Estudo das aplicações reais de classe C^∞ via funções analíticas reais

Vinícius Gonzaga[1] e Juliano G. Oler[2]

Resumo. Seja $A(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções analíticas e considere $C^\infty(X,\mathbb{R})$ o conjunto das funções de classe C^∞. Neste artigo estamos interessados em caracterizar e estimar o "tamanho" dos conjuntos $A(X,\mathbb{R})$ e $C^\infty(X,\mathbb{R})$.

1 Introdução

Uma função $f : X \to \mathbb{R}$, definida em um intervalo aberto X, é analítica quando é de classe C^∞ e, para todo $x_0 \in X$, existe um $\delta > 0$ tal que $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ implica que $x \in X$ e que

$$f(x) = f(x_0) + f^{'}(x)(x - x_0) + \cdots + \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \cdots \tag{1}$$

Note que a série varia com o ponto x_0, visto que, seus coeficientes são expressos em função das derivadas $f^{(k)}(x_0)$. Além disso, mesmo que a função seja analítica em toda a reta, sua série de potências em torno de um ponto x_0 não necessáriamente precisa convergir em toda reta. Como nem toda série é convergente em toda a reta, surge naturalmente questão:

Questão 1.1. *Toda função de classe C^∞ é uma função analítica?*

O Teorema que segue, nos diz que para construir uma função que é de classe C^∞, que não é analítica, devemos construir uma função não nula, que admite uma série nula.

[1]Faculdade de Engenharia Aeronáutica - Universidade Federal de Uberlândia. FEMEC/UFU - Avenida João Naves de Ávila, 2121 - Santa Mônica - Uberlândia (MG) - Brasil - CEP 38400-902. e-mail: vinnicius.gonzaga@gmail.com

[2]Faculdade de Matemática - Universidade Federal de Uberlândia FAMAT/UFU - Avenida João Naves de Ávila, 2121 - Santa Mônica - Uberlândia (MG) - Brasil - CEP 38400-100. e-mail: jgoler@famat.ufu.br

Teorema 1.1 ([3])**.** *Se uma função analítica $f : X \to \mathbb{R}$ se anula, juntamente com todas as suas derivadas, num ponto de X, então f se anula em todos os pontos de X.*

Nesse sentido, o próximo resultado nos fornece um exemplo de uma função que não é nula, mas que apresenta uma série nula.

Teorema A. *Seja $b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ um uma função real definida por*

$$b(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x}} & para \quad x > 0 \\ 0 & para \quad x \leq 0. \end{cases}$$

Então b é uma aplicação de classe C^{∞}, mas b não é analítica.

Segue da definição de uma função analítica real e do Teorema A que $A(X,\mathbb{R})$ é subconjunto do espaço das funções de classe C^{∞}, tal que

$$A(X,\mathbb{R}) \subsetneq C^{\infty}(X,\mathbb{R}).$$

Questão 1.2. *Quão grande são os conjuntos $A(X,\mathbb{R})$ e $C^{\infty}(X,\mathbb{R})$?*

Para responder esta pergunta, vamos utilizar o conceito de dimensão de um espaço vetorial. Seja V um espaço vetorial sobre $\mathbb{R}$. Se V admite uma base infinita dizemos que a dimensão de V é infinita. Neste caso, denotamos a dimensão de V sobre $\mathbb{R}$ por $dim_{\mathbb{R}}V = \infty$.

