Equações Diferenciais Ordinárias: do Beisebol à Eletricidade

BRUNA P. RODRIGUES[1], TACIANA O. SOUZA[2]

Resumo. As Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs) são muito utilizadas na modelagem matemática, solucionando diversos problemas físicos reais. Nesse contexto, são estudados os tipos de EDOs bem como suas resoluções gerais e aplicações, com ênfase no jogo de beisebol e em circuitos elétricos. Os resultados permitem o cálculo de determinadas variáveis úteis nas aplicações e, também, a análise de seus desempenhos em situações específicas. Por fim, é apresentada uma resolução alternativa para o caso dos circuitos, avaliando sua viabilidade.

Palavras chave: Equações Diferenciais, Transformada de Laplace, Beisebol, Circuitos Elétricos

Abstract. The Ordinary Differential Equations (ODEs) are very used in mathematical modelling, solving several real physics problems. In this context, the types of ODEs are studied as well as its general resolutions and applications with emphasis on baseball game and electric circuits. The results allow calculating certain useful variables on the applications and also the analysis of its performances on especific situations. Lastly, it is presented an alternative resolution for the circuits evaluating its viability.

Key words: Differential Equations, Laplace Transform, Baseball, Eletric Circuits

[1]Faculdade de Engenharia Mecânica, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121, Santa Mônica, Uberlândia - MG, 38408-100. E-mail: brunaperuca@gmail.com

[2]Faculdade de Matemática, Universidade Federal de Uberlândia, Av. João Naves de Ávila 2121, Santa Mônica, Uberlândia - MG, 38408-100. E-mail: tacioli@ufu.br

1 Introdução

Da necessidade de descrever um determinado fenômeno recorrente, surgiu a área da modelagem matemática, isto é, a formulação de equações que descrevem numericamente um sistema por meio das variáveis atuantes. A partir da simulação de tal fenômeno, são obtidos dados experimentais os quais permitem a suposição de uma equação apropriada, o modelo matemático. Muitas vezes este modelo inclui a taxa de variação de uma variável junto a ela, resultando nas chamadas Equações Diferenciais.

Definição 1. Denomina-se Equação Diferencial Ordinária (EDO) toda equação que envolve uma função de uma variável $y = f(x)$ desconhecida e algumas de suas derivadas.

Esse tipo de equação surgiu com o estudo do Cálculo por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz durante o século XVII. Newton contribuiu para a classificação de equações diferenciais ordinárias, e seus esclarecimentos sobre os princípios básicos da mecânica forneceram a base para a aplicação das equações diferenciais ordinárias no século XVIII. Por outro lado, Leibniz contribuiu para o desenvolvimento das equações diferenciais ordinárias desenvolvendo o método de separação de variáveis, a redução de equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem. No que diz respeito ao desenvolvimento do estudo das aplicações e da resolução das equações diferenciais, vários matemáticos ilustres estiveram envolvidos. Destaca-se Leonhard Euler, o qual desenvolveu -entre outros- a solução geral para as equações de coeficientes constantes e também a transformação integral, método este que viria, posteriormente, ser utilizado na solução das equações diferenciais por meio da conhecida transformada de Laplace.

As EDOs são comumente subdivididas segundo sua ordem (ordem da mais alta derivada presente na equação), sendo mais frequentes as de primeira e segunda ordem. Tais grupos podem ser ramificados ainda em vários tipos de equações, destacando: equações separáveis, equações lineares, equações exatas e equações homogêneas, todas de primeira ordem, e equações lineares (homogêneas ou não) de segunda ordem.

Sabendo, portanto, como é formado o grupo das EDOs, é importante salientar quão vasta é a gama de aplicações destas dentro da modelagem de sistemas, fato que pode ser verificado em [2], [3], [4], [5], [6] e [9]. Elas são utilizadas, por exemplo, na mecânica e cinemática, deflexão de vigas, circuitos elétricos, movimento dos fluídos, propagação de ondas, decaimento radioativo e crescimento populacional. Destaca-se aqui duas aplicações distintas que abrangem as equações diferenciais de primeira e segunda ordem, fornecendo um ótimo panorama de como elas são, de fato, aplicadas: no jogo de beisebol e num circuito elétrico.

Este artigo é baseado em parte do projeto de iniciação científica desenvolvido pela aluna Bruna P. Rodrigues, sob orientação da Profa. Dra. Taciana O. Souza, através do Programa

Jovens Talentos para a Ciência - CAPES.

2 Resolução das Equações Diferenciais Ordinárias

Uma solução para uma EDO é uma função que satisfaz identicamente à equação. A solução mais geral possível que uma EDO admite é denominada solução geral. Para o exemplo $y' + y = 0$, obtém-se $y = Ce^{-x}$, onde C é uma constante qualquer, como solução geral, enquanto $y = e^{-x}$ é uma solução particular.

2.1 EDO Separável

Definição 2. Equações Diferenciais Separáveis são as equações diferenciais ordinárias que podem ser escritas na forma $y' = g(x)h(y)$ onde $g(x)$ é uma função na variável x e $h(y)$ na variável y.

