PARTIÇÕES

JOABE OLIVEIRA SANTOS[1], MARCOS ANTÔNIO DA CÂMARA[2]

[1] Faculdade de Matemática – Universidade Federal de Uberlândia. FAMAT/UFU – Avenida João Naves de Ávila, 2121 – Santa Mônica – Uberlândia (MG) – CEP 38.408-100. E-mail: joabejos@hotmail.com

[2] Faculdade de Matemática – Universidade Federal de Uberlândia. FAMAT/UFU – Avenida João Naves de Ávila, 2121 – Santa Mônica – Uberlândia (MG) – CEP 38.408-100. E-mail: camara@ufu.br

RESUMO

O objetivo deste trabalho é introduzir o conceito de partições e provar algumas identidades.

Para demonstrar as identidades de partições, as representaremos graficamente através de gráficos de Ferrers e assim, utilizando várias ferramentas combinatórias, transformaremos uma classe de partições em outra.

Demonstraremos o Teorema dos Números Pentagonais de Euler e que a função $p(n)$, que associa a cada n o número de partições, é uma função monótona, crescente e pode ser majorada usando números de Fibonacci.

Faremos uma breve introdução sobre Funções Geradoras e depois provaremos algumas identidades utilizando-as, mostrando assim, outra forma de abordar as identidades de partições.

Palavras-chave: Partições, Identidades de Rogers-Ramanujan, Funções Geradoras.

ABSTRACT

The objective of this work is to introduce the concept of partitions and prove some partitions identities.

To demonstrate the identities of partitions, the partitions will be represented graphically through Ferrers graphs and thus, using various combinatorial tools transform a class of partition into another.

We will demonstrate Euler's Pentagonal Number Theorem and that the function $p(n)$, which associates each n the number of partitions, is an increasing monotone function, and limited by the Fibonacci number.

We will make a brief introduction to Generating Functions and then prove some identities using them, thus showing another way of approaching the identities of partitions.

Key Words: Partitions, Rogers-Ramanujan Identities, Generating Functions.

INTRODUÇÃO

A Teoria das Partições começou com o Tratado de Euler onde foi introduzido o conceito de partição de um número inteiro. Ela começou como parte da Análise mas rapidamente se tornou parte da Teoria dos Números, depois se tornou parte da Análise Combinatória e recentemente ganhou seu próprio valor. Grandes matemáticos como Gauss, Cauchy, Jacobi, Weierstrass, Sylvester, Heine, Lebesgue, Schur, MacMahon e Ramanujan apresentaram definições e resultados envolvendo partições, contribuindo com o desenvolvimento da teoria.

Começaremos introduzindo o conceito de partição em seguida demonstraremos algumas identidades de partições utilizando gráficos de Ferrers, depois demonstraremos o Teorema do Número Pentagonal de Euler e relacionaremos a partição com os números de Fibonacci. Finalmente utilizando funções geradoras demonstraremos algumas identidades de partição.

MATERIAL E MÉTODOS

Este estudo baseia-se em publicações a respeito do tema e foi desenvolvido através de um estudo dirigido mediante apresentações de seminários semanais. Empregamos argumentos analíticos e combinatórios na demonstração dos resultados.

RESULTADOS

Definição 1.1: Uma partição de um inteiro positivo *n* é uma representação de *n* como soma de inteiros positivos $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ tal que $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$, em que $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_r$. Os termos λ_i são chamados de partes da partição.

Observação: Os números inteiros positivos iniciam-se no 1.

Exemplo 1: As partições dos inteiros *3*, *4*, *5* e *6* são as seguintes:

3	*4*	*5*	*6*
2 + 1	*3 + 1*	*4 + 1*	*5 + 1*
1 + 1 + 1	*2 + 2*	*3 + 2*	*4 + 2*
	2 + 1 + 1	*3 + 1 + 1*	*4 + 1 + 1*
	1 + 1 + 1 + 1	*2 + 2 + 1*	*3 + 3*
		2 + 1 + 1 + 1	*3 + 2 + 1*
		1 + 1 + 1 + 1 + 1	*3 + 1 + 1 + 1*
			2 + 2 + 2
			2 + 2 + 1 + 1
			2 + 1 + 1 + 1 + 1
			1 + 1 + 1 + 1 + 1 + 1

Denotamos por $p(n)$ o número de partições de n. Do exemplo 1 temos que $p(3)=3$, $p(4)=5$, $p(5)=7$ e $p(6)=11$.

Convenção: $p(0)=1$.

Exemplo 2: As partes da partição $3+2+1$ são os números $3,2$ e 1. As partes da partição $4+1+1$ são os números 4 e 1.

Observação: É claro que, numa partição de n, nenhuma parte pode superar n. Neste caso, teríamos uma partição de n cuja soma das partes é maior do que n.

Para ilustrar quão rápido é o crescimento de $p(n)$, listamos alguns valores:

$p(20)=627$

$p(100)=190.569.292$

$p(200)=3.972.999.029.388$.

Temos a seguinte fórmula para calcular $p(n)$:

$$p(n)=\frac{1}{\pi\sqrt{2}}\sum_{k=1}^{\infty}A_k(n)\sqrt{k}\left[\frac{d}{dx}\frac{\sinh\left(\frac{\pi}{x}\left(\frac{2}{3}\left(x-\frac{1}{24}\right)\right)^{1/2}\right)}{\left(x-\frac{1}{24}\right)^{1/2}}\right]_{x=n}$$

em que,

$$A_k(n)=\sum_{0\le h<k,(h,k)=1}\exp\left(\pi i\sum_{j=1}^{k-1}\frac{j}{k}\left(\frac{hj}{k}-\left\lfloor\frac{hj}{k}\right\rfloor-\frac{1}{2}\right)-\frac{2\pi ihn}{k}\right)$$

e $\lfloor x\rfloor=\max\{m\in Z\,|\,m\le x\}$.