No curso de Álgebra Linear, dizemos que um subespaço vetorial S, sobre o corpo $\mathbb{R}$ é grande, sempre que $\dim_{\mathbb{R}} = \infty$. Nesse contexto, enunciamos o Teorema:

Teorema B. *O conjunto das funções analíticas é um subespaço vetorial de dimensão infinita.*

Como consequência imediata do Teorema B, temos o Corolário:

Corolário C. *O conjunto as funções de classe C^{∞} é um subespaço vetorial de dimensão infinita.*

A seguir, mostraremos que toda função real de classe C^r, pode ser aproximada por uma função real de classe C^∞. Considere $K \subset A \subset X$, onde A é aberto e K é compacto. Mostraremos que $A(K,\mathbb{R})$ é um subconjunto aberto de $C^\infty(K,\mathbb{R})$, mais precisamente, temos o seguinte resultado:

Teorema D. *[4] Sejam $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma aplicação de classe C^r, onde A é um subconjunto aberto da reta. Seja $K \subset A$ compacto. Dados $\varepsilon > 0$, existe uma aplicação $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞, tal que $\| f - g \|_r < \varepsilon$.*

2 Resultados Preliminares Gerais

Nesta seção apresentamos alguns resultados clássicos sobre a teoria de Álgebra Linear e Análise, que será importante para os nossos objetivos para o resto deste trabalho.

2.1 Resultados de Álgebra Linear

Nesse texto, V será sempre um espaço vetorial sobre o corpo $\mathbb{R}$.

Definição 2.1. *Um conjunto não vazio V é um espaço vetorial se estiverem definidas as seguintes operações:*

(A) A cada par u, v de vetores de V corresponde um vetor $u+v \in V$, chamado de soma de u e v, de modo que:

- *(A1) $u+v = v+u$, para todo $u,v \in V$.*
- *(A2) $(u+v)+w = u+(v+w)$, para todo $u,v,w \in V$.*
- *(A3) exista em V um vetor, 0 tal que $0+v = v$, para todo $v \in V$.*
- *(A4) exista em V um vetor, $-v$ tal que $v+(-v) = 0$, para todo $v \in V$.*

(M) A cada par $\alpha \in \mathbb{R}$ e $v \in V$, corresponde um vetor $\alpha \cdot v \in V$, chamado de produto escalar de α e v, de modo que:

(M1) $(\alpha\beta)\cdot v = \alpha(\beta\cdot v)$, *para todo* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *e para todo* $v \in \mathbb{R}$.

(M2) $1\cdot v = v$, *para todo* $v \in V$, *sendo* 1 *o elemento neutro de* $\mathbb{R}$.

(D) Vamos considerar que as operações (A) e (M) sejam distributivas, mais precisamente:

(D1) $\alpha\cdot(u+v) = \alpha\cdot u + \alpha\cdot v$, *para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *e* $u,v \in V$.

(D2) $(\alpha+\beta)\cdot u = \alpha\cdot u + \beta\cdot v$, *para todo* $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$ *e* $v \in V$.

Definição 2.2. *Sejam* V *um espaço vetorial e considere um subconjunto* W *de* V. *O subconjunto* W *é um subespaço vetorial de* V, *se:*

(a) $0 \in W$;

(b) $v_1, v_2 \in W \Rightarrow v_1 + v_2 \in W$;

(c) $\alpha \in \mathbb{R},\ v \in W \Rightarrow \alpha\cdot v \in W$.

Definição 2.3. *Seja* V *um espaço vetorial.*

(a) Um vetor $v \in V$ *é uma combinação linear dos vetores* $v_1,\cdots,v_n \in V$ *se existirem escalares* $\alpha_1,\cdots,\alpha_n \in \mathbb{R}$ *tais que*

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n.$$

(b) Seja $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V. *Dizemos que* $\mathcal{B}$ *é um conjunto gerador de* V *se todo elemento de* V *for uma combinação linear de um número finito de elementos de* $\mathcal{B}$.

Definição 2.4. *Sejam* V *um espaço vetorial e* $\mathcal{B}$ *um subconjunto de* V.

(a) O conjunto $\mathcal{B}$ *é linearmente independente, ou simplesmente L.I, se* $\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n = 0$, *para* $v_i \in \mathcal{B}$ *e* $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $i = 1,\cdots,n$, *implica que* $\alpha_1 = \cdots = \alpha_n = 0$.

