

Movimentos com Trajetória no Vácuo e sob Resistência: Aplicações do Cálculo Diferencial e Integral

Pedro Henrique Aquino Barra¹ Fábio José Bertoloto²

Resumo: Dado um objeto de massa unitária será verificado, matematicamente, que ao ser lançado partindo da mesma origem, no vácuo ou sob algum tipo de resistência, as respectivas velocidades iniciais v_0 e v_0^R devem satisfazer a desigualdade $v_0 < v_0^R$ para que, em ambos os lançamentos, o ponto de alcance seja o mesmo. Fisicamente, isto é esperado, mas, matematicamente, veremos que este fato não é imediato. Será provado também, matematicamente, que dado o gráfico de três trajetórias, sendo $p_0(x)$ e $p_1(x)$ trajetórias sem resistência e $f(x)$ uma trajetória com resistência, que se $p_0(x)$ tiver o mesmo ângulo de lançamento de $f(x)$ e $p_1(x)$ o mesmo ângulo de impacto de $f(x)$, o gráfico que representa a trajetória com resistência estará entre os outros dois gráficos, no sentido que $p_0(x) < f(x)$ e $p_1(x) > f(x)$, para $0 < x < L$, sendo $x = L$ o alcance das curvas.

Palavras-Chave: Lançamentos no Vácuo; Lançamentos sob Resistência; Equações Diferenciais; Teoremas do Valor Médio e de Rolle.

Abstract: In this work we have an opportunity to see some applications of differential and integral calculus. Here we consider two types of launches of the same projectile: from the origin in to a vacuum and from the origin considering some kind of resistance. In both cases, we consider the same impact point. We show in this article a physically obvious fact: the initial velocity (v_0) in the vacuum and the initial velocity of the trajectory with resistance (v_0^R) must satisfy: $v_0 < v_0^R$. We also compare the resisted trajectory, $f(x)$, with the other two trajectories having the same launch and impact points, which take place in a vacuum and hence are parabolic. One parabolic trajectory, which we call $p_0(x)$, has the same launch angle as the resisted shot; the other parabolic trajectory, $p_1(x)$, has the same impact angle as the resisted trajectory. We have the following: the resisted trajectory lies above the parabolic trajectory $p_0(x)$ and below the parabolic trajectory $p_1(x)$. In other words, $p_0(x) < f(x)$ and $p_1(x) > f(x)$, for $0 < x < L$, where $x = L$ occurs in the impact point.

Keywords: Trajectories in a Vacuum; Trajectory with Resistance; Differential Equations; Mean Value Theorem; Rolle's Theorem.

¹Faculdade de Engenharia Elétrica - UFU - Av. João Naves de Ávila, 2160, Uberlândia-MG, 38400-902. E-mail: pedrobarra@eel.ufu.br

²Faculdade de Matemática - UFU - Av. João Naves de Ávila, 2121, Uberlândia-MG, 38400-100. E-mail: bertoloto@famat.ufu.br

1 Introdução

Dado um objeto de massa unitária será verificado, matematicamente, que ao ser lançado, partindo da mesma origem, no vácuo e sob algum tipo de resistência (do ar, mais comumente) as respectivas velocidades iniciais v_0 e v_0^R devem satisfazer a desigualdade $v_0 < v_0^R$ para que, em ambos os lançamentos, o ponto de alcance seja o mesmo. Condições estas que eram, de certa forma, esperadas. Entretanto, ao se traduzir este problema para a linguagem matemática, veremos que tal demonstração não é imediata. Tendo isto em mente, se verá também, de forma matemática, que dado o gráfico de três trajetórias, sendo $p_0(x)$ e $p_1(x)$ trajetórias sem resistência e $f(x)$ uma trajetória com resistência, que se $p_0(x)$ tiver o mesmo ângulo de lançamento de $f(x)$ e $p_1(x)$ o mesmo ângulo de impacto de $f(x)$, o gráfico que representa a trajetória com resistência estará envolvido pelos outros dois gráficos, ou ainda, $p_0(x) < f(x)$ e $p_1(x) > f(x)$, para $0 < x < L$, em que $x = L$ é o alcance das curvas. Ressaltamos que tais ângulos, de lançamento e de impacto, são os ângulos de inclinação da reta tangente nos respectivos pontos. A motivação, para o estudo de tais fatos, foi encontrada em Groetsch [3].

O texto se subdivide como segue. Na Seção 2 são demonstrados teoremas úteis para se atingir o objetivo deste trabalho. Na Seção 3 temos a apresentação, discussão e demonstração do objetivo principal do trabalho. E terminamos com a Seção 4, fazendo alguns comentários sobre os objetivos atingidos no texto.