Esta fórmula foi resultado do trabalho dos matemáticos S. Ramanujan, G.H. Hardy e H. Rademacher cuja demonstração está na referência 5.

Notação: Denotaremos por $p_k(n)$ o número de partições de n tendo k como a maior parte.

Exemplo 3: Do exemplo 1 temos que, $p_2(3)=1$, $p_3(5)=2$, $p_4(5)=1$, $p_5(6)=1$ e $p_3(6)=3$.

Listamos a seguir os valores de $p_k(6)$, para $k=1,2,3,4,5,6$.

Tabela 1 – Valores para $p_k(6)$, para $k=1,2,3,4,5,6$.

k	1	2	3	4	5	6
$p_k(6)$	1	3	3	2	1	1

Como a maior parte não pode superar n, temos que $p_n(n)=1$ e $p_k(n)=0$ para todo $k>n$.

É claro que $\sum_{k=1}^{n}p_k(n)=p_1(n)+p_2(n)+\cdots+p_n(n)=p(n)$.

Notação: Denotaremos por $q_k(n)$ o número de partições de n com exatamente k partes.

Listamos a seguir os valores de $q_k(6)$, para $k=1,2,3,4,5,6$.

Tabela 2 – Valores de $q_k(6)$, para $k=1,2,3,4,5,6$.

k	1	2	3	4	5	6
$q_k(6)$	1	3	3	2	1	1

Observe que os valores listados para $p_k(6)$ e $q_k(6)$ nas Tabelas 2 e 3 são os mesmos. Este resultado será demonstrado posteriormente.

1.1 Gráficos de Ferrers

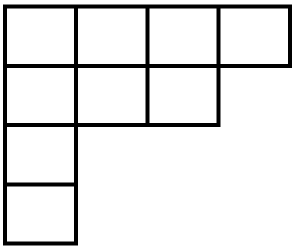
Definição 1.2: As partições podem ser representadas graficamente pelos gráficos de Ferrers ou quadros de Ferrers em que as partes da partição são representadas como linhas de pontos ou quadrados, respectivamente, sempre alinhados à esquerda e em ordem decrescente. Os quadros de Ferrers também são conhecidos como diagrama de Young

Exemplo 4: O gráfico da partição $4+3+1+1$ de 9 é:

Gráficos de Ferrers

• • • •
• • •
•
•

Quadros de Ferrers



Definição 1.3: Dada uma partição qualquer, se trocarmos as linhas com as colunas, ou seja, o que é linha se transforma em coluna e o que é coluna se transforma em linha obteremos uma nova partição chamada de partição conjugada. Chamamos de conjugação a operação que transforma uma partição na sua partição conjugada.

Exemplo 5: Alguns exemplos de partições e suas respectivas partições conjugadas.

Partição	Partição Conjugada
$3+3+1$	$3+2+2$
• • • • • • •	• • • • • • •
$5+2+1$	$3+2+1+1+1$
• • • • • • • •	• • • • • • • •

Observação: Uma partição conjugada não é necessariamente distinta da partição original.

Exemplo 6: Partições idênticas às suas partições conjugada.

Partição	Partição Conjugada
$3+2+1$	$3+2+1$
• • •	• • •
• •	• •
•	•
$4+2+1+1$	$4+2+1+1$
• • • •	• • • •
• •	• •
•	•
•	•

Teorema 1.1: O número $p_k(n)$ de partições de n tendo k como a maior parte é igual ao número $q_k(n)$ de partições de n com exatamente k partes, isto é, $p_k(n) = q_k(n)$.

Demonstração: As linhas do primeiro gráfico se tornam as colunas do segundo gráfico através da conjugação e vice-versa. Assim, dada uma partição de n em k partes, ao fazer a conjugação, a partição resultante será uma partição de n em que a maior parte é k. Inversamente, dada uma partição de n cuja maior parte é k, ao fazer a conjugação, teremos uma partição de n em k partes, o que conclui a demonstração. ■

Notação: Denotaremos por $P_k(n)$ o número partições de n com partes menores do que ou iguais a k, e $Q_k(n)$ o número de partições de n com, no máximo, k partes.

Corolário: O número de partições de n com partes menores do que ou iguais a k é igual ao número de partições de n com, no máximo k partes, isto é, $P_k(n) = Q_k(n)$.

Demonstração: A operação de conjugação transforma cada elemento contado por $P_k(n)$ em um único elemento contado por $Q_k(n)$, isto pela mesma razão apresentada pelo teorema anterior. ■

Exemplo 7: Do Exemplo 1, temos que: $P_3(6) = 7 = Q_3(6)$.

Notação: Denotaremos por $F(n)$ o número de partições de n em que cada parte aparece pelo menos duas vezes e por $G(n)$ o número de partições de n em partes maiores do que 1 e tais que inteiros consecutivos não aparecem como partes.

Teorema 1.2: $F(n) = G(n)$ para todo inteiro positivo n.

Demonstração: Uma vez tomando o conjugado de uma partição enumerada por $F(n)$, teremos exatamente um dos elementos enumerados por $G(n)$, pois o fato de cada parte aparecer pelo menos duas vezes implica que, na partição conjugada, a menor parte será pelo menos 2 e que inteiros consecutivos não poderão ocorrer como partes. ■

Exemplo 8: Para $n = 4$.

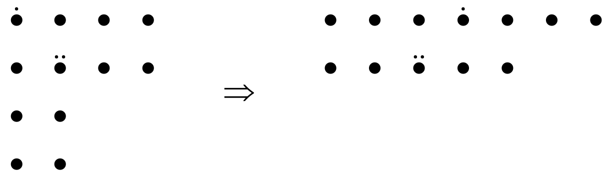
4
$3+1$
$2+2$
$2+1+1$
$1+1+1+1$

Veja que: $F(4) = 2 = G(4)$.

