a partir de técnicas de identificação de sistema ou aplicam controle moderno não-linear levando em conta as equações dinâmicas não-lineares (Bouabdallah, 2007).

Segundo Bresciani (2008), as equações do movimento de um quadricóptero podem ser escritas considerando um sistema referencial híbrido, onde os torques são escritos no sistema do corpo e as forças no sistema referencial inercial. Esta abordagem facilita o controle de posição da aeronave uma vez que a velocidade da aeronave no sistema referencial inercial passa a ser uma variável de estado. Ainda, as equações dinâmicas foram linearizadas em torno de um ponto de tal forma que todas as condições de trimagem são nulas, e em seguida foram aplicadas as leis de controle clássico utilizando as funções de transferência de cada estado em relação a cada um dos rotores. O controle de altitude e atitude foram feitos em malhas separadas considerando efeitos aerodinâmicos e giroscópios.

Em algumas publicações, diferentes técnicas de controle foram comparadas a fim de estabelecer um controle ótimo para aeronave. Bouabdallah et al. (2004) comparou controladores do tipo PID e LQ, quando aplicados em uma bancada de teste com quatro rotores e limitada a três graus de liberdade, com intuito de estabilizar a aeronave em um voo pairado. Já Raffo et al. (2008) compara resultados simulados e experimentais utilizando controladores PID e LQR para estabilizar e direcionar uma aeronave do tipo quadricóptero.

Tentativas de criar um controlador que seja capaz de direcionar uma aeronave a partir de uma trajetória pré-estabelecida também tornou-se um atrativo para as aplicações dos VANTs. Em Rich (2012), foi proposto um controlador não-linear do tipo H_∞ a fim de estabilizar os movimentos de rotação da aeronave, enquanto que uma lei de controle baseada em *Backstepping* é usada de forma que o controlador minimiza o erro entre a trajetória desejada e a posição da trajetória a cada instante de tempo.

Este trabalho faz parte de um projeto em desenvolvimento pelo Laboratório de Ensino em Engenharia Aeronáutica da Universidade Federal de Uberlândia que tem como objetivo

desenvolver uma aeronave autônoma para uso comercial. Sendo assim, ele está dividido da seguinte forma: a seção 2 contém a modelagem dinâmica de um hexacóptero. Na seção 3 é projetado um controlador LQT o qual foi testado a partir de simulações que estão apresentadas na seção 4. Por fim, as conclusões do trabalho estão contidas na seção 5.

2. MODELAGEM DINÂMICA

O movimento de aeronaves multirrotores é resultante da variação da velocidade dos rotores e seu modelo dinâmico pode ser obtido aplicando as leis de Newton-Euler assumindo-a como um corpo rígido com 6 graus de liberdade (Artale, 2013). Porém, neste tipo de aeronave, os efeitos giroscópios resultantes da rotação do corpo rígido e das hélices deve ser levado em conta devido ao seu pequeno peso. Sendo assim, o modelo consiste em um sistema com seis graus de liberdade (velocidades lineares e angulares e posições angulares e lineares) e os número de sinais de entrada de controle coincide com a quantidade de rotores presentes na aeronave (velocidade de rotação dos rotores).

Equações do Movimento

As equações do movimento da aeronave são escritas em relação a um sistema referencial do corpo (BCS), fixo à aeronave, coincidente com o centro de gravidade da aeronave (CG) indicado por O_{xyz} . Por outro lado, o sistema referencial inercial ICS, fixo à superfície terrestre, é indicado por O_{xyz} (Fig. 1). Ainda, as componentes da velocidade linear do CG da aeronave em relação às direções X , Y e Z do ICS são definidas por $\vec{v} = [V_x \ V_y \ V_z]^T$ em m/s e as velocidades angulares (P , Q e R) em torno dos eixos x , y e z em relação ao ICS, escritas no referencial BCS em rad/s , são definidas por $\vec{\omega} = [P \ Q \ R]^T$. Aplicando as equações de Newton-Euler para conservação do movimento linear e angular chega-se às equações do movimento da aeronave como propôs Valavanis (2007).