Denotando $p(y) = \frac{1}{h(y)}$, obtém-se, a partir da EDO separável, a equação $p(y)\frac{dy}{dx} = g(x)$. Se $y = f(x)$ é uma solução da EDO, então $dy = f'(x)dx$, e assim:

$$\int p(y)dy = \int p(f(x))f'(x)dx = \int g(x)dx.$$

Deste modo, obtém-se a equação

$$P(y) = G(x) + K$$

onde K é constante, $P(y)$ e $G(x)$ são primitivas de $p(y)$ e $g(x)$ respectivamente. Essa última equação define, de maneira implícita, a solução geral da EDO separável.

Exemplo: $(x^2 + 1)y' = xy$

Primeiramente, é necessário reescrever a equação acima no formato $y' = g(x)h(y)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{(x^2 + 1)}y.$$

Desse modo,

$$ln(y) = \frac{1}{2}ln(x^2 + 1) + K$$

é a solução da EDO, onde K é uma constante qualquer.

2.2 EDO Exata

Definição 3. Equações Diferenciais Exatas são as equações diferenciais ordinárias que podem ser escritas na forma $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, onde $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$ e $\dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ para uma função de duas variáveis $F(x,y) = C$, tal que C é uma constante qualquer.

A partir de algumas propriedades de diferenciabilidade, é possível afirmar que uma equação é exata se, e somente se, $\dfrac{\partial M}{\partial y}(x,y) = \dfrac{\partial N}{\partial x}(x,y)$.

Definindo $F(x,y) = C$, é estabelecida, de maneira implícita, a relação entre y e x de modo que y seja a solução geral da equação diferencial $y' = -\dfrac{M(x,y)}{N(x,y)}$. Integrando $\dfrac{\partial F}{\partial x}(x,y) = M(x,y)$, em relação a x, obtém-se

$$F(x,y) = \int M(x,y)dx + g(y) = C,$$

onde $g(y)$ é uma função de y. Para determinar $g(y)$, observa-se que $g'(y) = \dfrac{\partial F}{\partial y}(x,y) = N(x,y)$ e assim

$$g(y) = \int N(x,y)dx.$$

Para solucionar tal tipo de EDO, é necessário efetuar uma série de operações de derivada e integral pelos termos parciais como no exemplo a seguir.

Exemplo: $(3x^2 + 2y)dx + (2x + 2y)dy = 0$

Primeiro, estabelece-se:

$$M(x,y) = \frac{\partial F}{\partial x}(x,y) = 3x^2 + 2y \tag{1}$$

$$N(x,y) = \frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + 2y \tag{2}$$

Integrando a equação (1) em relação a x:

$$F(x,y) = x^3 + 2xy + g(y).$$

Derivando o resultado em relação a y:

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x,y) = 2x + g'(y) = N(x,y)$$

Igualando à equação (2):

$$g'(y) = 2y$$

Integrando a equação acima em relação a y:

$$g(y) = y^2 + K$$

Portanto,

$$F(x, y) = x^3 + 2xy + y^2 = C.$$

2.3 EDO Homogênea

Definição 4. Equações Diferenciais Homogêneas de Primeira Ordem são as equações diferenciais ordinárias $y' = f(x, y)$, tais que, para todo t real, $f(t \cdot x, t \cdot y) = f(x, y)$.

Para determinar a solução de uma equação deste tipo, considera-se uma mudança de variável, de modo a transformá-la em uma equação diferencial separável. Seja $y' = f(x, y)$ uma equação diferencial homogênea. Considerando $z = \dfrac{y}{x}$, deriva-se $y = zx$, em relação a x, para obter a equação $y' = xz' + z$. Substituindo, em seguida, $y = zx$ e $y' = xz' + z$ em $y' = f(x, y)$, encontra-se a equação

$$xz' + z = f(x, xz) = f(1, z).$$

A partir dessa equação, obtém-se a equação diferencial separável

$$z' = \frac{1}{x}(f(1, z) - z).$$

Exemplo: $y' = f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$

Assumindo $y = xz$, de acordo com o método descrito anteriormente, obtém-se a seguinte equação diferencial separável

$$z' = \frac{1}{x}(f(1, z) - z) = \frac{1}{x}\left(\frac{1 + z^2 - z^2}{z}\right),$$

isto é, $\dfrac{dz}{dx} = \dfrac{1}{xz}$. Assim, $\displaystyle\int z dz = \int \frac{1}{x} dx$ o que implica $z^2 = 2ln|x| + C$. Deste modo, encontra-se a solução geral

$$y^2 = x^2 \cdot (2ln|x| + C).$$

2.4 EDO Linear de Primeira Ordem

Definição 5. Equações Diferenceiais Lineares de Primeira Ordem são as equações diferenciais ordinárias que podem ser escritas na forma $y' + g(x)y = h(x)$, onde $g(x)$ e $h(x)$ são funções de x contínuas.