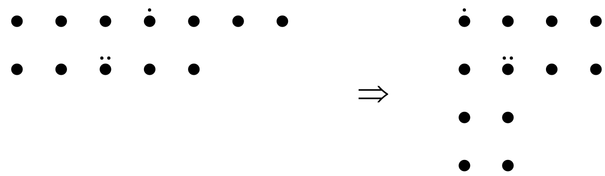
Definição 1.4: Se a representação gráfica de uma partição for igual a representação gráfica da partição conjugada então chamaremos esta partição de auto conjugada.

Teorema 1.3: O número de partições de n auto conjugadas é igual ao número de partições de n em partes ímpares e distintas.

Demonstração: Tomando uma partição de n auto conjugada, pegamos a primeira linha junto com a primeira coluna e criamos uma nova partição com a primeira linha formada por estes pontos. Procedendo da mesma forma com o que sobrou da segunda linha e da segunda coluna obteremos a segunda linha da nova partição. Fazendo isso com as demais linhas e suas respectivas colunas obteremos uma partição de n. Como as partições auto conjugadas são simétricas em relação à diagonal principal então as linhas criadas na nova partição terão duas vezes o tamanho da linha original menos um pois a linha e a coluna da partição original tem a mesma quantidade de pontos e um ponto em comum. Assim, as linhas da nova partição terão um número ímpar de pontos e são distintas.



Inversamente, tomando uma partição de n em partes ímpares distintas, pegamos o ponto central da primeira linha e a dobramos em forma de "L" nesse ponto. Formando assim a primeira linha e coluna da nova partição. Procedendo de forma análoga com as demais linhas e encaixando os novos "L"s conforme a figura abaixo obteremos um gráfico de Ferrers auto conjugado. O que demonstra o teorema.



■

Exemplo 9: Partições do número 4.

Partição original	Partição conjugada
4 • • • •	$1+1+1+1$ • • • •
$3+1$ • • • •	$2+1+1$ • • • •
$2+2$ • • • •	$2+2$ • • • •
$2+1+1$ • • • •	$3+1$ • • • •
$1+1+1+1$ • • • •	4 • • • •

Veja que $2+2$ é a única partição auto conjugada e que $3+1$ é a única partição em partes ímpares distintas. Portanto o número de partições de 4 auto conjugadas é igual ao número de partições de 4 em partes ímpares e distintas.

Definição 1.5: Denotaremos por $D^e(n)$ o número de partições de n em um número par de partes distintas.

Exemplo 10: Número de partições de 4 em um número par de partes distintas.

Todas as partições do número 4 são:

$$\begin{array}{l} 4 \\ 3+1 \\ 2+2 \\ 2+1+1 \\ 1+1+1+1 \end{array}$$

Portanto, $D^e(4)=1$.

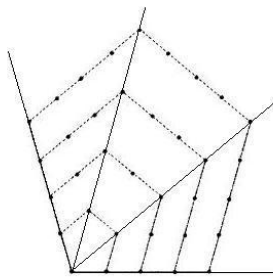
Definição 1.6: Denotaremos por $D^o(n)$ o número de partições de n em um número ímpar de partes distintas.

Exemplo 11: Número de partições de 4 em um número ímpar de partes distintas.

$D^o(4)=1$.

1.2 Teorema do Número Pentagonal

Um número pentagonal de ordem n é o número de pontos contidos na figura formada por n pentágonos regulares de lados inteiros com um vértice comum a todos e cada lado do k-ésimo pentágono possui $k+1$ pontos equidistantes. O número de pontos da figura abaixo representa o número pentagonal de ordem 4.



O número pentagonal de ordem k será:

$4k+1$ (número de pontos contidos nas semirretas da figura acima) $+\dfrac{3(k\text{-}1)k}{2}$

(número de pontos não contidos nas retas da figura) $=\dfrac{8k+2+3k^2-3k}{2}=\dfrac{3k^2+5k+2}{2}$

$=\dfrac{(k+1)(3k+2)}{2}$.

Fazendo a mudança de variável $n=k+1$, teremos $\dfrac{(k+1)(3k+2)}{2}=\dfrac{n(3(n-1)+2)}{2}=\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Assim, o $n+1$-ésimo número pentagonal será: $\dfrac{n(3n-1)}{2}$.

Teorema 1.4: Para qualquer inteiro positivo n temos:

$$D^e(n)-D^0(n)=\begin{cases}(-1)^t & \text{se } n=\dfrac{t(3t\pm1)}{2}\\ 0 & \text{caso contrário}\end{cases}$$

Demonstração: Vamos considerar uma partição qualquer de n em partes distintas e sua representação gráfica. Denotaremos por A_1 o último elemento da direita da linha superior, se na segunda linha o último elemento da direita estiver exatamente na coluna contígua à esquerda de A_1 e denotaremos então este elemento por A_2, caso contrário não daremos nome a ele. Se tivermos A_2, então passaremos a terceira linha e, se novamente, o último elemento da direita estiver exatamente na coluna contígua à esquerda de A_2, denotaremos este elemento por A_3, caso contrário não daremos nome a ele. Continuamos este processo até o momento em que algum elemento não receba nome. Seja A_t o último elemento desta sequência. Denominamos, também, $B_1, B_2, \ldots, B_s$ os elementos da última linha (da esquerda para a direita). Como exemplo, teremos assim a seguinte representação da partição $7+6+4+3$.

$$\begin{array}{llllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_1\\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_2 & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \bullet & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & & & & & \\
B_1 & B_2 & B_3 & & & & &
\end{array}$$

Temos então A_t, B_s com $t \geq 1$ e $s \geq 1$, e podemos separar todas as partições de n em partes distintas com esta notação em essencialmente três classes distintas:

Classe 1: $t > s$ ou ($t = s$ e $A_t \neq B_s$).