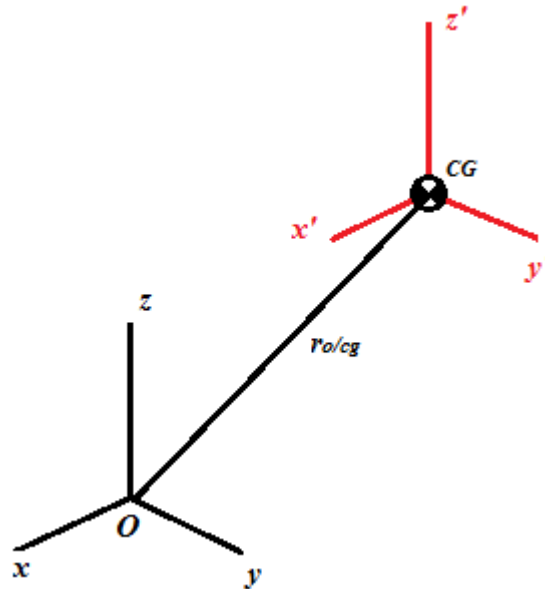


Figura 1: Referenciais inercial ICS (O_{xyz}) e BCS ($O_{x'y'z'}$).

As forças que atuam na aeronave podem ser divididas em forças de tração, arrasto e gravitacionais. Levando em conta que a aeronave utiliza um motor elétrico do tipo DC como conjunto propulsivo, tem-se que a força de tração gerada pela hélice será proporcional ao quadrado da velocidade de rotação da hélice (Fogelberg, 2013). O arrasto que atua na estrutura da aeronave devido à viscosidade do fluido pode ser simplificado de tal forma que seja proporcional à velocidade linear da aeronave (Asselin, 1965). Por fim, a força gravitacional sempre estará atuando sobre a aeronave na direção z do ICS.

Os momentos atuantes na aeronave podem ser decompostos em três direções que determinam os movimentos de: guinada, arfagem e rolagem. Estes três movimentos dependem da combinação de torque de cada rotor. A Figura (1) ilustra a disposição dos rotores na aeronave assim como indica o sentido de rotação do conjunto motor/hélice.

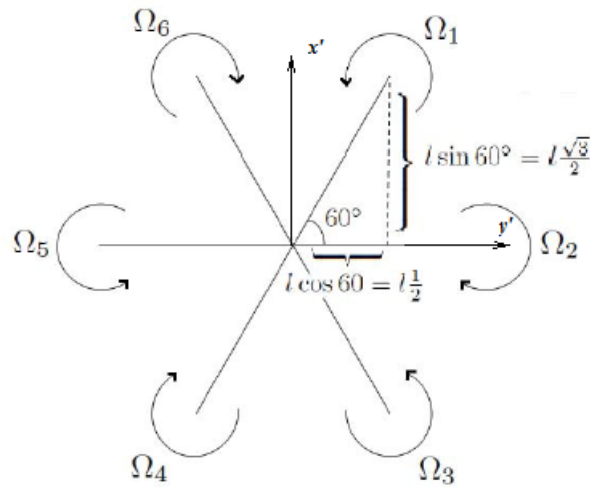


Figura 2: Disposição dos rotores em relação ao CG da aeronave.

O torque de guinada consiste na soma dos torques gerados pelos grupos motopropulsores aplicados na estrutura em relação ao eixo z do BCS. Estes torques são decorrentes da resistência aerodinâmica (força de arrasto) que a hélice produz ao girar em torno do seu eixo de rotação. Ainda deve ser levado em conta um torque inercial produzido devido à variação da quantidade de movimento angular das hélices (Fogelberg, 2013).

Um momento de rolagem positivo é obtido reduzindo os valores de Ω_1 , Ω_2 , Ω_3 e aumentando os valores de Ω_4 , Ω_5 , Ω_6 . Este torque leva em consideração a distância l , dada em metros (m), de cada motor até o eixo x' conforme ilustrado na Fig. 2. Por fim, o momento de arfagem positivo pode ser produzido diminuindo Ω_1 , Ω_6 e aumentando Ω_3 , Ω_4 . O braço de momento de cada rotor é representado pela distância deste ao eixo y' (Fogelberg, 2013).

Ainda será considerado o efeito giroscópio proveniente da alteração da direção da quantidade de movimento angular das hélices gera um torque em torno do CG da aeronave, assumindo que as hélices, idealmente, tenham o mesmo momento de inércia de massa (I_M), caso contrário haveria um desequilíbrio do efeito giroscópio das hélices e um momento resultante em torno dos três eixos do BCS (Roskam, 2001).