(b) O conjunto $\mathcal{B}$ *é chamado de linearmente dependente, ou simplismente L.D, se não for L.I.*

Definição 2.5. *Seja* V *um espaço vetorial. Dizemos que um subconjunto* $\mathcal{B}$ *de* V *é uma base se:*

(a) $\mathcal{B}$ for um conjunto gerador de V;

(b) $\mathcal{B}$ for L.I.

Definição 2.6. *Seja V um espaço vetorial. Se V admite uma base infinita dizemos que a dimensão de V é infinita. Neste caso, denotamos a dimensão de V sobre $\mathbb{R}$ por $dim_{\mathbb{R}}V = \infty$.*

2.2 Resultados de Análise

Aqui, apresentamos os resultados de um curso de análise que serão necessários par boa compreenção do texto. Tais resultados serão utilizados sistematicamente na prova dos Teoremas A, B e D.

Definição 2.7. *Seja $x \in X$. Dizemos que $a \in \mathbb{R}$ é um ponto de acumulação do conjunto X se:*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists x \in X \ : \ 0 < |x - a| < \varepsilon.$$

O conjunto dos pontos de acumulação será representado pela notação $X^{'}$.

Definição 2.8. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real e considere $p \in \mathbb{R}$ um ponto de acumulação de X. Um número real L é o limite de $f(x)$ quando x tende para p, e escrevemos, $\lim_{x \to p} f(x) = L$, se*

$$\forall \, \varepsilon > 0, \; \delta > 0 \ : \ 0 < |x - p| < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon.$$

Definição 2.9. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função real de uma variável real e considere $p \in X^{'} \cap X$. Dizemos que f é derivável no ponto p, e escrevemos $f^{'}(p)$, se o limite*

$$f^{'}(p) = \lim_{x \to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p}$$

existir.

Teorema 2.1 (Teorem do Valor Médio)**.** *Seja* $f : [a,b] \longrightarrow [a,b]$ *uma função contínua definida em um intervalo fechado* $[a,b]$*. Suponha que* f *seja derivável no intervalo aberto* (a,b)*. Então existe* $r \in (a,b)$ *tal que*

$$f^{'}(r) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Demonstração. Para prova deste resultado veja ([2]), página 86. □

Teorema 2.2 (Regra de L'Hospital)**.** *Sejam* $f, g : X \to \mathbb{R}$ *funções deriváveis no intervalo* $(p,+\infty)$*. Cosidere que* g *e* $g^{'}$ *sejam diferentes de zero em* $(p,+\infty)$ *e suponha que uma das possibilidades ocorra:*

(a) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$ *e* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$*;*

(b) $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ *e* $\lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$*;*

Então,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f^{'}(x)}{g^{'}(x)} = \ell \Rightarrow \lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \ell.$$

Demonstração. Para prova deste resultado, veja ([2]) página 167. □

Seja $r \in \mathbb{N}$. A r-ésima derivada ou derivada de ordem r de uma função f no ponto p é indicada com a notação $f^{(r)}(p)$ e é definida indutivamente por:

$$\begin{array}{rcl} f^{'}(p) & = & \lim_{x\to p} \dfrac{f(x)-f(p)}{x-p} \\ \\ f^{''}(p) & = & [f^{'}]^{'}(p) \\ \\ f^{'''}(p) & = & f^{(3)}(p) = [f^{''}]^{'}(p) \\ \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ f^{(r)}(p) & = & [f^{(r-1)}]^{'}(p) \end{array}$$

Afim de que $f^{(r)}(p)$ tenha sentido, é necessário que $f^{(r-1)}(p)$ esteja definida para todo x em um intervalo no qual p pertença.