Classe 2: $t < s-1$ ou ($t = s-1$e $A_t \neq B_s$).

Classe 3: $A_t = B_s$ com $t = s$ ou $t = s-1$.

Na Classe 1 transferimos cada ponto B_i para a direita do elemento A_i. Quando aplicamos essa transformação numa partição com $t > s$ obteremos uma nova partição em que o último A_i será B_s, ou seja, nessa nova partição teremos $A_1, A_2, \ldots, A_s$. Como nessa transformação retiramos a última linha da partição original com partes distintas temos que na nova partição a última linha terá $s+m$ elementos com $m \geq 1$. Daí, teremos $A_1, A_2, \ldots, A_s$ e $B_1, B_2, \ldots, B_{s+m}$.

Assim, $(s+m)-s = m \geq 1 \Rightarrow (s+m)-s \geq 1 \Rightarrow (s+m)-1 \geq s$, considerando na nova partição $s = \bar{t}$ e $s+m = \bar{s}$, teremos então $\bar{s}-1 \geq \bar{t}$.

Portanto teremos dois casos, o primeiro quando $\bar{s}-1 > \bar{t}$ e o segundo quando $\bar{s}-1 = \bar{t}$. É claro que, no primeiro caso, a nova partição pertence à Classe 2. No segundo caso, como tínhamos $t > s$, existem $t-s$ linhas abaixo da linha que contém o ponto A_s. Assim, $A_{\bar{t}} \neq B_{\bar{s}}$ e essa nova partição pertence à Classe 2.

Quando aplicamos essa transformação para $t = s$ e $A_t \neq B_s$, obtemos uma nova partição com $A_1, A_2, \ldots, A_s$ e $B_1, B_2, \ldots, B_{s+m}$, $m \geq 1$, pois retiramos a última linha da partição original com partes distintas.

Exemplo 12:

$t > s$

1º Caso:

●●●●		●●●●●
●●●	$\Rightarrow$	●●●
●		
A_2, B_1		A_1, B_3

2º Caso:

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet \end{array}$$

A_4, B_2 $\qquad\qquad$ A_2, B_3

$t = s$ e $A_t \neq B_s$

$$\begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{l} \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \\ \bullet\bullet\bullet\bullet\bullet \end{array}$$

A_2, B_2 $\qquad\qquad$ A_2, B_5

Naturalmente, se fizermos na Classe 2 o inverso da transformação feita na Classe 1 obteremos um elemento da Classe 1, pois cada elemento da Classe 2 é resultante da transformação de um elemento da Classe 1. Na Classe 3 não efetuamos nenhuma mudança.

Note que as transformações aplicadas aos elementos das classes 1 e 2 diminuem ou aumentam em uma parte a partição inicial. Assim, temos que estas transformações levam as partições de n em número par de partes distintas das classes 1 e 2 (respectivamente) em partições de n em um número ímpar de partes distintas das classes 2 e 1 (respectivamente), e vice-versa. Temos assim uma bijeção entre as partições de n em um número par de partes distintas e as partições de n em um número ímpar de partes distintas pertencentes às classes 1 e 2. Se existe uma partição de n em partes distintas da Classe 3, teremos que ela é única.

Assim, se n possui uma partição da Classe 3 teremos:

$$\begin{array}{lllllllll}
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & \bullet & A_1 \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & \bullet & A_2 & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & \bullet & A_3 & & \\
\vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & & \\
\bullet & \bullet & \bullet & \cdots & \bullet & A_t & & & \\
B_1 & B_2 & B_3 & \cdots & B_s & & & &
\end{array}$$

Se $t = s$ então $n = \dfrac{t(3t-1)}{2}$.

Se $t = s-1$ então $n = \dfrac{t(3t+1)}{2}$.

Portanto, $n = \dfrac{t(3t \pm 1)}{2}$.

Se t for um número par, temos que a partição de n da Classe 3 terá um número par de partes distintas e se t for ímpar, teremos uma partição de n da Classe 3 com um número ímpar de partes distintas.

Assim,

$$D^e(n) - D^0(n) = \begin{cases} (-1)^t & \text{se } \ n = \dfrac{t(3t \pm 1)}{2} \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases}$$

■

Exemplo 13: Note que,

$D^e(7) - D^o(7) = 3 - 2 = 1$ e $7 = \dfrac{2(3 \cdot 2 + 1)}{2}$, isto é, $t = 2$.

$D^e(10) - D^o(10) = 5 - 5 = 0$, pois não existe $t \in \mathbb{N}$ tal que $\dfrac{t(3t \pm 1)}{2} = 10$.

$D^e(12) - D^o(12) = 7 - 8 = -1$ e $12 = \dfrac{3(3 \cdot 3 - 1)}{2}$, isto é, $t = 3$.

Este teorema recebe o nome de Teorema dos Números Pentagonais, devido ao fato dos números pentagonais serem da forma $\dfrac{t(3t - 1)}{2}$.

2.3 Limite Superior para $p(n)$

Notação: Usaremos $p(n/[condição])$ para representar o número de partições de n satisfazendo determinada condição.

Provemos que $p(n) > p(n-1)$ para todo $n > 2$.