Levando em conta as equações deduzidas anteriormente de força e momento externos aplicados na aeronave durante um voo, pode-se agrupá-las de forma a escrever as equações finais de movimento a partir da segunda lei de Newton-Euler nas três direções do BCS:

$$m \begin{bmatrix} \dot{u} - Rv + Qw \\ \dot{v} - Pw + Ru \\ \dot{w} - Qu + Pv \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k_{dx}u + mg \sin \theta \\ -k_{dy}v - mg \sin \phi \cos \theta \\ k \sum \Omega_i^2 - k_{dz}w - mg \cos \phi \cos \theta \end{bmatrix}$$

MERGEFORMAT

$$\begin{bmatrix} I_{xx} \ddot{P} + QR(I_{zz} - I_{yy}) - I_{xz}(R + PQ) \\ I_{yy} \ddot{Q} + PR(I_{xx} - I_{zz}) + I_{xz}(P^2 + Q^2) \\ I_{zz} \ddot{R} + PQ(I_{yy} - I_{xx}) + I_{xz}(QR + P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_{arfagem} + QI_r \Omega_R \\ \Omega_{rolagem} - PI_r \\ \tau_{guinada} \end{bmatrix}$$

MERGEFORMAT

onde $\Omega_R = \sum_{i=1}^n \Omega_i$.

$$\begin{bmatrix} \tau_{arfagem} \\ \tau_{rolagem} \\ \tau_{guinada} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{kl\sqrt{3}}{2}(\Omega_1^2 - \Omega_3^2 - \Omega_4^2 + \Omega_6^2) \\ \Omega kl \left(\Omega_2^2 + \Omega_5^2 + \frac{1}{2}(\Omega_1^2 \Omega_3^2 \Omega_4^2 + \Omega_6^2) \right) \\ \Omega \left(-\Omega_1^2 + \Omega_2^2 - \Omega_3^2 + \Omega_4^2 - \Omega_5^2 + \Omega_6^2 \right) + \Omega_M(\dot{\cdot}_R) \end{bmatrix}$$

MERGEFORMAT

As seis equações mostradas acima representam o modelo dinâmico da aeronave em translação e rotação, respectivamente. Porém, o problema apresenta seis equações e nove incógnitas. Desta forma, as equações das relações cinemáticas (Roskam, 2001) podem ser utilizadas para tornar o problema possível e determinado com nove incógnitas e nove equações.

Relações Cinemáticas

É possível definir a atitude da aeronave em relação ao sistema de coordenadas do corpo (BCS) pelos ângulos de Euler, que são representados por $\Theta = [\phi \ \theta \ \psi]^T$, os quais representam os ângulos de arfagem, rolagem e guinada, respectivamente e sua velocidade angular pode ser escrita por $\dot{\Theta} = \begin{bmatrix} \dot{\phi} & \dot{\theta} & \dot{\psi} \end{bmatrix}^T$. Porém, deve-se notar que $\omega \neq \dot{\Theta}$, uma vez que o vetor ω aponta na direção do eixo de rotação, enquanto que $\dot{\Theta}$ representa apenas a derivada temporal dos ângulos de Euler. Para efetuar a conversão de $\dot{\Theta}$ para ω , utiliza-se a seguinte relação (Roskam, 2001):

$$\omega = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\sin \theta \\ 0 & \cos \phi & \cos \phi \cos \theta \\ 0 & -\sin \phi & \cos \theta \cos \phi \end{bmatrix} \dot{\Theta}$$

MERGEFORMAT

Os sistemas BCS e ICS também podem ser relacionados a partir dos ângulos de Euler por uma matriz rotacional. Esta matriz é resultante da projeção de um vetor escrito no BCS seguindo uma sequência de rotações na ordem de guinada ($R_B^I(\psi)$), arfagem ($R_B^I(\theta)$) e rolagem ($R_B^I(\phi)$):

$$R_B^I = \begin{bmatrix} \cos \theta \cos \psi & \cos \psi \sin \phi \sin \theta - \cos \phi \sin \psi & \cos \psi \cos \phi \sin \theta + \sin \phi \sin \psi \\ \cos \theta \sin \psi & \sin \theta \sin \psi \sin \phi + \cos \phi \cos \psi & \cos \phi \sin \psi \sin \theta - \cos \psi \sin \phi \\ -\sin \theta & \sin \phi \cos \theta & \cos \theta \cos \psi \end{bmatrix}$$

MERGEFORMAT

Desta forma, a partir da matriz de rotação (Eq. (5)), é possível relacionar a velocidade da aeronave escrita no BCS com o referencial inercial ICS e, conseqüentemente, determinar a posição da aeronave no espaço para cada instante de tempo.

Linearização do Modelo

A fim de que as técnicas de controle lineares possam ser aplicadas, o modelo é linearizado a partir da teoria de pequenas perturbações em torno de uma condição de operação em regime permanente (acelerações nulas). Os valores das perturbações são pequenos e portanto os termos de ordem superior a 1 serão negligenciados.