Definição 2.10. *Seja X um intervalo contendo o ponto p. Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é r-vezes derivável no intervalo X quando existir $f^{(r)}(x)$ para todo $x \in X$.*

Definição 2.11. *Seja $X \subset \mathbb{R}$ um intervalo.*

(a) *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^0 se for um função contínua em X.*

(b) *Quando $f : X \to \mathbb{R}$ possui derivada em todos os pontos do intervalo X, considera-se a função derivada $f^{'} : X \to \mathbb{R}$, que associa a cada $x \in I$ a derivada $f^{'}(x)$. Quando $f^{'}$ é contínua, diz-se que f é uma função continuamente derivável no intervalo X ou, simplismente, dizemos que f é de classe C^1.*

(c) *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^r, e escrevemos $f \in C^r$, para significar que f é r vezes derivável no intervalo X e a função $x \mapsto f^{(r)}(x)$ é contínua em X. O conjunto das funções de classe C^r será denotado por $C^r(X, \mathbb{R})$.*

(c) *Dizemos que $f : X \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞, quando $f \in C^r$ para todo $r = 0, 1, 2, 3, \ldots$. O conjunto das funções de classe C^∞ será denotado por $C^\infty(X, \mathbb{R})$.*

Definição 2.12. *Seja $f : X \to \mathbb{R}$ uma função definida em um intervalo aberto X. Dizemos que f é uma função analítica se:*

(a) $f \in C^\infty$;

(b) *para todo $x_0 \in X$, existe $r > 0$ tal que se $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$ implica que $x \in X$ e que*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j(x_0)}{j!}(x - x_0)^j.$$

O conjunto das funções analíticas será denotado por $A(X, \mathbb{R})$.

Definição 2.13. *Seja $K \in X$ compacto e considere $f \in C^r(K,\mathbb{R})$. Então, definimos*

$$||f||_r = \sup_{x\in K}\left\{||f(u)||, ||f'(u)||, ||f''(u), ..., ||f^{(n)}(u)||\right\}.$$

3 Prova do Teorema A

A prova do Teorema A será dividida em dois lemas e um corolário, a saber:

Lema 3.1. *Se $x > 0$ e n é um inteiro, então $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$.*

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

Para verificarmos $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$, basta repetir os mesmos argumentos (pois se fazermos x tender para zero por valores negativos, isto apenas trocará o sinal da derivada).

Fixe $x > 0$ e considere o intervalo $I = [0,x]$. Como a função exponencial $E(x) = e^x$ é diferenciável em $(0,x)$, segue do Teorema 2.1 que existe um número real $0 < r < x$, tal que

$$E(x) - E(0) = E^{'}(r)(x-0) \quad \Rightarrow \quad e^x - e^0 = e^r \cdot x \quad \Rightarrow \quad e^x = 1 + e^r \cdot x.$$

Agora, como $r > 0$, temos que $e^r > 1$. Assim sendo, obtemos que

$$e^x > 1 + x.$$

Como consequência, sempre que $x > 0$, podemos afirmar que

$$e^{\frac{x}{n+1}} > 1 + \frac{x}{n+1} > \frac{x}{n+1}.$$

Assim, elevando a potênia $n+1$, segue que

$$\left(e^{\frac{x}{n+1}}\right)^{n+1} > \left(\frac{x}{n+1}\right)^{n+1} \quad \Rightarrow \quad e^x > \frac{x^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad e^x > \frac{x^n \cdot x}{(n+1)^{n+1}} \quad \Rightarrow \quad \frac{x^n}{e^x} < \frac{(n+1)^{n+1}}{x}.$$

Dessa forma, concluímos que

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} \quad &< \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{(n+1)^{n+1}}{x} \\ &\overset{\text{Teorema 2.2}}{=} \quad 0. \end{aligned}$$

$\square$

Corolário 3.1. *Seja $p(x)$ um polinômio. Então* $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = 0.$

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} = 0.$$

Para verificarmos $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{p(x)}{e^x} = 0$, basta repetir os mesmos argumentos. Agora, seja $p(x)$ um polinômio arbitrário. Considerando $c_n x^n$ o termo de maior grau de p, temos que

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{x^n} = c_n.$$

Nesse sentido,

$$\begin{aligned} \lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{e^x} \quad &= \quad \lim_{x\to+\infty} \left(\frac{p(x)}{x^n} \cdot \frac{x^n}{e^x}\right) \\ &= \quad \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{p(x)}{x^n}\right) \cdot \left(\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x}\right) \\ &\overset{\text{Lema 3.1}}{=} \quad c_n \cdot 0 = 0. \end{aligned}$$

□

Lema 3.2. *Se $b(x) = e^{-\frac{1}{x}}$, então para todo ponto $x \neq 0$ temos que*

$$b^{(n)}(x) = h_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}, \tag{2}$$

onde h_n é um polinômio.