Equações desse tipo podem ser resolvidas por meio de sua multiplicação pelo chamado fator integrante $I(x)$, uma função adequada determinada de forma que $I(x)h(x) = (I(x)y)'$. Assim:

$$I(x)y' + I(x)g(x)y = I(x)h(x) = (I(x)y)' = I(x)y' + I'(x)y.$$

Dessa forma, $I(x)g(x) = I'(x)$, uma equação separável resultante em $I(x) = Ae^{\int g(x)dx}$. Tomando $A = 1$, então

$$I(x) = e^{\int g(x)dx}. \tag{3}$$

Portanto, multiplicando a equação diferencial linear pelo fator integrante:

$$I(x)(y' + g(x)y) = I(x)h(x)$$

$$(I(x)y)' = I(x)h(x)$$

$$I(x)y = \int I(x)h(x)dx + C.$$

Exemplo: $y' - 3x^2y = 6x^2$

Neste caso, $g(x) = 3x^2$ e $h(x) = 6x^2$. Pela equação 3, $I(x) = e^{\int 3x^2dx} = e^{x^3}$. Assim:

$$e^{x^3}y = \int e^{x^3}6x^2dx = 2e^{x^3} + C.$$

Portanto, $y = 2 + Ce^{-x^3}$.

2.5 EDO Linear de Segunda Ordem

Definição 6. Equações Diferenciais Lineares de Segunda Ordem são as equações diferenciais ordinárias que podem ser escritas na forma $p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = s(x)$, onde $p(x), q(x), r(x), s(x)$ são funções contínuas de x.

Elas são ditas homogênas se $s(x) = 0$.

Quando $p(x)$, $q(x)$ e $r(x)$ não são constantes, muitas vezes é difícil encontrar soluções para a equação, condição que não será aqui explorada. Caso satisfaçam a condição, no entanto, o processo se torna simples assumindo uma equação diferencial homogênea na forma

$$ay'' + by' + cy = 0. \tag{4}$$

onde a, b e c são constantes quaisquer.

Tomando $y = e^{rx}$ como solução, e sabendo $y' = re^{rx}$, $y'' = r^2e^{rx}$, então $e^{rx}(ar^2 + br + c) = 0$. Como $e^{rx} \neq 0$, $y = e^{rx}$ será solução para qualquer EDO da forma 4 se, e somente se, $(ar^2 + br + c) = 0$. Desta equação, obtém-se as raizes r_1 e r_2, fornecendo y_1 e y_2.

Pelo Teorema 4, da seção 17.1 de [6], sabe-se que, a partir de y_1 e y_2 linearmente independentes, é possível obter a solução geral $y(x)$ da equação inicial, a saber $y(x) = c_1y_1(x) + c_2y_2(x)$, onde c_1 e c_2 são duas constantes. Resolvendo a equação de segundo grau em questão, sabe-se que há 3 casos de solução:

- $b^2 - 4ac > 0 \Rightarrow r_1 \neq r_2$, portanto, $y = c_1e^{r_1x} + c_2e^{r_2x}$
- $b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow r_1 = r_2 = r$, portanto, $y_1 = e^{rx}$ e y_2 é uma função linearmente independente de y_1 que satisfaz a equação 4. Tomando $y_2 = xe^{rx}$, uma função que satisfaz claramente à condição de linearidade, basta formular $y(x)$ e substituir em 4 para verificar que y_2 pode ser utilizado. Logo, $y = c_1e^{rx} + c_2xe^{rx}$.
- $b^2-4ac < 0 \Rightarrow r_1 = \alpha+i\beta$ e $r_2 = \alpha-i\beta$. Logo , $y = C_1e^{\alpha+i\beta}+C_2e^{\alpha-i\beta}$, onde $\alpha = \frac{-b}{2a}$ e $\beta = \frac{\sqrt{4ac-b^2}}{2a}$. Pela Equação de Euler ($e^{i\theta} = cos\theta + isen\theta$), é possível expandir a equação solução, obtendo por fim: $y = e^{\alpha x}(c_1cos(\beta x)+c_2isen(\beta x))$, onde $c_1 = C_1+C_2$ e $c_2 = C_1 - C_2$.

Para equações lineares não homogêneas, a solução $y(x)$ é da forma $y(x) = y_p(x) + y_c(x)$, onde y_c é a solução geral para uma equação de mesmo formato homogênea, enquanto y_p é a solução particular que pode ser obtida segundo alguns métodos: variações dos parâmetros, séries e coeficientes a serem determinados. Este será explorado por meio do exemplo a seguir, enquanto os demais podem ser observados em [6].

Exemplo: $y'' + y' - 2y = x^2$

Aqui, $a = 1$, $b = 1$, $c = -2$ e $s(x) = x^2$. Para encontrar y_c, basta fazer $r^2 + r - 2 = 0$, onde $r_1 = 1$ e $r_2 = -2$. Portanto, $y_c = c_1e^{1x} + c_2e^{-2x}$.

Agora, como $s(x)$ é uma equação de segundo grau, espera-se $y_p = Ax^2 + Bx + C$, $y_p' = 2Ax + B$ e $y_p'' = 2A$. Substituindo tais valores na equação inicial do exemplo, tem-se

$$2A + 2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + c) = x^2$$

da qual $A = -\frac{1}{2}$, $B = -\frac{1}{2}$ e $C = -\frac{3}{4}$. Assim $y_p = -\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$.