Assim, para qualquer variável de estado (χ) do sistema dinâmico não-linear é escrita como:

$$(\chi) = (\chi)_0 + (\tilde{\chi}) \quad \text{MERGEFORMAT}$$

sendo, $\tilde{\chi}$ indica a perturbação da variável a partir as da condição de trimagem (χ_0) – denotado pelo sub índice zero.

Os valores das perturbações são pequenos e portanto os termos onde aparecem o produto de duas variáveis serão negligenciados. Assim, as equações perturbadas do movimento podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \frac{-k_{dx}}{m} u - \frac{Qw_0}{m} - \frac{Q_0 w}{m} - \frac{R_0 v}{m} + \frac{Rv_0}{m} + g\theta \cos(\theta_0) \\ \dot{v} &= \frac{-k_{dy}}{m} v + \frac{Pw_0}{m} + \frac{P_0 w}{m} - \frac{Ru_0}{m} - \frac{R_0 u}{m} - g(\phi \cos(\phi_0) \cos(\theta_0) - \theta \sin(\phi_0) \sin(\theta_0)) \\ \dot{w} &= \frac{-k_{dz}}{m} w + \frac{Qu_0}{m} + \frac{Q_0 u}{m} - \frac{Pv_0}{m} - \frac{P_0 v}{m} + \frac{2k}{m} \sum_{i=6} (\Omega_0 \Omega_i) - g(\phi \sin(\phi_0) \cos(\theta_0) - \theta \sin(\theta_0) \cos(\phi_0)) \end{aligned}$$

MERGEFORMAT

$$\begin{aligned} \dot{P} &= -\frac{(Q_0 R + QR_0)(I_{zz} - I_{yy})}{I_{xx}} + \frac{QI_M \Omega_{r_0}}{I_{xx}} + \frac{Q_0 I_M \Omega_r}{I_{xx}} + kl\sqrt{3}(\Omega_{1_0} \Omega_1 - \Omega_{3_0} \Omega_3 - \Omega_{4_0} \Omega_4 + \Omega_{6_0} \Omega_6) \\ \dot{Q} &= -\frac{(P_0 R + PR_0)(I_{xx} - I_{zz})}{I_{yy}} - \frac{QI_r \Omega_{r_0}}{I_{xx}} - \frac{Q_0 I_r \Omega_r}{I_{xx}} + 2kl(-\Omega_{2_0} \Omega_2 + \Omega_{5_0} \Omega_5 + \frac{1}{2}(-\Omega_{1_0} \Omega_1 - \Omega_{3_0} \Omega_3 + \Omega_{4_0} \Omega_4 + \Omega_{6_0} \Omega_6)) \\ \dot{R} &= -\frac{(P_0 Q + PQ_0)(I_{yy} - I_{zz})}{I_{zz}} + b(-\Omega_{1_0} \Omega_1 + \Omega_{2_0} \Omega_2 - \Omega_{3_0} \Omega_3 + \Omega_{4_0} \Omega_4 - \Omega_{5_0} \Omega_5 + \Omega_{6_0} \Omega_6) \end{aligned}$$

MERGEFORMAT

$$\begin{aligned} \dot{\phi} &= P + Q \tan(\theta_0) \sin(\phi_0) + R \cos(\phi_0) \tan(\theta_0) \\ \dot{\theta} &= Q \cos(\phi_0) - R \sin(\phi_0) \quad \text{MERGEFORMAT} \\ \dot{\psi} &= Q \sin(\phi_0) \sec(\theta_0) + R \sec(\theta_0) \cos(\phi_0) \end{aligned}$$

Vale notar que o til nas variáveis de movimento perturbadas das equações acima foi desconsiderado para a sua simplificação. Desta forma, pode-se escrever as equações na forma de um sistema matricial de espaço de estados, para o sistema em malha fechada será:

$$\ddot{\tilde{x}} = A(x) + B(u) \quad \text{MERGEFORMAT}$$

$$\ddot{\tilde{y}} = Cx + Du \quad \text{MERGEFORMAT}$$

As equações linearizadas acima representam o modelo dinâmico da aeronave na forma de espaço de estados. As variáveis de entrada são as velocidades de rotação dos motores e como variáveis de estado as velocidades lineares, os ângulos de Euler e as velocidades de rotação no sistema não inercial. Porém, em muitas aplicações, é interessante conhecer e controlar a posição da aeronave no sistema referencial inercial a cada instante de tempo. Para a implementação de controle da posição da aeronave, deseja-se que o vetor de estado seja expandido a fim de incluir tais variáveis. Linearizando e incluindo a Eq. (5) no sistema matricial de espaço de estados, chega-se a um sistema de espaço de estados com 12 estados e 6 entradas de controle.