Demonstração. A prova será feita por indução sobre n. Primeiramente, vamos verificar que o resultado é válido para $n = 1$.

De fato,

$$\begin{aligned} b'(x) &= \left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' = \left(-\frac{1}{x}\right)' \cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot e^{-\frac{1}{x}} = \left(\frac{1}{x}\right)^2 \cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= h_1\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

onde

$$h_1(x) = x^2.$$

Como $h_1(x) = x^2$ é claramente um polinômio a igualdade (2) é válida para $n = 1$. Suponha que a igualdade (2) é verdadeira para $n = k$ e vamos verificar a igualdade para $n = k+1$. De fato,

$$\begin{aligned} b^{(k+1)}(x) &= (f^{(k)})'(x) = \left(h_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= \left(h_n\left(\frac{1}{x}\right)\right)'\cdot e^{-\frac{1}{x}} + h_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\left(e^{-\frac{1}{x}}\right)' \\ &= -h_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} + h_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= \left(-h_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2} + h_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x}} \\ &= h_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right)\cdot e^{-\frac{1}{x}}, \end{aligned}$$

onde

$$h_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) = -h_n'\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2} + h_n\left(\frac{1}{x}\right)\cdot\frac{1}{x^2}.$$

□

3.1 Prova do Teorema B

Como a funçao $b(x)$ é uma função não nula, para provarmos o Teorema B, temos que mostrar que $b^{(n)}(0) = 0$, para todo n. A prova será feita por indução sobre n. Primeiro vamos checar se $b'(0) = 0$. De fato:

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{b(x)-b(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^-}\frac{0}{x} = 0.$$

Por outro lado,

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{b(x)-b(0)}{x-0} = \lim_{x\to 0^+}\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{e^{\frac{1}{x}}}.$$

Fazendo a mudança de coordenadas $y = \frac{1}{x}$ e aplicando o Corolário 3.1, obtemos que

$$\lim_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0.$$

Assim, concluímos que $b^{'}(0) = 0$. Agora, vamos assumir que $b^{(n)}(0) = 0$. Para calcular $b^{(n+1)}(0) = 0$, vamos novamente averiguar os limites laterais à direita e à esquerda de $x = 0$. Assim sendo,

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to 0^+} \frac{b^{(n)}(x) - b^{(n)}(0)}{x - 0} &= \lim_{x \to 0^+} \frac{b^{(n)}(x) - 0}{x} \\
&\overset{\text{lema3.2}}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{h_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}}{x} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} \cdot h_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}}, \\
&= \lim_{x \to 0^+} \overline{h}_n\left(\frac{1}{x}\right) \cdot e^{-\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x \to 0^+} \frac{\overline{h}_n\left(\frac{1}{x}\right)}{e^{\frac{1}{x}}} \\
&= \lim_{y \to +\infty} \frac{\overline{h}_n(y)}{e^y} \\
&\overset{\text{Corolário 3.1}}{=} 0,
\end{aligned}$$

onde

$$\overline{h}_n\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} \cdot h_n\left(\frac{1}{x}\right) \text{ e } y = \frac{1}{x}.$$

Portanto, concluímos que b é uma função de classe C^{∞}, que não é analítica, visto que $b(x)$ é não nula, mas

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{b^j(0)}{n!} x^j = 0.$$

4 Prova do Teorema B

A prova do Teorema B será dividida em alguns lemas. Primeiramente

Lema 4.1. *O conjunto $A(X,\mathbb{R})$ é um subespaço vetorial de $C^\infty(X,\mathbb{R})$.*

Demonstração. Como consequência da Definição 2.2, temos que mostrar que:

(a) 0 (função nula) $\in A(X,\mathbb{R})$;

(b) $f,g \in A(X,\mathbb{R}) \Rightarrow f+g \in A(X,\mathbb{R})$;

(c) $\alpha \in \mathbb{R}$ e $f \in A(X,\mathbb{R}) \Rightarrow \alpha f \in A(X,\mathbb{R})$.