Concluindo,

$$y = c_1e^x + c_2e^{-2x} - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}.$$

3 Transformada de Laplace

As transformadas integrais são operações que, a partir de uma função $f(t)$, geram uma nova função $F(s)$ denominada transformada de f. As transformadas são úteis, principalmente, para a solucionar equações diferenciais ou sistemas destas, uma vez que simplificam a resolução das equações. A operação faz parte do chamado "cálculo operacional", pois transforma uma equação de $f(t)$ e suas derivadas numa equação de $F(s)$, a qual pode ser resolvida por manipulação algébrica e, posteriormente, por meio da transformada inversa, ser revertida na função inicial obtendo o resultado almejado.

Entre elas, encontra-se a transformada de Laplace, muito aplicada na resolçuão de EDOs lineares de coeficientes constantes e, por esse motivo, aqui explorada.

Definição 7. A transformada e Laplace de uma função $f(t) : [0, +\infty) \to R$ é definida por

$$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

quando a integral for convergente.

Se uma função $f(t)$ for seccionalmente contínua e de ordem exponencial quando $t \to \infty$, então é garantida a existência de sua tranformada de Laplace (vide [2, Teorema 6.1.2]).

Três propriedades importantes da transformada de Laplace são a linearidade, a transformada de derivadas e o teorema da translação.

- Linearidade
  A transformada é um operador linear, assim:
  $$\mathcal{L}\{f(t) + g(t)\} = F(s) + G(s). \tag{5}$$
- Transformada de derivadas
  Sejam $f, f', ..., f^{(n-1)}$ contínuas e $f^{(n)}$ seccionalmente contínua. Além disso, supondo que f e todas as suas derivadas sejam de ordem exponencial, então:
  $$\mathcal{L}\{f^{(n)}(t)\} = s^n F(s) - s^{n-1} f(0) - s^{n-2} f^{(1)}(0)... - s f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \tag{6}$$
- Translação
  Denotando a transformada inversa de uma função $f(s)$ como $\mathcal{L}^{-1}\{f(s)\} = F(t)$, então a derivada dessa função com deslocamento a é dada por:
  $$\mathcal{L}^{-1}\{f(s - a)\} = e^{at} F(t). \tag{7}$$

Existem ainda tabelas que reúnem transformadas de Laplace elementares, como se pode observar em [2], [3] e [5].

4 O Jogo de Beisebol

No jogo Beisebol, ocorrem várias interações físicas as quais podem ser definidas por modelos no formato de equações diferenciais. Este é o tópico principal de [1] e será também aqui explorado.

Na colisão entre a bola e o taco, o contato ocorre durante um intervalo de tempo bem pequeno (cerca de um milésimo de segundo). Nessa colisão, a bola imprimi uma força no taco, ocorrendo mudança de momento desta. Mas como tal fenômeno ocorre exatamente? Primeiramente, vamos definir os conceitos físicos e associá-los.

Sabe-se que o momento p de um objeto pode ser definido como

$$p = m \cdot v \tag{8}$$

onde m é a massa e v é a velocidade do objeto. Suponha que um objeto se movendo ao longo de uma linha reta seja influenciado por uma força $F = f(t)$, uma função contínua do tempo. Além disso, a força resultante num sistema é igual a massa do sistema vezes sua aceleração a:

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = \frac{d(mv)}{dt}.$$

$\int F(t)dt = \int dp$, em particular Então, por (8), $F = \frac{dp}{dt}$ sendo esta uma EDO separável. Assim, aplicando o método de resolução de uma EDO separável temos

$$\int_{t_0}^{t_1} F(t)dt = p(t_1) - p(t_0) \tag{9}$$

A equação (9) é chamada *impulso* da força no intervalo de tempo $[t_0, t_1]$ e significa que a mudança de momento, em tal intervalo de tempo, é igual à integral da força aplicada no mesmo. Por exemplo, se uma bola a 40 m/s atinge o taco de um rebatedor e o deixa a uma velocidade de 50 m/s após ficar $0,001s$ em contato com aquele, pode-se calcular a mudança no momento da bola e a força média no taco, considerando que a massa da bola é 150g. Primeiramente, calcula-se a variação de momento e depois basta igualar o valor à multiplicação entre a força média F_m e a variação de tempo (9):

$$p(t_1) - p(t_0) = mv(t_1) - mv(t_0) = 0,150 \cdot (50 - 40) = 1,50[kg \cdot m/s]$$

$$1,50 = F_m \cdot 0,001 \Rightarrow F_m = 1,5kN.$$

É possível ainda calcular o trabalho necessário para arremessar uma bola a 40 m/s. Sabe-se que o trabalho W para mover um objeto de uma posição s_0 para uma posição s_1 é $W = \int_{s_0}^{s_1} F(s)ds$. Considerando $a = \frac{dv}{dt}$ e $v = \frac{ds}{dt}$ temos

$$F = ma = m\frac{dv}{dt} = m\frac{dv}{ds}\frac{ds}{dt} = mv\frac{dv}{ds}$$

e assim podemos expressar W como

$$W = \int_{v_0}^{v_1} mvdv = \frac{mv_1^2}{2} - \frac{m\,v_0^2}{2},$$

isto é, W é igual à variação da energia cinética do objeto. Essa última equação permite calcular o trabalho realizado para arremessar uma bola de 150g , inicialmente em repouso, a uma velocidade de 40 m/s:

$$W = \frac{0,150 \cdot 40^2}{2} = 120J.$$

Há, ainda, outros aspectos do beisebol que podem ser analisados por meio das equações diferenciais separáveis, como o movimento da bola entre o *outfielder* (jogador que ocupa o campo externo) e o pegador. Isto permite uma melhoria na tática de jogo no que diz respeito ao uso, ou não, de um *shortstop* (jogador que ocupa a posição entre a segunda e terceira base) o qual pode diminuir o tempo do trajeto total, dependendo da distância em que se encontra de cada um dos outros jogadores envolvidos.

Suponhamos que o outfielder apanhe uma bola de beisebol a 85 metros do pegador e a joga diretamente para o pegador a uma velocidade inicial de $30m/s$. Assumindo que a velocidade $v(t)$ da bola depois de t segundos satisfaz a EDO separável $\dfrac{dv}{dt} = -\dfrac{v}{10}$, determinamos $v(t) = Ce^{-t/10}$, onde C é constante. Por hipótese $v(0) = 30m/s$, então $v(t) = 30e^{-t/10}$. Para determinar a distância $d(t)$ que a bola percorreu depois de t segundos integra-se $v(t) = 30e^{-t/10}$, sabendo que $d(0) = 0$

$$d(t) = \int v(t)dt = -300e^{-t/10} + 300.$$

Assim, determinando t que satisfaz a equação $85 = -300e^{-t/10} + 300$ temos o tempo, $t \approx 3,33s$, que a bola levou para chegar ao pegador.

O técnico do time se pergunta se a bola alcançaria o pegador mais rápido se ela fosse revezada. O shortstop pode se posicionar diretamente entre o outfielder e o pegador, pegar a bola jogada pelo outfielder, girar e jogar a bola para o pegador com uma velocidade inicial de $35m/s$. O técnico cronometra o tempo de revezamento do shortstop (pegar, girar, jogar) em meio segundo. A dúvida do técnico é se ele deve encorajar uma jogada direta ou revezada, onde revezada signifia uma jogada com a participação do shortstop. Essa questão de qual seria a melhor tática de jogo pode ser respondida usando o Cálculo Diferencial e Integral.

Denotamos por $v_1(t)$ e $v_2(t)$ as velocidades das bolas lançadas pelo outfielder e shortstop respectivamente. Supondo que o shortstop possa lançar a bola a velocidade inicial de $35m/s$, determinamos $v_1(t) = 30e^{-t/10}$ e $v_2(t) = 35e^{-t/10}$, uma vez que $v_1(0) = 30m/s$ e $v_2(0) = 35m/s$. Integrando $v_1(t)$ e $v_2(t)$ obtemos $d_1(t) = -300e^{-t/10} + 300$ a distância que a bola está do outfielder após t segundos e $d_2(t) = -350e^{-t/10} + 350$ a distância que a bola está do shortstop após t segundos. Se $d_1(t_1)$ é a distância entre o outfielder e o shortstop e $d_2(t_2)$ é a distância entre o shortstop e o pegador, então t_1 é o tempo que a bola, após ser lançada pelo outfielder, leva para chegar ao shortstop e t_2 é o tempo que a bola, após ser lançada pelo shortstop, leva para chegar ao pegador. Assim, na jogada revezada $T = t_1 s + 0,5s + t_2 s$ é o tempo total que a bola, após ser jogada pelo outfielder, leva para chegar ao pegador. A partir da equação $85 = d_1(t_1) + d_2(t_2)$ podemos expressar t_2 em função de t_1:

$$t_2 = -10ln\left(\frac{56,5 - 30e^{-t_1/10}}{35}\right).$$

Portanto, o tempo total da jogada revezada T pode ser expresso como uma função de t_1:

$$T(t_1) = t_1 + 0,5 - 10ln\left(\frac{56,5 - 30e^{-t_1/10}}{35}\right).$$

Para determinar o tempo mínimo da jogada revezada devemos minimizar a função tempo total $T(t_1)$. Temos

$$T'(t_1) = 1 + \frac{30}{30 - 56,5e^{t_1/10}} = 0$$

se, e somente se, $e^{t_1/10} = \dfrac{60}{56,5} \approx 1,06$. Portanto, $t_1 \approx 0,6$ é o único ponto crítico de $T(t_1)$. A derivada de segunda ordem de $T(t_1)$

$$T''(t_1) = \frac{159,5e^{t_1/10}}{(30 - 56,5e^{t_1/10})^2}$$

é positiva para todo t_1 no domínio de T. Logo, pelo teste da segunda derivada, T atinge seu valor mínimo em $t_1 \approx 0,6$.

Se $t_1 \approx 0,6s$ então $t_2 \approx 2,14s$. Deste modo, se o shortstop se posicionar à distância $d_2(2,14) = 67,4m$ do pegador a jogada revezada terá a duração de $T = 0,6s + 0,5s + 2,14s = 3,24s$. Nesse caso o treinador deve encorajar a jogada revezada, uma vez que a jogada direta tem a duração de $3,33s$.