Por fim, as condições de trimagem, ou seja, as variáveis das equações denotadas pelo sub índice zero podem ser obtidas a partir das equações do movimento (Eqs. , e) levando em consideração o equilíbrio de forças ou condição de regime permanente.

4. Controle Moderno

A teoria de controle moderno tem se mostrado uma ferramenta poderosa para a indústria aeronáutica nos últimos anos principalmente no desenvolvimento de pilotos automáticos. O grande número de variáveis de controle dificulta o uso de técnicas clássicas de, uma vez que a sua essência é baseada em uma estrutura de malhas fechadas sucessivas e faz-se necessário a obtenção das funções transferência de cada estado para cada variável de entrada do sistema. Stevens e Lewis (1992) afirmam que, para dinâmicas multivariáveis ou MIMO (*Multiple Input Multiple Output*), as teorias modernas de controle mostram-se eficazes. Porém, segundo os autores, para que um controlador possa ser projetado, deve-se garantir que matrizes de controlabilidade e observabilidade tenham o ranque igual ao número de estados da planta.

Segundo Kalman (1961), as matrizes de controlabilidade e observabilidade podem ser obtidas a partir das matrizes A , B , C e D do modelo de espaço de estados descrito nas Eqs. (10) e (11):

$$U = \begin{bmatrix} B & AB & A^2B & \dots & A^{n-1}B \end{bmatrix} \quad \text{MERGEFORMAT}$$

$$O_b = \left[C^T \ A^T C^T \ \dots \ (A^T)^{n-1} C^T \right] \quad \text{MERGEFORMAT}$$

Uma vez garantida a observabilidade e controlabilidade do sistema, as técnicas de controle moderno podem ser aplicadas. Neste caso, foi proposto um controlador do tipo rastreador, também conhecido como LQT (*Linear Quadratic Tracking*), o qual é utilizado para forçar um estado a seguir, o mais próximo possível, um estado desejado ao longo do tempo de tal forma que minimize a matriz de performance (PI). O intuito do controlador é possuir um loop externo no regulador (LQR) que realimenta a saída dos estados e a subtraia da referência, definindo assim um erro $e(t)$ o qual deve ser levado a zero. Sendo assim, o índice quadrático de performance a ser minimizado fica na forma (Burns, 2001):

$$J = \int_0^{t_1} \left((r-x)^T \tilde{Q} (r-x) + u^T \tilde{R} u \right) dt \quad \text{MERGEFORMAT}$$

onde $r(t)$ é a trajetória desejada para o estado e $e(t)=r(t)-x(t)$ o erro entre a trajetória desejada e o estado em cada instante de tempo. O sinal de entrada ótimo será:

$$u_{opt} = v - Kx \quad \text{MERGEFORMAT}$$

Na Equação (15), v é o sinal de entrada do controlador em *rad/s*. A matriz de ganho K é obtida a partir da solução das equações de Ricatti (Burns, 2001). A Figura (3) representa o diagrama de blocos do rastreador (LQT).

Vertical yellow line

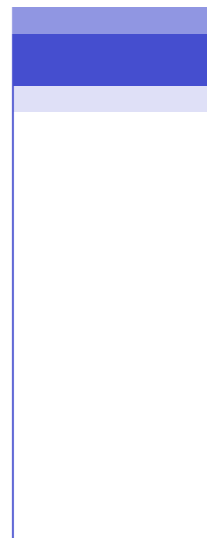
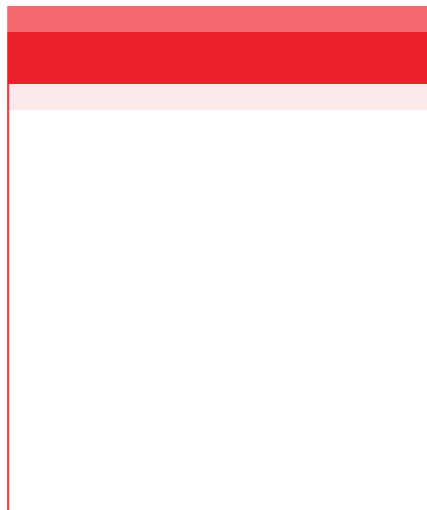


Figura 3: Rastreador LQT.

5. Simulações e Resultados

A seguir, serão discutidos os principais resultados obtidos a partir da implementação das equações dinâmicas nas plataformas de simulação implementadas em Matlab e Simulink.