De fato. Provaremos os itens na sequência.

(a) A função nula $f \equiv 0$ é uma função de classe C^∞ talque $f^{(r)} = 0$ para todo r. Dessa forma, se $f \equiv 0$ então

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j,$$

o que mostra que $0 \in A(X,\mathbb{R})$.

(b) Sejam $f,g \in A(X,\mathbb{R})$. Então temos que

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j, \text{ se } |x-x_0| < r$$

e

$$g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j, \text{se} |x-x_0| < s.$$

Considere, $t = min\{r, s\}$. Assim sendo, se $|x - x_0| < t$, obtemos que

$$\begin{aligned}
(f+g)(x) &= f(x) + g(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \sum_{j=0}^{\infty} \frac{g^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{f^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j + \frac{g^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j \right) \\
&= \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{f^j(x_0)}{j!} + \frac{g^j(x_0)}{j!} \right) (x-x_0)^j.
\end{aligned}$$

o que conclui a prova do item (b).

(c) Se $f \in A(X, \mathbb{R})$ e $\alpha \in \mathbb{R}$, então $f \in C^\infty$ e

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j, \text{ se } |x - x_0| < r.$$

Dessa forma, temos que $(\alpha f) \in C^\infty$ e

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\alpha f^j(x_0)}{j!}(x-x_0)^j,$$

o que mostra que $\alpha f \in A(X, \mathbb{R})$ e finaliza a prova do item (c).

Portanto, por (a), (b) e (c) concluímos a prova do lema.

$\square$

Lema 4.2. *Sejam $k \in \mathbb{N}$ e $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função polinomial não nula de grau menor ou igual a k. Então, para todo $x \in \mathbb{R}$,*

$$p(x) = p(0) + \frac{p'(0)}{1!}x + \frac{p''(0)}{2!}x^2 + \frac{p'''(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(k)}(0)}{k!}x^k. \tag{3}$$

Demonstração. A prova será feita por indução sobre o grau do polinômio $p(x)$. Se $k = 0$, então por definição, a função polinomial $p(x)$ será uma constante (visto que, somente os polinômios constantes possuem grau zero), isto é, $p(x) = c$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim sendo, a afirmação é verdadeira para $k = 0$, visto que fazendo $k = 0$ da igualdade (3), obtemos $p(x) = p(0)$, ou seja, $p(x)$ é um polinômio constante.

Suponha que a igualdade (3) seja verdadeira para todo k. Na sequência, vamos verificar que a igualdade mencionada também é válida para um polinômio de grau $k+1$. Como a derivada de todo polinônio de grau $k+1$ é um polinômio de grau k, podemos aplicar a hipótese de indução para concluir que:

$$p^{'}(x) = p^{'}(0) + \frac{(p^{'})^{'}(0)}{1!}x + \frac{(p^{'})^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{(p^{'})^{'''}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{(p^{'})^{(k)}(0)}{k!}x^k.$$

Agora, como

$$(p^{'})^{'}(0) = p^{''}(0), \quad (p^{'})^{''}(0) = p^{'''}(0), \quad (p^{'})^{'''}(0) = p^4(0), \quad \cdots \quad ,(p^{'})^{(k)}(0) = p^{(k+1)}(0),$$

segue que

$$p^{'}(x) = p^{'}(0) + \frac{p^{''}(0)}{1!}x + \frac{p^{'''}(0)}{2!}x^2 + \frac{p^{(4)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(k+1)}(0)}{k!}x^k.$$