Sobre parte do conteúdo aqui estudado, foi apresentado um trabalho relacionado em forma de poster no 21º Simpósio Internacional de Iniciação Científica da USP (21º SIICUSP) com o nome *Fisicamente Óbvio, mas Matematicamente Interessante* e também um trabalho na XIII Semana da Matemática da Universidade Federal de Uberlândia, com o nome *Mesmos Pontos de Partida e de Impacto: Trajetórias que não se Interceptam*, sendo o último, premiado com menção honrosa, por ter sido classificado como um dos melhores trabalhos na área de Matemática Aplicada do evento.

2 Material e Métodos

Nesta seção, temos como objetivo demonstrar alguns fatos conhecidos do Cálculo Diferencial e Integral. Em particular, veremos relações do Teorema do Valor Médio com resultados sobre obtenção de extremos de funções e comportamentos de crescimento e decrescimento das mesmas.

Aqui foram utilizados, fortemente, Guidorizzi [4], Stewart [6] e Thomas [7], além de Lima [2].

2.1 Os Teoremas de Rolle e do Valor Médio

A primeira demonstração conhecida do Teorema de Rolle foi escrita pelo matemático francês Michel Rolle em 1691, usando métodos de cálculo diferencial. O nome “Teorema de Rolle” foi usado, pela primeira vez, por Moritz Wilhelm Drobisch da Alemanha em 1834 e por Giusto Bellavitis da Itália em 1846. Tais fatos podem ser encontrados em Cajori [1, pag. 224].

Teorema 2.1. (Teorema de Rolle) Seja f uma função contínua em $[a, b]$, derivável em (a, b) com $f(a) = f(b)$. Então, existe um $c \in (a, b)$ tal que $f'(c) = 0$.

Demonstração. Como f é contínua, pelo Teorema de Weierstrass (ou limitação uniforme - cf. Guidorizzi [4, pag. 513]), f admite máximo e mínimo em $[a, b]$. Se f for constante, com $f(x) = k, \forall x \in D_f$ (domínio de f), claro que $f'(x) = 0, \forall x \in Df$. Se não, o máximo ou mínimo de f deve estar em (a, b) . Temos duas possibilidades:

Caso 1: Existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) < f(a) = f(b)$.

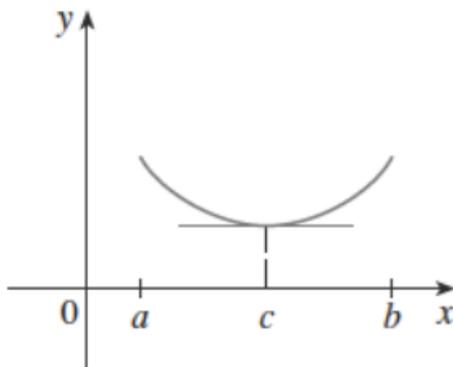


Figura 1: Figura que representa o Caso 1.

Neste caso, podemos observar que f atinge um valor mínimo em um ponto $c \in (a, b)$. Logo, como consequência do Teorema de Fermat (cf. Stewart [6, pag. 255]), $f'(c) = 0$.

Caso 2: Existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) > f(a) = f(b)$.

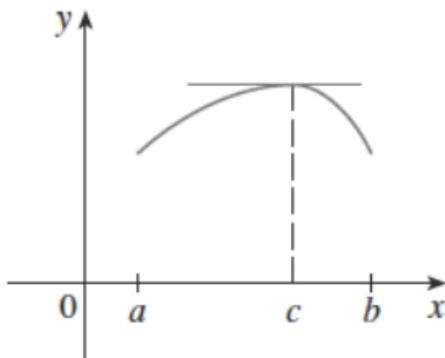


Figura 2: Figura que representa o Caso 2.

Análogo ao Caso 1. Como f atinge um valor máximo em um ponto $c \in (a, b)$, pelo Teorema de Fermat, $f'(c) = 0$.

□

Teorema 2.2. (Teorema do Valor Médio) Seja f uma função que satisfaça as seguintes propriedades:

- I. f é contínua em $[a, b]$
- II. f é derivável em (a, b) .