A título de exemplo de aplicação, foi utilizada nas análises uma aeronave multirrotoira com seis rotores (hexacóptero) e suas características foram baseadas nos trabalhos experimentais de (Martinez, 2007; Sanca et. Al, 2010) as quais estão apresentadas na . Apesar destas características serem específicas de cada aeronave, este trabalho tem como objetivo desenvolver um modelo genérico, de tal forma que possa ser aplicado a diferentes tipos de aeronaves.

A partir dos valores assumidos, é possível estimar as constantes k e b :

$$k = \left(\frac{K_t K_v \sqrt{2\rho\pi\beta^2}}{K_t} \right)^2 \rightarrow k = 1.495 \cdot 10^{-05} \quad \text{MERGEFORMAT}$$

$$b = \frac{1}{2} \rho C_D A \beta^3 \rightarrow b = 9.46 \cdot 10^{-7} [kg.m^2] \quad \text{MERGEFORMAT}$$

A respeito do sensoriamento das variáveis estados, foi considerado que todos os doze estados podem ser monitorados na aeronave. Esta consideração pode ser feita uma vez que as aeronaves multirrotores, em geral, possuem sensores como: GPS, acelerômetro e giroscópio. Sendo assim, é possível estimar cada uma das variáveis de estado a partir destes instrumentos de forma que as matrizes C e D das Eqs. (12) e (13) serão uma matriz identidade 12×12 ($C=I_{12 \times 12}$) e matriz nula, respectivamente.

Tabela 1: Propriedades físicas da aeronave.

Propriedade	Descrição	Valor
m	Massa	2.326 kg
L	Comprimento do braço	0.32 m
k_d	Coefficiente de arrasto	$4.8 \cdot 10^{-2}$ Ns/m
I_{xx}	Momento de inercia em torno do eixo x	0.168 kgm ²
I_{yy}	Momento de inercia em torno do eixo x	0.168 kgm ²

I_{zz}	Momento de inercia em torno do eixo z	0.309 kgm ²
K_v	Constante de voltagem do motor	4.19 10 ⁻³ Vs/rad
K_t	Constante entre corrente e torque	4.19 10 ⁻³ Nm/A
C_Q	Constante empuxo do motor	1.037 10 ⁻³
C_T	Constante de torque do motor	0.01458
g	Aceleração da gravidade	9.81 m/s ²
ρ	Densidade do ar	1.225 kg/m ³
b	Raio da hélice	0.14 m
C_D	Coefficiente de fricção rotacional	6.4 10 ⁻⁴ Ns/m

Calculando a matriz de controlabilidade U e observabilidade O_b chega-se que o ranque das duas matrizes é 12. Logo o sistema é controlável e observável e as leis de controle podem ser aplicadas.

As matrizes de ponderação \tilde{Q} e \tilde{R} foram adotadas como matrizes identidade multiplicadas por uma constante k_Q e k_R respectivamente. Os valores dos ganhos para cada estado na matriz K são obtidos a partir da solução da matriz de Ricatti.

Em diversos casos de missões planejadas, é conveniente projetar um controlador para a aeronave que a faça deslocar no espaço de forma autônoma a partir de pontos de referência nos quais deseja-se que a aeronave atinja. A partir desta ideia, foi incorporado ao sistema (planta/controlador) um algoritmo que gera sinais de referência para os três estados de posição a partir de um vetor de posição pré-estabelecido. Este algoritmo é alimentado com o sinal de saída dos três estados de posição (x_E , y_E e z_E) a cada instante de tempo.