5 Os Circuitos Elétricos

Um circuito elétrico é, essencialmente, um caminho fechado para a passagem de corrente elétrica. Trata-se, mais precisamente, de uma união feita por fios, ou placas de ligação, de elementos elétricos (entre eles uma fonte energética e um elemento que consuma a energia produzida). Para entender seu funcionamento, é necessário saber alguns conceitos básicos de eletricidade. Estes e outros podem ser explorados mais profundamente em [7] e [8].

Carga elétrica(Q) é a unidade principal dos circuitos, sendo definida como a quantidade de energia elétrica de um determinado elemento. Quando sua carga é nula, diz-se que o elemento é neutro; caso contrário, diz-se que ele está carregado eletricamente. A carga é quantizada, isto é, medida em função de uma unidade fundamental - a carga de um próton ou de um elétron, denotada por e.

Quando a carga está em movimento, define-se a corrente elética($I(t)$) como a taxa de fluxo de carga por meio de uma superfície (no caso dos circuitos, a seção transversal do fio condutor).

$$I = \frac{dQ}{dt} \tag{10}$$

Para estabelecer e manter a corrente elétrica, aparecem as fontes, fornecedores de energia elétrica, que podem ser bateriais ou pilhas, geradores e outros. A fonte realiza trabalho na carga que passa por ela, aumentando ou diminuindo sua energia potencial elétrica (U).

Circuitos simples contam com três componentes básicos além dos fios e da fonte: resistores, capacitores e indutores. Os primeiros são elementos utilizados para oferecer resistência à passagem de corrente elétrica consumindo energia no processo. Tal resistência é medida em ohms (Ω). Já os capacitores e indutores são elementos que armazenam internamente energia elétrica segundo sua capacitância (C) para aqueles e indutância (L) para estes.

Como há consumo ou armazenamento de energia nos dispositivos citados, seus terminais apresentam diferentes energias potenciais. O potencial elétrico, grandeza definida como a energia potencial elétrica por unidade de carga, apresenta da mesma forma uma diferença entre os terminais, a qual é chamada diferença de potencial (d.d.p.). A Lei das Malhas de Kirchhoff relaciona a diferença de potencial entre os terminais de uma fonte ($V(t)$) à diferença de potencial entre os terminais dos resistores ($V_R(t)$), dos capacitores ($V_C(t)$) e dos indutores ($V_L(t)$). A lei estabelece que a soma de todas as diferenças de potencial numa malha é sempre zero.

A d.d.p entre os terminais dos resistores, capacitores e indutores é dada pelas seguintes fórmulas, respectivamente:

$$V_R(t) = RI \tag{11}$$

$$V_C(t) = \frac{Q}{C} \tag{12}$$

$$V_L(t) = L\frac{dI}{dt} \tag{13}$$

Por fim, os elementos em questão podem ser combinados formando diferentes circuitos, dentre os quais o circuito RL e o circuito RLC. A partir da estrutura dos circuitos, é possível escrever a equação definida pela Lei das Malhas de Kirchhoff.

5.1 Circuitos RL

Um circuito RL é formado por uma fonte, um resistor de R ohms (Ω) e um indutor de indutância L henries (H), como apontado na Figura 1 a seguir. Por ele passa uma corrente de $I(t)$ ampéres (A).

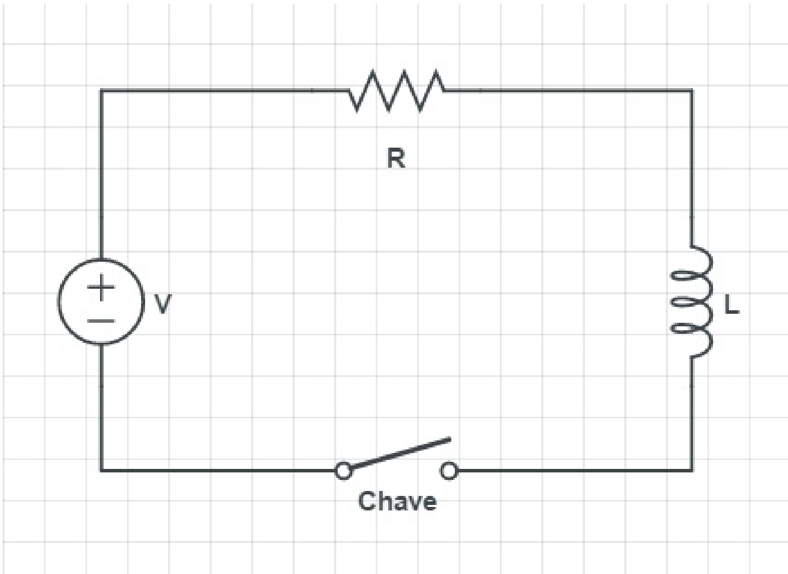

Figura 1: Circuito RL

Sabendo (11) e (13), pela Lei da Malhas de Kirchhoff, é possível escrever:

$$V(t) - V_R(t) - V_L(t) = 0$$

Os sinais negativos de $V_R(t)$ e $V_L(t)$ se devem ao fato do consumo e armazenamento de energia. Assim, percorrendo o circuito no sentido horário, o potencial final será menor que o inicial, justificando o sinal negativo.

$$V(t) = L\frac{dI}{dt} + RI \tag{14}$$

Supondo que, no circuito da Figura 1, $V(t) = 40sen(60t)$ volts (V), $L = 1$ H e $R = 20\Omega$. Deseja-se encontrar a corrente $I(t)$ sabendo que a corrente inicial é $I(0) = 1$ A.