Sendo satisfeitas tais condições, existirá um $c \in (a, b)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Demonstração. Seja $g(x)$, uma função que tem por objetivo deslocar a função f usando a reta que passa por $(a, f(a))$ e $(b, f(b))$, para que posteriormente seja possível utilizar o Teorema 2.1, dada por:

$$g(x) = f(x) - f(a) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} (x - a) \right].$$

Temos $g(b) = g(a) = 0$. A função g é contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) , pois f tem tais propriedades. Logo, pelo Teorema de Rolle, existe um

número $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$. Derivando g em ambos os lados, temos que:

$$g'(c) = f'(c) - \left[\frac{f(b) - f(a)}{b - a} \right].$$

De $g'(c) = 0$ resulta,

$$g'(c) = 0 = f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

Portanto,

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

□

Na sequência veremos alguns corolários do Teorema do Valor Médio que são de grande valia, apesar de não serem utilizados diretamente no trabalho.

Corolário 2.3. Se uma função $f(x)$ possui derivada nula em todo $x \in (a, b)$, então f é uma função constante em (a, b) .

Demonstração. Sejam α e β dois pontos pertencentes a (a, b) , com $\alpha \neq \beta$. Como a função é derivável em (α, β) e contínua em $[\alpha, \beta]$, pelo Teorema do Valor Médio, existe um $c \in [\alpha, \beta]$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta}.$$

Mas como $f'(c) = 0$, temos que:

$$\frac{f(\alpha) - f(\beta)}{\alpha - \beta} = 0.$$

Ou seja, $f(\alpha) - f(\beta) = 0$. Portanto, $f(\alpha) = f(\beta)$, $\forall \alpha, \beta \in (a, b)$, implicando que f é constante. □

Corolário 2.4. Se $f'(x) = g'(x)$ para todo $x \in (a, b)$, então existe um $c \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = g(x) + c$, $\forall x \in (a, b)$. Ou seja, duas primitivas de uma mesma função diferem apenas de uma constante.

Demonstração. Seja $h(x) = f(x) - g(x)$. Derivando ambos os lados temos:

$$h'(x) = f'(x) - g'(x).$$

Mas, por hipótese, $f'(x) = g'(x)$. Assim, $h'(x) = 0$, $\forall x \in (a, b)$. Logo, pelo Corolário 2.3, $h(x) = c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. Daí, temos que $f(x) = g(x) + c$, para algum $c \in \mathbb{R}$. □

2.2 Teoremas Subsequentes

O próximo teorema será útil na Seção 3.

Teorema 2.5. (Teorema do Valor Médio Generalizado - caso $n = 2$)
Sejam f e f' contínuas em $[a, b]$ e suponhamos que f'' exista em (a, b) . Então existe um c_2 em (a, b) tal que:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c_2)(b - a)^2.$$

Demonstração. Seja k o número definido a partir da equação abaixo:

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + k(b - a)^2. \quad (1)$$

E ainda, seja:

$$F(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a) - k(x - a)^2. \quad (2)$$

Temos das equações (1) e (2) que $F(a) = F(b) = 0$. Derivando ambos os lados da segunda equação, obtemos:

$$F'(x) = f'(x) - f'(a) - 2k(x - a). \quad (3)$$

Como $F(a) = F(b) = 0$ e F é contínua e derivável em $[a, b]$, pelo Teorema de Rolle existe um c_1 em (a, b) tal que $F'(c_1) = 0$. Substituindo a em $F'(x)$ temos também que $F'(a) = 0$ e F' também satisfaz o Teorema de Rolle, com respeito ao intervalo $[a, c_1]$, pois $F'(c_1) = F'(a) = 0$. Portanto, existirá um c_2 em (a, c_1) tal que $F''(c_2) = 0$.

Derivando ambos os lados da equação (3) demonstrada, obtemos $F''(x) = f''(x) - 2k$. Para $x = c_2$, temos $F''(c_2) = f''(c_2) - 2k$. Como $F''(c_2) = 0$, então $k = \frac{f''(c_2)}{2}$. \square

A demonstração do teorema seguinte é de certa forma trabalhosa, sendo, porém, semelhante a do teorema anterior. O enunciaremos a título de curiosidade. Tal teorema também é conhecido como *Fórmula de Taylor Infinitesimal*.

Teorema 2.6. (Extensão do Teorema do Valor Médio Generalizado)
Sejam f e suas $n - 1$ primeiras derivadas $f', f'', f''', \dots, f^{(n-1)}$ contínuas em $[a, b]$ e $f^{(n)}$ contínua pelo menos em (a, b) . Então existirá um c_n em (a, b) tal que

$$f(b) = f(a) + f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(a)(b - a)^2 + \dots + \frac{1}{n!}f^{(n)}(c_n)(b - a)^n.$$

Demonstração. Ver Lima [2, pag. 105].

□

Vejamos um resultado que exemplifica a importância do Teorema do Valor Médio Generalizado.