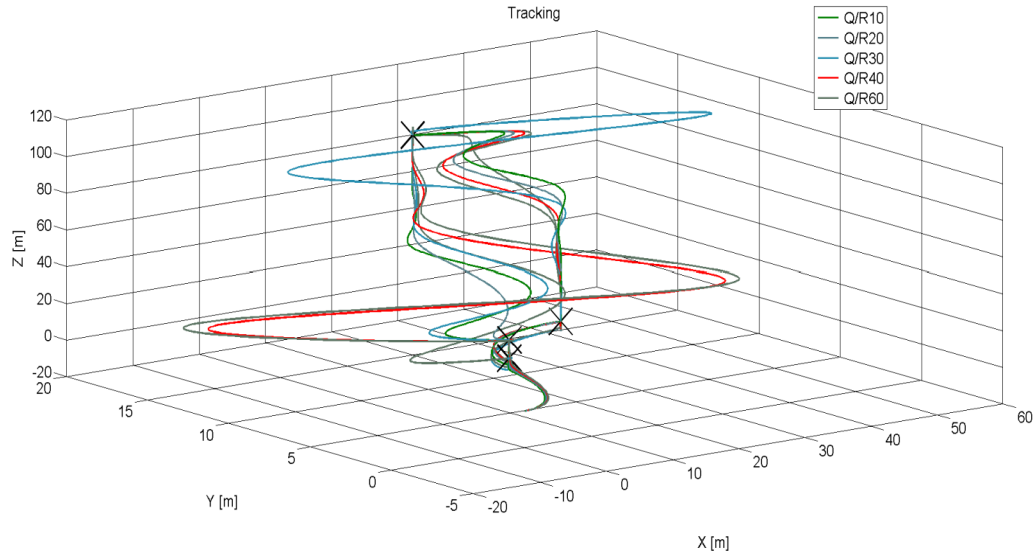


Figura 4: Trajetórias da aeronave para diferentes valores de k_q e k_r .

A fim de avaliar a sensibilidade das matrizes \tilde{Q} e \tilde{R} na resposta da aeronave, foram feitas simulações com diferentes valores de k_q e k_r , para os mesmos pontos de referência. Os valores da razão de k_q foram: 10, 20, 30, 40 e 60 enquanto que k_r foi mantido o valor unitário. A Figura (3) ilustra a trajetória adotada para a aeronave para diferentes valores de k_q . A Tabela (2) apresenta o tempo gasto (s) para cada trajetória.

A partir da Tabela 2, conclui-se que o menor tempo de simulação foi para o caso de $Q/R=30$. Nota-se também, observando a Fig. (3) Erro: Origem da referência não encontrada, que algumas trajetórias foram bastante desviadas apesar da aeronave passar pelos pontos desejados. Em determinadas missões este comportamento pode ser indesejado para a aeronave.

Tabela 2: Tempo de simulação para diferentes ganhos.

Q/R	Tempo (s)
10	154.75
20	130.30
30	87.1
40	110.4
60	158.25

Ainda, foi avaliado a rotação dos motores ao longo da trajetória, levando em conta a trajetória de menor tempo ($Q/R = 30$). o acréscimo de rotação nos motores ($\delta\omega$) está ilustrado na Fig. (4). Como pode-se observar na figura, as variações de rotação dos motores somadas a rotação trimada para o voo vertical (504 rad/s) não excedem o limite de operação para os motores *brushless* (7500 RPM ou 785 rad/s). para o caso de menor tempo, garantindo que o controle seja energeticamente viável.

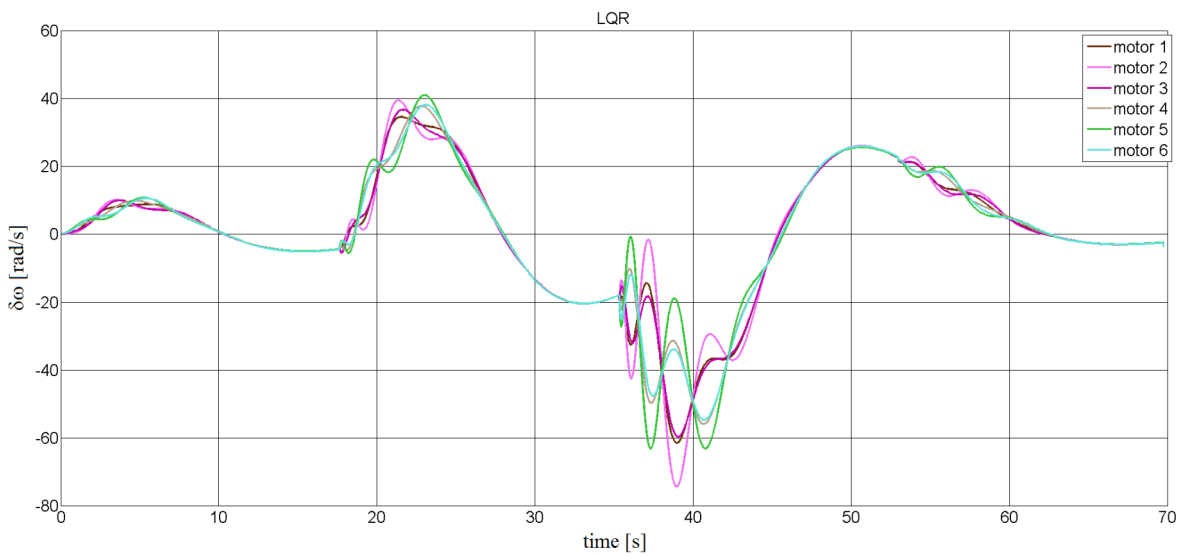


Figura 5: Variação de rotação dos motores ao longo da trajetória.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foi obtido um modelo dinâmico a partir das leis de Newton a fim de representar o comportamento real da aeronave o qual pôde ser verificado a partir de simulações computacionais. Em seguida, para que o controle dinâmico da aeronave pudesse ser feito a partir das teorias de controle linear moderno, o modelo foi linearizado assumindo que a aeronave executa um voo vertical pairado (equilíbrio dinâmico). Vale ressaltar que o novo modelo dinâmico linearizado é válido ao redor da condição de trimagem e que, portanto, a influência dos efeitos de fenômenos não lineares são desprezados.