Considere agora a função

$$f(x) = p^{'}(0)x + \frac{p^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{p^{'''}(0)}{3!}x^3 + \frac{p^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{p^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}.$$

Derivando a função f com relação a x obtemos:

$$\begin{aligned} f^{'}(x) &= p^{'}(0) + \frac{p^{''}(0)}{2!} \cdot 2x + \frac{p^{'''}(0)}{3!} \cdot 3x^2 + \frac{p^{(4)}(0)}{4!} \cdot 4x^3 + \cdots + \frac{p^{(k+1)}(0)}{(k+1)!} \cdot (k+1)x^k \\ &= p^{'}(0) + \frac{p^{''}(0)}{1!}x + \frac{p^{'''}(0)}{2!}x^2 + \frac{p^{(4)}(0)}{3!}x^3 + \cdots + \frac{p^{(k+1)}(0)}{k!}x^k. \end{aligned}$$

O que mostra que $f^{'}(x) = p^{'}(x)$, para todo $x \in \mathbb{R}$. Assim sendo, existe um número $M \in \mathbb{R}$ talque $p(x) = f(x) + M$. Sendo $f(0) = 0$, segue que

$$p(0) = f(0) + M \Rightarrow p(0) = 0 + M \Rightarrow M = p(0).$$

Dessa forma, concluímos que $p(x) = p(0) + f(x)$, o que implica que:

$$p(x) = p(0) + p^{'}(0)x + \frac{p^{''}(0)}{2!}x^2 + \frac{p^{'''}(0)}{3!}x^3 + \frac{p^{(4)}(0)}{4!}x^4 + \cdots + \frac{p^{(k+1)}(0)}{(k+1)!}x^{k+1}$$

e, portanto, o lema está demonstrado. □

Lema 4.3. *O conjunto $P(\mathbb{R})$, de todos o polinômios de qualquer grau, é um espaço vetorial de dimensão infinita. Mais precisamente, o conjunto*

$$\mathcal{B} = \{1, x, x^2, x^3, x^4, \cdots, x^k, \cdots\}$$

é uma base para o espaço vetorial $P(\mathbb{R})$.

Demonstração. Pela Definição 2.5, temos que mostrar que:

(a) o conjunto $\mathcal{B}$ gera $P(\mathbb{R})$;

(b) o conjunto $\mathcal{B}$ é L.I.

De fato, segue do Lema 4.2 que $\mathcal{B}$ gera $P(\mathbb{R})$. Resta apenas mostrarmos que $\mathcal{B}$ é L.I. Consider escalares $\alpha_0, \alpha_1, \cdots, \alpha_k$ tais que

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_k \cdot x^k = 0$$

Como 0 é o elemento neutro do conjunto dos polinômios temos que

$$0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^k = 0$$

o que implica que

$$\alpha_0 \cdot 1 + \alpha_1 \cdot x + \cdots + \alpha_k \cdot x^k = 0 \cdot 1 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^k.$$

Agora, dois polinômios são iguais se todos os coeficientes envolvidos são iguais, mais precisamente,

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_k = 0$$

mostrando assim, que $\mathcal{B}$ é L.I.

Dessa forma, segue de (a) e (b) que $\mathcal{B}$ é uma base para o conjunto $P(\mathbb{R})$. Portanto, concluímos que $P(\mathbb{R})$ é um espaço vetorial de dimensão finita. $\square$

4.1 Prova do Teorema B

Agora, como todo polinômio é uma função analítica segue que $P(\mathbb{R}) \subset A(X,\mathbb{R})$. Como $P(\mathbb{R})$ tem dimensão finita segue que $A(X,\mathbb{R})$ também tem dimensão infinita. O que prova o Teorema B.

5 Prova do Teorema D

Considere a funçao auxiliar

$$\begin{aligned} \varphi \; : \; & \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ & x \mapsto \varphi(x) = \begin{cases} 1, & x \in K; \\ 0, & x \in K \subset V \subset A, \end{cases} \end{aligned}$$

onde V é uma vizinhança aberta de K.