Teorema 2.7. Seja f contínua tal que f' e f'' existam e suponhamos que $f'(a) = 0$. O ponto a será máximo local de f se $f''(x) \leq 0$ na região de a , ou seja, existe $h > 0$ tal que $a - h < x < a + h$, e o ponto a será mínimo local se $f''(x) \geq 0$ em $a - h < x < a + h$, para algum $h > 0$.

Demonstração. Seja h um número tal que $f''(x)$ exista para $a - h < x < a + h$ e seja b um número qualquer entre $a - h$ e $a + h$. Pela generalização do Teorema do Valor Médio, existe um $c \in (a, b)$, supondo $b > a$, tal que:

$$f(b) - f(a) = f'(a)(b - a) + \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

Como por hipótese $f'(a) = 0$, a expressão supracitada pode ser escrita da seguinte forma:

$$f(b) - f(a) = \frac{1}{2}f''(c)(b - a)^2.$$

Podemos observar que o membro direito da equação acima terá o mesmo sinal de $f''(c)$. Daí, se $f''(x) \leq 0$ em $a - h < x < a + h$ implica, de $a - h < c < a + h$, que $f(b) - f(a) \leq 0$, portanto $f(b) \leq f(a)$. Logo, f tem o ponto a como máximo local, ou seja, máximo em $(a - h, a + h)$. Se $f''(x) \geq 0$ em $a - h < x < a + h$, implica, de $a - h < c < a + h$, que $f(b) - f(a) \geq 0$, portanto $f(b) \geq f(a)$. Ou seja, a é ponto de mínimo local de f , isto é, mínimo em $(a - h, a + h)$. □

Teorema 2.8. Seja f contínua em $[a, b]$ e derivável em (a, b) . Valem as seguintes afirmações:

- i) Se $f'(x)$ é positiva em (a, b) , o gráfico de f é crescente no intervalo.
- ii) Se $f'(x)$ é negativa em (a, b) , o gráfico de f é decrescente no intervalo.

Demonstração. Sejam α e β dois pontos quaisquer no intervalo $[a, b]$ e $a \leq \alpha < \beta \leq b$. Como f é contínua e derivável em $[\alpha, \beta]$, pelo Teorema do Valor Médio existe um ponto $c \in (\alpha, \beta)$ tal que:

$$f'(c) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} \Rightarrow (\beta - \alpha)f'(c) = f(\beta) - f(\alpha).$$

Analisando o sinal da equação acima, observamos que $\beta - \alpha > 0$, pois $\beta > \alpha$. Portanto o sinal da equação à direita será o mesmo de $f'(c)$.

Logo, se $f'(c)$ for positivo, $f(\beta)$ será maior que $f(\alpha)$. Se $f'(c)$ for negativo, $f(\beta)$ será menor que $f(\alpha)$. Como $\alpha < \beta$ e α e β são quaisquer com esta propriedade em $[a, b]$, quando $f'(x)$ é positiva para todo $x \in (a, b)$, em particular $f'(c) > 0$, de fato, f é crescente em (a, b) e se $f'(x)$ for negativa para todo $x \in (a, b)$, em particular $f'(c) < 0$, f é decrescente em (a, b) , isto é, $\alpha < \beta \Rightarrow f(\alpha) < f(\beta)$ e $\alpha < \beta \Rightarrow f(\beta) < f(\alpha)$, respectivamente. \square

Teorema 2.9. Seja I um intervalo e f uma função com $f''(x)$ existente para todo $x \in I$. Então:

- i) O gráfico de f é côncavo para cima se $f''(x) > 0, \forall x \in I$.
- ii) O gráfico de f é côncavo para baixo se $f''(x) < 0, \forall x \in I$.

Demonstração. Lembremos o que de fato significa um gráfico ser côncavo para cima ou para baixo:

1) O gráfico de f em um intervalo I é côncavo para baixo quando o gráfico de f fica acima da corda \widehat{AB} como na figura abaixo:

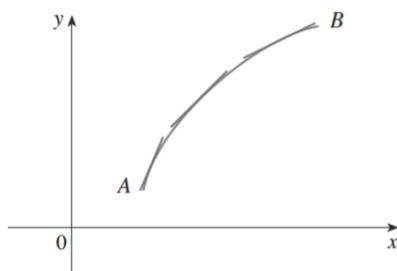


Figura 3: Gráfico com concavidade para baixo.

2) O gráfico de f é dito côncavo para cima em um intervalo I , se o gráfico de f fica abaixo da corda \widehat{AB} como na figura abaixo:

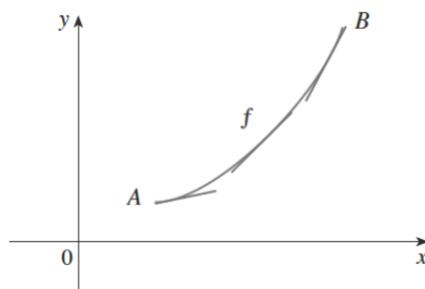


Figura 4: Gráfico com concavidade para cima.