Compare as partições de 3 e 4:

$n = 3$

•	• •	• • •
•	•	
•		

$n=4$

• • • •	• • • •	• • • •	• • • •	• • • •

Observe que ao adicionarmos um único ponto em uma nova linha no final do gráfico de Ferrer da partição de $n-1$, obtemos uma partição de n. Da mesma forma, ao retiramos da partição de n a última linha com um único ponto obtemos uma partição de $n-1$. Este processo é injetor, pois ao adicionar um único ponto em uma nova linha em partições distintas não alteraremos as partes distintas, portanto as partições continuam distintas. Este processo também é sobrejetor, pois não existe uma partição de n com um único ponto na última linha tal que ao removermos este ponto não obtenhamos uma partição de $n-1$. Portanto, este processo é uma bijeção.

Daí, $p(n-1) = p(n/\text{ o número "1" é parte})$ e consequentemente, $p(n) = p(n-1) + p(n/\text{ o número de "1" não é parte})$ para todo $n>2$. Observe que $p(n/\text{ o número "1" não é parte}) > 0$, pois para todo $n>1$ temos a partição $\underbrace{\bullet\bullet\cdots\bullet\bullet}_{n}$ que não tem 1 como parte.

Portanto, $p(n) > p(n-1)$ para todo $n>2$ e ,ou seja, $p(n)$ é uma função estritamente crescente.

Definição 1.7: Definimos os números de Fibonacci $F_0, F_1, \ldots$ como

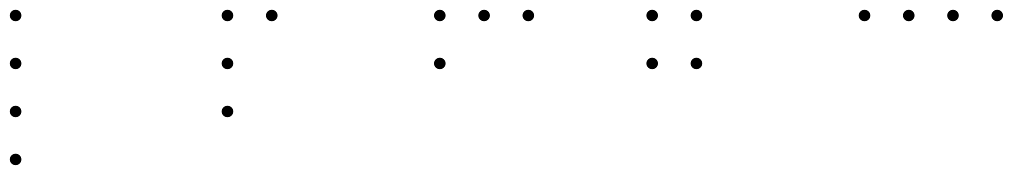
$$\begin{cases} F_1 = 1 \;\; e \;\; F_2 = 1 \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \;\; n>2 \end{cases}$$

Vamos partir da equação $p(n) = p(n-1) + p(n/\text{ o número de "1" não é parte})$ para todo $n>2$, depois vamos estabelecer uma relação entre $p(n/\text{ o número de "1" não é parte})$ e $p(n-2)$, finalmente compararemos a recorrência dos números de Fibonacci com a desigualdade obtida da relação entre $p(n/\text{ o número de "1" não é parte})$ e $p(n-2)$.

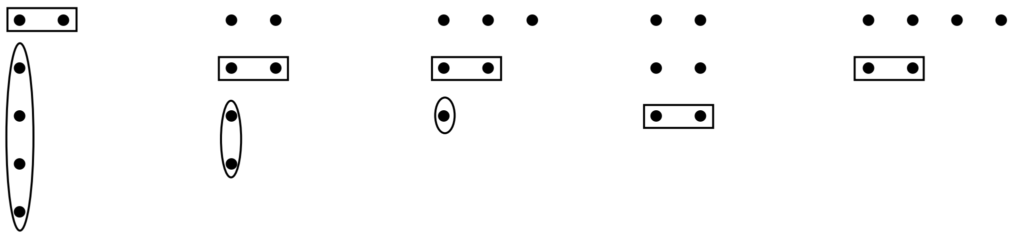
Note que $p(n-2) = p(n/\text{ o "2" é parte pelo menos uma vez})$ pois para cada partição de $n-2$, podemos obter uma partição de n adicionando uma parte "2" no gráfico de Ferrers. Da mesma forma, a cada partição de n que contém ao menos uma parte "2" podemos obter uma partição de $n-2$ removendo tal parte "2". Este processo é uma bijeção, pelo mesmo raciocínio utilizado na identidade anterior.

Observe que podemos transformar qualquer partição com nenhuma parte de tamanho "1" em uma única partição da qual o "2" é parte pelo menos uma vez, basta cortar a menor parte, que é pelo menos 2, em uma parte de tamanho "2" e "0" (zero) ou mais partes de tamanho "1".

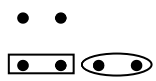
Por exemplo, a inserção de uma parte de tamanho "2" em uma partição de $(n-2)$ em que $n=6$, passa de:



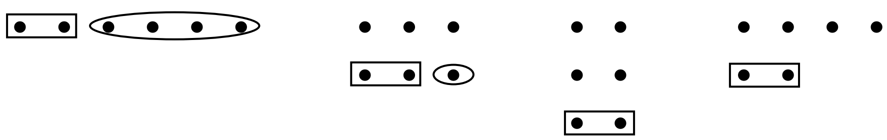
para, respectivamente:



Nem sempre é possível unir todas as partes de tamanho "1" na última parte de tamanho "2", por exemplo no segundo gráfico, pois ao fazermos isto obtemos a última linha maior que a primeira conforme o gráfico abaixo,



o que não resulta numa partição.
O processo de unir todas as partes de tamanho "1" na última parte de tamanho "2" nos dará as quatro partições de 6 com nenhuma parte de tamanho "1":



Este argumento nos mostra que:
$p(n-2) = p(n/$ o número "1" não é parte$) + p(n-2/$ a menor parte de tamanho diferente de 1 é menor que $(2+$ o número de partes de tamanho $1))$.

Veja que o último termo é sempre não negativo. Portanto, combinado com a equação $p(n) = p(n-1) + p(n/$ o número "1" não é parte$)$ para todo $n > 2$, obtemos uma desigualdade parecida com a de Fibonacci:

$p(n) \le p(n-1) + p(n-2)$ para $n > 2$.

Teorema 1.5: Para todo $n \ge 0$, a função partição $p(n)$ é menor do que ou igual ao $(n+1)$-ésimo número de Fibonacci, ou seja, $p(n) \le F_{n+1}$.