Pela equação (14), tem-se:

$$40sen(60t) = 1\frac{dI}{dt} + 20I$$

uma equação linear de primeira ordem. Solucionando pelo método apresentado na seção (2.4), tem-se que o fator integrante é $e^{\int 20dt} = e^{20t}$ e

$$e^{20t}I = \int e^{20t}40sen(60t)dt + K$$

$$I = 2e^{-20t} \int sen(60t)20e^{20t}dt + e^{-20t}K.$$

Resolvendo a integral por partes:

$$\int sen(60t)20e^{20t}dt = e^{20t}sen(60t) - 3e^{20t}cos(60t) - 9\int sen(60t)20e^{20t}dt.$$

$$\int sen(60t)20e^{20t}dt = \frac{1}{10}(-e^{20t}sen(60t) - 3e^{20t}cos(60t))$$

Portanto,

$$I(t) = \frac{1}{5}sen(60t) - \frac{3}{5}cos(60t) + e^{-20t}K.$$

Como $I(0) = 1$, $K = \dfrac{8}{5}$ e:

$$I(t) = \frac{1}{5}sen(60t) - \frac{3}{5}cos(60t) + \frac{8}{5}e^{-20t}.$$

5.2 Circuitos RLC

Um circuito RLC é similar ao RL, porém com a adição de um capacitor de capacitância C farads (F), como se pode observar na Figura 2.

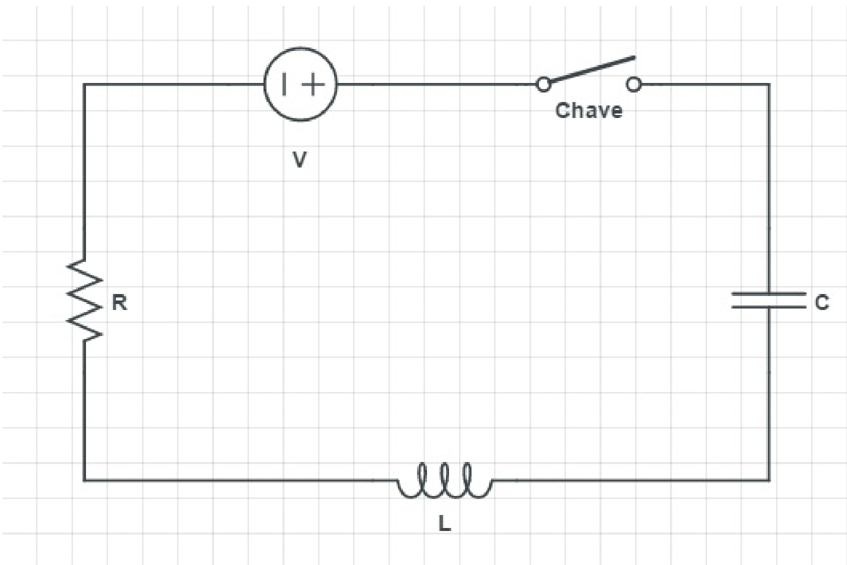

Figura 2: Circuito RLC

Sabendo (10), (11), (12) e (13), pela Lei da Malhas de Kirchhoff, é possível escrever:

$$V(t) - V_R(t) - V_C(t) - V_L(t) = 0$$

$$V(t) = L\frac{d^2Q}{dt^2} + R\frac{dQ}{dt} + \frac{Q}{C} \tag{15}$$

Supondo que, no circuito da Figura 2, $V = 12$ V, $L = 1$ H, $R = 20\Omega$ e $C = 0,002$ F. Deseja-se encontrar a corrente $I(t)$ e a carga $Q(t)$ sabendo que a corrente inicial é $I(0) = 0$ A e a carga inicial é $Q(0) = 0$ coulombs(C).

Pela equação (15), tem-se:

$$12 = 1\frac{d^2Q}{dt^2} + 20\frac{dQ}{dt} + 500Q \tag{16}$$

uma equação linear não homogênea de segunda ordem. Solucionando pelo método apresentado na seção (2.5):

$$Q(t) = Q_p(t) + Q_c(t)$$

onde $Q_c(t)$ é tal que

$$Q_c'' + 20Q_c' + 500Q_c = 0.$$

Para a equação acima, tem-se a equação auxiliar $r^2 + 20r + 500 = 0$, de raízes $r_1 = -10 + 20i$ e $r_2 = -10 - 20i$. Logo

$$Q_c(t) = e^{-10t}(c_1cos(20t) + c_2isen(20t)),$$

como visto na seção 2.5.