Tomando

$$h(x) = (\varphi.f)(x) = \varphi(x).f(x),$$

temos que:

$$h(x) = \begin{cases} f(x), & x \in K; \\ 0, & x \in A^c. \end{cases}$$

Como h é de classe C^r e K é compacto, existe $\delta > 0$ tal que

$$S = sup\{||h^j(u+v) - h^j(u)|| : u \in K, ||v|| < \delta\} < \varepsilon$$

para todo $1 \leq j \leq r$.

Seja $\varphi_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função auxiliar tal que:

$$\begin{cases} \varphi_j(v) = 0, & ||v|| > \delta \\ \\ \int \varphi_j(v) dv = 1 & . \end{cases}$$

Definimos,

$$\begin{aligned} g \ &: \ \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ &u \mapsto g(u) = \int \varphi_j(v) h(u+v) dv. \end{aligned}$$

Fazendo, a substituição

$$z = u + v \quad \Longleftrightarrow \quad v = z - u,$$

obtemos que

$$g(u) = \int \varphi_j(z-u) h(z) dz.$$

Note que:

$$\begin{aligned}
g'(p) &= \lim_{u\to p}\frac{g(u)-g(p)}{u-p}\\
&= \lim_{u\to p}\frac{\int \varphi_j(z-u)h(z)dz-\int \varphi_j(z-p)h(z)dz}{x-p}\\
&= \lim_{u\to p}\int\left(\frac{\varphi_j(z-u)-\varphi_j(z-p)}{x-p}\right)h(z)dz\\
&= \int\left(\lim_{u\to p}\frac{\varphi_j(z-u)-\varphi_j(z-p)}{x-p}\right)h(z)dz\\
&= \int\frac{d}{dt}(\varphi_j(z-u))h(z)dz\\
&= \int -\varphi_j'(z-u)h(z)dz\\
&= -\int \varphi_j'(z-u)h(z)dz.
\end{aligned}$$

Assim,

$$g'(u)=(-1)\int \varphi_j'(z-u)h(z)dz$$

o que implica que

$$g^j(u)=(-1)^j\int \varphi_j^t(z-u)h(z)dz,$$

para todo $1\leq j\leq r$. Da expressão anterior, concluímos que $g\in C^\infty$.

Por outro lado,

$$f^j(u)=h^j(u)=\int \varphi_j(u)h^j(u)dv$$

lembrando que,

$$\int \varphi_j(v)dv=1.$$

Dessa forma,

$$
\begin{aligned}
||g^j(u) - f^j(u)|| &= ||\int \varphi_j(v)h^j(u+v)dv - \int \varphi_j(v)h^j(u)dv|| \\
&= ||\int \varphi_j(v)(h^j(u+v) - h^j(u))dv|| \\
&\leq \int ||\varphi_j(v)(h^j(u+v) - h^j(u))||dv \\
&= \int ||\varphi_j(v)||.||h^j(u+v) - h^j(u)||dv \\
&< \int ||h^j(u+v) - h^j(u)||dv \\
&\leq sup\{||h^j(u+v) - h^j(u)|| : u \in K, ||v|| < \delta\} \\
&< \varepsilon,
\end{aligned}
$$

onde $1 \leq j \leq r$.

Logo,

$$||g^j(u) - f^j(u)||,$$

com $1 \leq j \leq r$, o que implica que

$$||g - f||_r < \varepsilon.$$

Referências

[1] M. L. Coelho, F. U. e Lourenço. *Um curso de Álgebra Linear*. Editora da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010.

[2] D. G. Figueiredo. *Análise I*. LTC-Livros Técnicos e Ciêntíficos Editora S.A, Rio de Janeiro, 1996.

[3] E. L. Lima. *Curso de Análise*. Projeto Euclides. IMPA, CNPq, Rio de Janeiro, 1929.

[4] M. Palis, J. J. e Welington. *Introdução aos Sistemas Dinâmicos*. IMPA - CNPq, Rio de Janeiro, 1977.