Demonstração:

Como $p(0) = F_1 = p(1) = F_2 = 1$ então a proposição vale para $n = 0$ e $n = 1$.

Suponhamos que $p(n) \le F_{n+1}$ todo $n < k$, para algum $k \ge 2$. Então,

$p(k) \le p(k-1) + p(k-2)$, pela desigualdade anterior

$\le F_k + F_{k-1} = F_{k+1}$, pela hipótese de indução e pela definição de F_k.

Assim, $p(n) \le F_{n+1}$ para todo $n \ge 0$. ■

2 FUNÇÕES GERADORAS

Definição 2.1: Se $f(x) = a_0 f_0(x) + a_1 f_1(x) + a_2 f_2(x) + \cdots$ então $f(x)$ é uma função geradora para a sequência (a_n), $a_n \in \mathbb{R}$, em relação à sequência de funções $(f_n(x))$.

.

Exemplo 14: A função $f(x) = 1\cos(1\cdot\pi) + 3\cos(2\cdot\pi) + 5\cos(3\cdot\pi) + 7\cos(4\cdot\pi) + \cdots$ é a função geradora da sequência $(1,3,5,\ldots,2n+1,\ldots)$, relativa à sequência de funções $(\cos(1\cdot\pi), \cos(2\cdot\pi), \cos(3\cdot\pi), \ldots, \cos(n\cdot\pi), \ldots)$.

Definição 2.2: Uma função geradora é dita função geradora ordinária se $f_k(x) = x^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$. Nesse caso, $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Exemplos :

1. A função $f(x) = (1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots + \binom{n}{n}x^n$ é a função geradora ordinária da sequência $(a_k) = \left(\binom{n}{k}\right)$, $k = 0,1,2,3,\ldots$.

2. A função $f(x) = \dfrac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \cdots$ é a função geradora ordinária da sequência $(1,1,1,1,\ldots)$.

Propriedade (Produto de Convolução): Dadas duas funções $f(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots$ e $g(x)=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$, então:

$$f(x)g(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n+\cdots;$$

em que

$$c_n=a_0b_n+a_1b_{n-1}+a_2b_{n-2}+\cdots+a_nb_0.$$

Propriedade: Se $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$, então, $t(x)=\frac{f(x)}{1-x}$ é a função geradora para a soma parcial dos coeficientes $a_r's$, isto é:

$$t(x)=a_0+(a_0+a_1)x+(a_0+a_1+a_2)x^2+\cdots+\left(\sum_{n=0}^{r}a_n\right)x^r+\cdots.$$

Demonstração: Tomando $g(x)=\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+\cdots$ e aplicando o Produto de Convolução obtemos o resultado. ■

Ao tomar o produto,

$$(1+x)(1+x^3)(1+x^5)(1+x^7)\cdots(1+x^{2k+1})\cdots=1+x+x^3+x^4+x^5+x^6+x^7+$$
$$+2x^8+2x^9+2x^{10}+2x^{11}+3x^{12}+3x^{14}+3x^{15}+\cdots.$$

vemos que o coeficiente de x^6 é igual a 1, pois é o total de maneiras de se escrever 6 como soma de ímpares distintos, ou seja, $6=5+1$. Note que a potência de x^6 aparece como o produto de x^5 por x^1. Observe também que o coeficiente de x^{11} é igual ao número de maneiras de se escrever 11 como soma de ímpares distintos, ou seja, 2. Além disso, a potência x^{11} aparece como o produto das potências x^{11} ou x^7, x^3 e x^1. O coeficiente de x^{14} é igual a 3. De fato, somente se obtém x^{14} quando se multiplica x x^{13}, x^3x^{11} e x^5x^9. Interpretando-se este produto desta forma, vemos que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})=\sum_{k=0}^{\infty}d_i(n)x^n$$

em que $d_i(n)$ é o número de partições de n, em partes ímpares distintas, isto é, que

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k+1})$$

é a função geradora ordinária para o $d_i(n)$.

Se estivermos interessados somente nas partições de n em partes distintas devemos tomar o seguinte produto:

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^n)\cdots$$

Como na partição de um número menor do que ou igual a n nunca podemos ter partes superiores a n, se tomarmos o produto

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^n)$$

teremos a função geradora ordinária para as partições de todos os números menores ou iguais a n em partes distintas.

Exemplo 16: Se tomarmos o produto $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^{10})$, obteremos uma função geradora ordinária para as partições dos números menores ou iguais a 10 em partes distintas. Como,

$$(1+x)(1+x^2)(1+x^3)(1+x^4)\cdots(1+x^{10}) = 1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+$$
$$+4x^6+5x^7+6x^8+8x^9+10x^{10}+\cdots$$

podemos observar, por exemplo, que, sendo o coeficiente de x^7 igual a 5, existem 5 partições de 7 em partes distintas, que são: 7, $6+1$, $5+2$, $4+3$ e $4+2+1$.

Das observações que acabamos de fazer pode-se concluir que a função geradora para as partições de n em partes distintas é dada pelo produto infinito

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^k)\ .$$

Utilizando-se do mesmo argumento anterior é fácil ver que a função geradora para as partições de n em partes pares e distintas é dada por

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k})$$

e que a função geradora ordinária para as partições de n em partes que são quadrados distintos é igual a

$$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{k^2})\ .$$

Como,

$$(1+x)(1+x^4)(1+x^9)(1+x^{16})\cdots =$$
$$=1+x+x^4+x^5+x^9+x^{10}+x^{13}+x^{14}+x^{16}+\cdots$$

concluímos que, dentre os números de 1 a 16, somente 8 possuem partições cujas partes são quadrados distintos.

Teorema 2.1: Para $|x|<1$, temos

$$F(x)=\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m}=\sum_{n=0}^{\infty}p(n)x^n ,$$

em que $p(0)=1$.