Para Q_p, espera-se uma constante, logo $Q_p = A$, $Q_p' = 0$ e $Q_p'' = 0$. Assim $500A = 12 \Rightarrow A = 0,024$.

Dessa forma, $Q_p = 0,024$ e:

$$Q(t) = e^{-10t}(c_1cos(20t) + c_2isen(20t)) + 0,024.$$

Por (10),

$$I(t) = -10e^{-10t}(c_1cos(20t) + c_2isen(20t)) + e^{-10t}(-20c_1sen(20t) + 20c_2icos(20t)).$$

Pelas condições do problema, $I(0) = 0$ e $Q(0) = 0$, obtém-se $c_1 = -0,024$ e $c_2 = -\frac{0,012}{i}$. Finalmente

$$Q(t) = e^{-10t}(-0,024cos(20t) - 0,012sen(20t)) + 0,024 \tag{17}$$

$$I(t) = 0,6e^{-10t}sen(20t) \tag{18}$$

Outra forma de resolver o problema é aplicando a transformada de Laplace na equação (16), com o auxílio das propriedades expressas em (5) e (6) e de uma tabela de transformadas de Laplace elementares. Utilizando $\mathcal{L}\{Q(t)\} = q$:

$$(s^2q - sQ(0) - Q'(0)) + 20(sq - Q(0)) + 500q = \frac{12}{s}.$$

Agora, assumindo $Q'(0) = 0$, é possível manipular algebricamente essa equação de modo a isolar q e encontrar transformadas elementares:

$$q = \frac{12}{s(s^2 + 20s + 500)}.$$

Pelo método das frações parciais,

$$q = \frac{0,024}{s} - \frac{0,024s + 0,48}{s^2 + 20s + 500}$$

$$q = \frac{0,024}{s} - \frac{0,024(s+10)}{(s+10)^2 + 400} - \frac{0,24}{(s+10)^2 + 400}.$$

A equação acima apresenta as transformadas elementares, como pode ser conferido nas referências bibliográficas. Sabe-se (7) e que $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s}\right\} = a$, $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{a}{s^2 + a^2}\right\} = sen(at)$ e $\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{s}{s^2 + a^2}\right\} = cos(at)$. Assim, aplicando a transformada inversa, obtém-se a função da carga:

$$Q(t) = \mathcal{L}^{-1}\{q\} = 0,024 - 0,024e^{-10t}cos(20t) - 0,012e^{-10t}sen(20t) \tag{19}$$

Por (10):

$$I(t) = 0,6e^{-10t}sen(20t) \tag{20}$$

Observa-se que as equações (17) e (19), (18) e (20) são correspontes, o que confirma a validade do método.

6 Conclusão

Por tudo que foi explorado, é possível afirmar que as Equações Diferenciais Ordinárias são importantes ferramentas na modelagem matemática, possuem diversas classificações, resoluções e, principalmente, aplicações. Estudando o caso do beisebol, é possível verificar como as equações diferenciais separáveis e outras ferramentas do Cálculo Diferencial e Integral podem ser aplicadas para determinar a força média e o trabalho realizado ao arremessar uma bola de beisebol de $150g$. Já no caso dos circuitos elétricos, foi possível determinar a equação da carga de um circuito bem como de sua corrente, em função do tempo, por meio das equações diferenciais lineares de primeira e segunda ordem. Além disso, é importante salientar as resoluções possíveis para o caso dos circuitos RLC, sendo o método de coeficientes a determinar e a transformada de Laplace aqui explorados. Pelo estudo realizado, conclui-se ser mais viável a utilização das transformadas para solucionar problemas do gênero, uma vez que esse método envolve apenas a aplicação de transformadas já conhecidas e sua manipulação algébrica, evitando a substituição de variáveis necessária para se obter as constantes no método apresentado em (2.5).

Este tipo de estudo é muito valioso, pois fornece novas perspectivas sobre o uso das equações diferenciais, além de possibilitar análises de sistemas reais, como a determinação da melhor tática de jogo que deve ser adotada pelo técnico de beisebol e o comportamento da corrente nos circuitos elétricos.

Referências

[1] ADAIR, R., The Physics of Baseball, 3ed. Nova York: HarperPerennial, 2002.

[2] BOYCE, W. E; Di Prima, R.C., Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno, 8ed. Guanabara: LTC Editora, 2006.

[3] PACHECO, A. L. S., Transformadas de Laplace: algumas aplicações, Monografia, 2011.

[4] SODRÉ, U., Equações Diferenciais Ordinárias Notas de aula, 2003.

[5] SPIEGEL, M. R., Transformadas de Laplace, McGraw-Hill do Brasil, 1971.

[6] STEWART, J., Cálculo, Volume 2, 7ed. São Paulo: Cengage Learning, 2013.

[7] TIPLER, P. A., Física para Cientistas e Engenheiros, Volume 2: eletricidade e magnetismo, óptica, LTC Editora, 2009.

[8] YOUNG, H. D; FREEDMAN, R. A., Física III: eletromagnetismo, Pearson Education do Brasil, 2009.

[9] ZILL, D.; CULLEN, M., Equações Diferenciais , Volumes 1 e 2, 3ed. São Paulo: Makron Books, 2001.