Outra maneira de expressar o que foi dito no caso 1 acima, é dizer, como pode ser visto na figura, que o gráfico de f está abaixo de qualquer reta tangente ao gráfico de f em qualquer ponto $(x, f(x))$, com $x \in I$. Analogamente, no caso 2 podemos dizer que o gráfico de f está acima de qualquer reta tangente como já descrita.

Agora que já é conhecido o conceito de concavidade, seja a um número qualquer em I . A equação da reta tangente no ponto $(a, f(a))$ é dada por $y - f(a) = f'(a)(x - a)$.

Consideremos $x > a$. Pelo Teorema do Valor Médio, existe um $c \in (a, x)$ tal que $f(x) - f(a) = f'(c)(x - a)$. Provemos o item (i). O outro item tem demonstração análoga. Neste caso, como $f''(x) > 0, \forall x \in I$, sabemos que f' é crescente pelo Teorema 2.8.

Temos a diferença entre os valores do gráfico e os correspondentes na reta:

$$f(x) - y = f(a) + f'(c)(x - a) - [f(a) + f'(a)(x - a)].$$

Daí,

$$f(x) - y = [f'(c) - f'(a)](x - a).$$

Podemos observar que $[f'(c) - f'(a)] > 0$, pois $c > a$. Também podemos notar que $x - a > 0$, pois $x > a$ por hipótese. Como essas duas expressões são positivas, concluímos que $f(x) > y, \forall x \in I$. Ou seja, o gráfico está acima de qualquer reta tangente e, assim, provamos (i).

□

3 Resultados e Discussão

3.1 Trajetória no Vácuo

Para se chegar ao objetivo deste artigo, se faz necessário estudar lançamentos cujas trajetórias estão sujeitas a algum tipo de resistência. Para tanto, é fundamental obtermos anteriormente um resultado importante a respeito de trajetórias no vácuo, que é uma relação entre os ângulos de lançamento e impacto. Suponhamos um lançamento no vácuo de um projétil partindo da origem com massa unitária, uma velocidade inicial v_0 e um ângulo de lançamento θ , $0 < \theta < \pi/2$, em relação ao eixo x e em relação ao eixo y tenha-se apenas a influência da aceleração gravitacional g . Pelas leis de Newton, sendo t a variável tempo, para a componente horizontal $x = x(t)$ e, para a componente vertical $y = y(t)$, temos:

$$\begin{aligned} x(0) = 0 & \quad \text{e} \quad y(0) = 0 \\ x'(0) = v_0 \cos(\theta) & \quad \text{e} \quad y'(0) = v_0 \sin(\theta). \\ x''(0) = 0 & \quad \text{e} \quad y''(0) = -g \end{aligned} \tag{4}$$

Tendo em vista que a velocidade horizontal é constante e que $x'(0) = v_0 \cos(\theta)$, via integração na variável tempo t obtemos:

$$x(t) = (v_0 \cos(\theta))t.$$

E ainda, podemos afirmar, a partir da equação acima que:

$$t = \frac{x(t)}{v_0 \cos(\theta)}. \tag{5}$$

Por outro lado, do fato de $y''(0) = -g$, integrando, novamente, em relação a t teremos do fato que a aceleração na componente vertical é constante, a seguinte expressão:

$$y'(t) = -gt + C.$$

Aplicando a condição inicial $y'(0) = v_0 \sin(\theta)$, teremos que $C = v_0 \sin(\theta)$. Integrando mais uma vez dos dois lados obtemos:

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \sin(\theta)t + C_1.$$

Agora aplicando a condição inicial $y(0) = 0$, obteremos $C_1 = 0$. Por fim,

$$y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + v_0 \text{sen}(\theta)t.$$

Substituindo a expressão de t encontrada na equação (5) resulta que y em função de x fica:

$$y(x) = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} + \text{tg}(\theta)x.$$

Do fato que $0 < \theta < \pi/2$, temos:

$$y(x) = \frac{-gx^2}{2v_0^2 \cos^2(\theta)} \frac{\text{sen}(\theta)}{\text{sen}(\theta)} + \text{tg}(\theta)x.$$

Utilizando da relação $\text{sen}(2\theta) = 2\text{sen}(\theta)\cos(\theta)$, obtemos:

$$y(x) = \text{tg}(\theta)x \left(1 - \frac{g}{v_0^2 \text{sen}(2\theta)}x \right). \quad (6)$$

Pela expressão acima, temos que, para $x = L$, $y = 0$. Além disso, observamos que para $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$, $\text{tg}(\theta) \neq 0$. Sendo $L \neq 0$ o alcance do projétil, isto é, o projétil atinge o solo quando $x = L$, da equação (6):

$$L = \frac{v_0^2}{g} \text{sen}(2\theta). \quad (7)$$

Observamos que a equação da trajetória - equação (6) - sem resistência, apenas sob a ação da gravidade, é a equação de uma parábola com raízes $x = 0$ e $x = L$.