Uma vez obtidas as equações do movimento linearizadas, estas foram expandidas de nove para doze estados, facilitando a implementação da lei de controle de posição da aeronave. Em

seguida, as equações linearizadas foram escritas na forma de espaço de estados e as teorias de controle moderno aplicadas assumindo um sistema do tipo *MIMO* (*Multi Input Multi Output*). As condições de trimagem foram obtidas a partir das equações de equilíbrio da aeronave. Nas simulações, as variáveis de trimagem foram avaliadas assumindo que a aeronave executa um voo ascendente (direção z do ICS).

Uma proposta de voo autônomo para a aeronave foi feita de forma que o rastreador LQT ainda foi acoplado à um algoritmo que gera sinais de posição para a aeronave de tal forma que esta possa seguir uma trajetória pré-definida a partir de pontos desejados. Nas simulações, pode-se observar que a precisão da trajetória e o tempo de simulação estão relacionados com os valores adotados para as matrizes \tilde{Q} e \tilde{R} .

Por fim, o modelo mostrou-se apto a ser aplicado a qualquer configuração de aeronave multirrota uma vez conhecidas as suas propriedades físicas. Porém, o modelo ainda pode ser melhorado, levando em conta perturbações externas e não-linearidades contidas no sistema. Ainda, um controlador físico poderia ser construído e instalado em um aeronave real de modo que os resultados da simulação pudessem ser comparados com resultados reais.

7. REFERÊNCIAS

Artale, V., Millazzo, C.L.R, e Ricciardello, A. “Mathematical Modeling of Hexacopter”. *Applied Mathematical Sciences*, Vol 7, 4805-4811, 2013.

Asselin, M., 1965. “An Introduction to Aircraft Performance”. Reston, Virginia: AIAA.
Bouabdallah, S., Noth, A., e Siegwart, R. “PID vs LQ Control Techniques Applied to an Indoor Micro Quadrotor”. *IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2451-2456, 2004.

Bouabdallah, S. “Design and Control of Quadrotors with Application to Autonomous Flying”. PhD Thesis, École Polytechnique Fédérale de Lausanne, 2007

Bresciani, T. “Modelling, Identification and Control of a Quadrotor Helicopter”. Lund: Lund University, 2008.

Burns, R. S.. “Advanced Control Engineering”. Oxford, Plant a Tree, 2001.

Castillo, P., Lozano, R., & Dzul, A. E. “Modelling and Control of Mini-Flying Machines”. London: Springer-Verlag.

Fogelberg, J., 2013. "Navigation and Autonomous Control of a Hexacopter in Indoor Enviroments". Lund, Sweden: Lund University, 2005.

Kalman, R., "On the General Theory of Control Systems". International Congress IFAC: Automatic and Remote Control, Butterworth & Co., London, 1961.

Martínez, V. "Modeling of the Flight Dynamics of a Quadrotor Helicopter". Cranfield, UK: Cranfield University, 2007.

Raffo, G. V., Ortega, M. G., e Rubio, F. R. "Backstepping/Nonlinear H Control for Path Tracking of a QuadRotor Unmanned Aerial Vehicle". American Control Conference, 3356-3351, 2008.

Rich, M. "Model development, system identification, and control of a quadrotor helicopter". Ames. Iowa: Iowa State University, 2012.

Roskam, J. "Airplane Flight Dynamics and Automatic Flight Controls". Lawrence,KS: DAR Corporation, 2001.

Sanca, A. S., Laura, T. L., Cerqueira, J. J., e Alsina, P. J. "Dynamic Modeling with Nonlinear Inputs and Backstepping Control for a Hexarotor Micro-Aerial Vehicle" . CBA , 1454-1461, , 2010.

Stevens, B. L., e Lewis, F. L. "Aircraft Control and Simulation". New York: Wiley-Interscience . Valavanis, K. P., 2007. "Advances in Unmanned Aerial Vehicles". Dordrecht, Netherlands: Springer, 1992.