Demonstração: Sabemos que,

$$\frac{1}{1-x}=1+x+x^2+x^3+\cdots,$$

para $|x|<1$.

Se cada fator de $F(x)$ for expandido numa série geométrica, temos

$$\prod_{m=1}^{\infty}\frac{1}{1-x^m}=(1+x+x^2+\cdots)(1+x^2+x^4+\cdots)(1+x^3+x^6+\cdots)\cdots$$
$$=(1+x+x^{1+1}+\cdots)(1+x^2+x^{2+2}+\cdots)(1+x^3+x^{3+3}+\cdots)\cdots.$$

Agora, vamos proceder multiplicando o lado direito da igualdade acima tratando cada série como um polinômio. Agrupando cada potência de x, obtemos uma série da forma

$$1+\sum_{n=0}^{\infty}w(k)x^k ,$$

em que $w(k)$ é o coeficiente de x^k. Para provar o teorema, devemos mostrar que $w(k)=p(k)$. Suponha que tomemos o termo x^{k_1} da primeira série, x^{2k_2} da segunda, x^{3k_3} da terceira e assim por diante, até x^{mk_m} da m-ésima, em que cada $k_i\geq 0$. O produto desses termos é

$$x^{k_1}x^{2k_2}x^{3k_3}\cdots x^{mk_m}=x^k \Rightarrow k=k_1+2k_2+3k_3+\cdots+mk_m,$$

e pode ser escrito como

$$k=\underbrace{(1+1+\cdots1)}_{k_1\text{ termos}}+\underbrace{(2+2+\cdots2)}_{k_2\text{ termos}}+\cdots+\underbrace{(m+m+\cdots m)}_{k_m\text{ termos}}.$$

Veja que essa é uma partição de k em partes positivas. Logo, cada partição de k produz um termo x^k, e portanto, $w(k)=p(k)$. ■

Exemplo 17: O número 5 surge no produtório dos seguintes modos

$$1\cdot1\cdot1\cdot1\cdot x^5\cdot1\cdots,\ \ x^1\cdot1\cdot1\cdot x^4\cdot1\cdots,\ \ 1\cdot x^2\cdot x^3\cdot1\cdots,$$
$$x^{1+1}\cdot1\cdot x^3\cdot1\cdots,\ \ x^1\cdot x^{2+2}\cdot1\cdots,\ \ x^{1+1+1}\cdot x^2\cdot1\cdots,$$
$$x^{1+1+1+1+1}\cdot1\cdots.$$

Somente multiplicando-se esses termos podemos obter x^5; observe que os expoentes de x geram as partições de 5. Como há uma correspondência biunívoca entre os coeficientes de x^k no produto infinito e o número de partições de k, temos o resultado.
Utilizando um raciocínio análogo podemos obter as seguintes funções geradoras.

Função Geradora	Para a sequência das partições de n em partes que são:
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k+1})}$	ímpares
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{2k})}$	pares
$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{2k})$	pares distintos
$\prod_{k=0}^{\infty}(1+x^{k^3})$	cubos distintos
$\prod_{k=0}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{k^3})}$	cubos
$\prod_{p\,primo}^{\infty}\frac{1}{(1-x^{p})}$	primos

Assim, a função geradora $f(q)$, para uma partição com restrição $p(n/[condição]) = \tilde{p}(n)$, será um produto de termos das seguintes formas:

$$\frac{1}{1-q^a}\ \text{ou}\ 1+q^a.$$

Como estamos interessados apenas nos coeficientes da série, não iremos nos preocupar com a convergência de tais séries, embora saibamos que elas convergem quando $|q|<1$.

Da afirmação anterior, temos relações do tipo

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n) q^n = f(q)$$

em que podemos calcular os coeficientes $\tilde{p}(n)$ através da expansão de f em série de potências de q.

Definição 2.3: Denotamos por $p(S,n)$ o número de partições de n em que as partes pertencem ao conjunto de inteiros positivos S.

Teorema 2.2: A função geradora para $p(S,n)$ em que $S=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_s\}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i=1,2,3,4,\ldots,s$ e $|q|<1$ será:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(S,n) q^n = \prod_{i=1}^{s} \frac{1}{1-q^{a_i}}.$$

Demonstração: Considerando que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n) q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^{a_i}},$$

como

$$\frac{1}{1-q^{a_i}} = 1+q^{a_i}+q^{2a_i}+q^{3a_i}+\cdots+q^{ka_i}+\cdots$$

temos que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tilde{p}(n) q^n = \prod_{i=1}^{\infty} \left(1+q^{a_i}+q^{2a_i}+q^{3a_i}+\cdots+q^{ka_i}+\cdots\right)$$

e daí o coeficiente de q^n na expansão do produto em série de potência em q será o número de maneiras possíveis de gerar n como soma de $a_1,a_2,a_3,\ldots,a_i$ em que $a_i>0$ para qualquer $i \in \mathbb{N}$. Note que o termo q^{ka_i} indica uma contribuição de k a_i's como partes de n. Assim, se quisermos determinar a função geradora para as partições em que as partes de n pertençam ao conjunto $S=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_s\}$ basta fazer o produto de fatores da forma $\frac{1}{1-q^{a_i}}$ para $i=1,2,3,4,\ldots,s$. ■

Definição 2.4: Denotamos por $p^d(S,n)$ o número de partições de n em partes distintas e pertencentes ao conjunto de inteiros positivos S.