Também é fácil ver que $y'(0) = -y'(L) = \text{tg}(\theta) \Rightarrow y'(0) + y'(L) = 0$. Sendo θ_1 o ângulo de impacto, temos $\text{tg}(\theta_1) = y'(L)$. Do fato de $\text{tg}(\theta) = y'(0)$ e de valerem as desigualdades $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2} < \theta_1 < \pi$, concluímos que θ e θ_1 são suplementares.

Nota: Para o que segue, com o intuito de simplificar contas, sempre consideraremos o alcance como unitário, ou seja, $L = 1$. As conclusões e resultados obtidos não são afetados por esta condição.

3.2 Algumas Proposições Importantes

As proposições que veremos no que segue serão úteis no desenvolvimento do conteúdo posterior.

Denotemos por $C_0^2[0, 1]$ a classe das funções definidas em $[0, 1]$, com derivadas contínuas até segunda ordem. Escrevemos, ainda

$$C_0^2[0, 1] = \{f \in C^2[0, 1] : f(0) = f(1) = 0\}.$$

Consideremos $f \in C_0^2[0, 1]$ situada entre as parábolas em $C^2[0, 1]$ que são tangentes ao gráfico de f em 0 e 1, respectivamente, ou seja, temos que $p_0(x) = m_0x(1-x)$ e $p_1(x) = m_1x(1-x)$ com $m_0 = f'(0)$ e $m_1 = f'(1)$. Valem os resultados seguintes:

Proposição 3.1. Suponha $f \in C_0^2[0, 1]$ e f'' injetora. Então $p_0(x) \neq f(x) \neq p_1(x), \forall x \in (0, 1)$.

Demonstração. Defina $g(x) = f(x) - p_0(x)$. Se $f(b) = p_0(b)$ para algum $b \in (0, 1)$, então $g(0) = 0, g(b) = 0$ e $g(1) = 0$. Pelo Teorema 2.1, aplicado ao intervalo $(0, b)$, vale $f'(a) = p_0'(a)$ para algum $a \in (0, b)$ e ainda, pelo Teorema 2.1 aplicado ao intervalo $(b, 1)$, vale $f'(c) = p_0'(c)$ para algum $c \in (b, 1)$. Agora, definimos $h(x) = f'(x) - p_0'(x)$. Uma vez que $f'(0) = p_0'(0), f'(a) = p_0'(a)$ e $f'(c) = p_0'(c)$, outra aplicação do Teorema 2.1 nos dá que $f''(x) = p_0''(x) = -2m_0$ em $x = a$ e $x = b$ que pertencem a $(0, 1)$, o que contraria o pressuposto de $f''(x)$ ser injetora. Logo $p_0(x) \neq f(x) \neq p_1(x), \forall x \in (0, 1)$. □

Proposição 3.2. Se $f \in C_0^2[0, 1]$, f'' é injetora e $-2f'(0) < f''(0)$, temos que $f(x) > p_0(x), \forall x \in (0, 1)$.

Demonstração. Pelo Teorema 2.5, sabe-se que, dado $x \in (0, 1)$, existe um $\kappa_x \in (0, x)$ tal que:

$$f(x) - f(0) = f'(0)(x - 0) + \frac{1}{2}f''(\kappa_x)(x - 0)^2.$$

Como f'' é uma função contínua, escolhendo x suficientemente pequeno, resulta que, pela hipótese, $f''(\kappa_x) > -2f'(0)$. Logo, de $f(0) = 0, f(x) > f'(0)x - f'(0)x^2 = m_0x - m_0x^2 = p_0(x)$.

Pela Proposição 3.1, como f e p_0 são funções contínuas, temos que $f(x) > p_0(x), \forall x \in (0, 1)$. □

Proposição 3.3. Se $f \in C_0^2[0, 1]$ e f'' é injetora, negativa e estritamente decrescente, temos que $f(x) < p_1(x), \forall x \in (0, 1)$.