Teorema 2.3: A função geradora para $p^d(S,n)$ em que $S=\{a_1,a_2,a_3,\ldots,a_s\}$, $a_i \in \mathbb{N}$, $i=1,2,3,4,\ldots,s$ e $|q|<1$ é:

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^d(S,n)q^n = \prod_{i=1}^{s}(1+q^{a_i}).$$

Demonstração: Se considerarmos o produto da forma

$$\prod_{i=1}^{\infty}(1+q^{a_i})$$

o coeficiente de q^n será o número de maneiras de obter n como soma de a_i's distintos, pois cada a_i irá aparecer no máximo uma única vez como parte de cada partição de n.

■

Exemplo 18: Tomando $S=\{1,2,\ldots,10\}$, temos pelo teorema anterior que

$$\sum_{n=0}^{\infty} p^d(S,n)q^n = \prod_{i=1}^{10}(1+q^{a_i}) = (1+q)(1+q^2)(1+q^3)(1+q^4)\cdots(1+q^{10})$$
$$=1+q+q^2+2q^3+2q^4+3q^5+4q^6+5q^7+6q^8+8q^9+10q^{10}+\cdots$$

Particularmente, podemos observar que, sendo o coeficiente de q^7 igual a 5, existem 5 partições de 7 em partes distintas, que são: 7, $6+1$, $5+2$, $4+3$ e $4+2+1$.

Teorema 2.4: A função geradora para $p(n)$ é:

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n = \prod_{i=1}^{\infty}\frac{1}{1-q^i}.$$

Demonstração: Note que se considerarmos, no Teorema 2.2, $S=\{1,2,3,4,\ldots,k\}$ temos que

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q^i}$$

será a função geradora para $\{p(1), p(2),\ldots, p(k)\}$, e se $n>k$ o coeficiente de q^n não irá representar $p(n)$, pois tal produto não estaria considerando partes maiores que k.

Para fazer a passagem de

$$\prod_{i=1}^{k}\frac{1}{1-q^i}$$

para um produto infinito, necessitamos saber se tal produto existe, assim estaremos garantindo que

$$\prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1-q^i}$$

será a função geradora de $p(n)$.

Seja

$$p_k(q) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-q^i}.$$

Para $0 < q < 1$ temos que $\frac{1}{1-q^i} > 1$ para qualquer $i \in \mathbb{N}^*$. Assim, $p_k(q) > 1$ para qualquer $k \in \mathbb{N}^*$ e, portanto $\{p_k(q)\}$ define uma sequência crescente.

Portanto, para mostrarmos que $\{p_k(q)\}$ possui limite, precisamos provar que ela é limitada superiormente. Para mostrar a existência deste limite para a sequência $\{p_k(q)\}$ usaremos a seguinte propriedade.

Propriedade: Para $a > 0$ temos:

$$1 + a < e^a.$$

Demonstração: Sabemos que para todo $x > 0$, temos que $e^x > 1$. Assim,

$\int_0^x e^t\,dt > \int_0^x dt \quad \Rightarrow \quad \left[e^t\right]_0^x > [t]_0^x \quad \Rightarrow e^x - 1 > x \quad \Rightarrow \quad 1 + x < e^x$, para todo $x > 0$.

Suponha agora que $m \in IN^*$ e que $0 < q < 1$. Então,

$$q^m < q$$

e daí

$$\frac{1}{1-q^m} = 1 + \frac{q^m}{1-q^m} < 1 + \frac{q^m}{1-q} < e^{\frac{q^m}{1-q}}.$$

pela propriedade anterior.

Segue que

$$p_k(q) = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1-q^i} < \prod_{i=1}^{k} e^{\frac{q^i}{1-q}} = e^{\frac{\left(q+q^2+q^3+\cdots+q^k\right)}{1-q}} = e^{\frac{q\left(1-q^k\right)}{(1-q)^2}} < e^{\frac{q}{(1-q)^2}}.$$

Daí, a sequência $\{p_k(q)\}$ é limitada superiormente e, portanto ela possui limite.

Isto implica que esta série

$$\sum_{n=1}^{\infty} p(n)q^n$$

converge para $0 < q < 1$. Como o intervalo de convergência de uma série de potência é centrada em 0, isto implica que esta série converge para $|q| < 1$. ■

CONCLUSÃO

Neste trabalho observamos a evolução do nível de complexidade deste tema, começando com definições simples e chegando às identidades que possuem uma demonstração elaborada.

Representamos as partições através do gráfico de Ferrers para demonstrar algumas identidades de forma combinatória. Essas demonstrações são difíceis de serem encontradas, mas de fácil compreensão.

Introduzimos as Funções Geradoras para demonstrar de forma analítica algumas identidades, mostrando assim, outra forma de abordar as identidades de partições.

Além disso, os resultados aqui apresentados mostraram a importante contribuição de grandes matemáticos tais como Euler, Gauss, Cauchy, Jacobi, Weierstrass, Sylvester, Heine, Lebesgue, Schur, MacMahon e Ramanujan no desenvolvimento da teoria das partições.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MUCELIN, C. Demonstrações bijetivas em partições. Dissertação (Mestrado em Matemática) - IMECC-UNICAMP, 2011. 55p.

[2] SAMPAIO, C. A. A. Funções geradoras e aplicações em partições. Dissertação (Mestrado em Matemática) - IMECC-UNICAMP, 1998. 92p.

[3] SANTOS, J. P. O. Introdução à teoria dos números. Rio de Janeiro: Impa, 2007. 198p.

[4] SANTOS, J. P. O.; SILVA, R. Aspectos combinatórios da teoria aditiva dos números. In: COLÓQUIO DE MATEMÁTICA DA REGIÃO SUL, 2012, Londrina. Anais SBM: SU-1.03. 93p.

[5] STABEL, E. C. A fórmula de Hardy-Ramanujan-Rademacher das partições de um inteiro positivo. Dissertação (Mestrado no Instituto de Matemática) – UFRGS, 2007. 29p.