Demonstração. Conforme já foi demonstrado anteriormente, sabemos que os ângulos de lançamento e impacto das trajetórias parabólicas são suplementares, ou seja, $y'(0) + y'(1) = 0$. Será mostrado, primeiramente, que o ângulo de impacto de f é mais “íngreme” que o ângulo de lançamento, ou seja, $f'(0) + f'(1) < 0$.

É conveniente lidar com a função decrescente $g(x) = f'(x)$, que tem uma derivada decrescente e satisfaz $\int_0^1 g(t)dt = f(1) - f(0) = 0$. Daí, queremos mostrar que $g(0) < -g(1)$.

A ideia da prova, bem como alguns detalhes que serão utilizados posteriormente, podem ser observados na figura que segue:

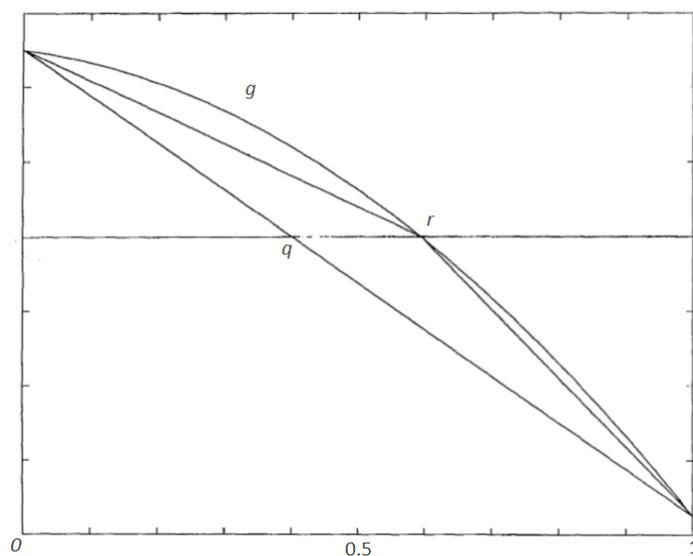


Figura 5: Gráfico Auxiliar da Demonstração.

Devemos ter $g(0) > 0$, pois $f'(0) = g(0) > 0$ é a tangente do ângulo θ de lançamento, com $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$. Como $\int_0^1 g(t)dt = 0$, então $g(1) < 0$, pois g é contínua e decrescente. Devido a isto, g tem uma única raiz $r \in (0, 1)$. Pela hipótese de f'' decrescente, segue da demonstração do Teorema 2.9 que a função g é côncava para baixo. Assim, podemos comparar a sua integral de área com um triângulo de base $[0, r]$ e altura $g(0)$, obtendo, como pode ser visto na figura acima, que:

$$\frac{r}{2}g(0) < \int_0^r g(t)dt.$$

Similarmente, considerando agora, o triângulo com base $[r, 1]$ e altura $-g(1)$, comparando com a sua integral correspondente, temos que:

$$-\frac{g(1)}{2}(1-r) > -\int_r^1 g(t)dt$$

Portanto,

$$\frac{1}{2}g(0)r < \int_0^r g(t)dt = -\int_r^1 g(t)dt < -\frac{g(1)}{2}(1-r).$$

Se considerarmos $-g(1) \leq g(0)$, temos que:

$$\frac{1}{2}g(0)r < \frac{1}{2}g(0)(1-r),$$

ou seja, $r < \frac{1}{2}$.

Considere agora, uma reta secante, como na figura anterior, conectando os pontos finais do gráfico de g ($(0, g(0))$ e $(1, g(1))$) e seja q a interseção com o eixo x desta reta secante. Se $-g(1) \leq g(0)$, temos por semelhança de triângulos que:

$$\frac{g(0)}{q} = -\frac{g(1)}{1-q} \leq \frac{g(0)}{1-q}.$$

Disto, resulta

$$r < \frac{1}{2} \leq q. \tag{8}$$

Agora, seja a função $h(x)$ dada por:

$$h(x) = g(x) - (g(1) - g(0))x - g(0).$$

que é a função diferença entre g e a reta secante descrita anteriormente.

Tal função satisfaz $h(0) = h(1) = 0$ e ainda, se $h(a) = 0$ para algum $a \in (0, 1)$, temos que $h'(x) = 0$, isto é, $f''(x) = g'(x) = g(1) - g(0)$ para dois pontos distintos $x \in (0, 1)$, pelo Teorema 2.2, o que é impossível, pois $g' = f''$ é injetora. Além disso,

$$h'(0) = g'(0) - (g(1) - g(0)) = g'(0) - g'(\kappa),$$

para algum $\kappa \in (0, 1)$. Como g' decresce, temos que $h'(0) > 0$. Portanto, $h(x) > 0, \forall x \in (0, 1)$ e em particular, $0 < h(q) = g(q)$. Assim, $q < r$, como descrito na figura anterior, contradizendo a equação (8).

Concluimos que a suposição $-g(1) \leq g(0)$ nos leva a uma contradição. Logo, $-f'(1) = -g(1) > g(0) = f'(0)$. Finalmente, se $k(x) = p_1(x) - f(x)$, então $k(0) = 0$, e $k'(0) = -f'(1) - f'(0) > 0$ e, por este fato, $p_1(x) >$

$f(x)$ para valores de x positivos e suficientemente pequenos. Portanto, pela Proposição 3.1 se garante que $p_1(x) > f(x)$, $\forall x \in (0, 1)$. □

3.3 Trajetória Sob Força Resistiva

Tendo como premissa resultados básicos de lançamentos sem resistência, levantaremos pontos importantes a respeito de lançamentos onde trajetórias estão sob algum tipo de força resistiva. Consideremos agora um lançamento cuja resistência atuante é a do ar. A força resistiva atuará sempre na direção oposta ao movimento. Portanto, a equação do movimento deve ser escrita da seguinte forma:

$$\ddot{r} = \begin{bmatrix} 0 \\ -g \end{bmatrix} - F(v)\frac{\dot{r}}{v}, \quad r(0) = 0 \quad \text{e} \quad \dot{r}(0) = \begin{bmatrix} v_0^R \cos(\theta) \\ v_0^R \sin(\theta) \end{bmatrix}, \quad (9)$$

em que $r(t) = [x(t) \ y(t)]^T$ é o vetor posição da partícula, F é a função resistência, que é uma função contínua e crescente da velocidade com $F(0) = 0$, $v = \|\dot{r}\|$ é a velocidade escalar, $v_0^R = \|\dot{r}(0)\|$ é a velocidade escalar de lançamento e θ o ângulo de lançamento medido a partir da horizontal.

Seja uma partícula com massa unitária em uma trajetória $y = y(x)$ sob a influência vertical da aceleração gravitacional g e tangencialmente por uma força resistiva F e, ϕ o ângulo entre a horizontal e a tangente à trajetória, conforme figura a seguir:

Analisando a figura acima, tem-se que:

$$\frac{dy}{dx}(x) = tg\phi.$$

Derivando a expressão acima, utilizando a Regra da Cadeia, obtemos:

$$\frac{d^2y}{dx^2}(x) = \sec^2\phi \frac{d\phi}{dx}. \quad (10)$$

Mostremos que $\frac{d^2y}{dx^2}(x) < 0$. Pela figura, sendo \vec{n} o vetor normal:

$$\cos\phi = \frac{\|\vec{n}\|}{-g} \Rightarrow \|\vec{n}\| = -g\cos\phi. \quad (11)$$

Por outro lado, sabemos que $\frac{v^2}{\rho}$ é a componente normal da aceleração, também chamada de aceleração centrípeta, onde v é a velocidade e ρ é o raio de curvatura. Portanto:

$$\rho = \frac{ds}{d\phi}.$$

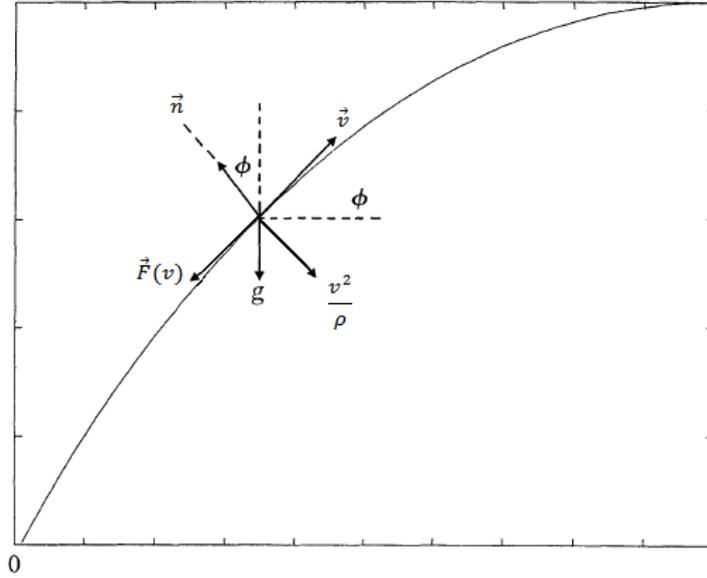


Figura 6: Gráfico da Distribuição de Forças.

em que s é o comprimento de arco (cf. Guidorizzi [4, pag. 416] ou Stewart [6, pag. 498]), isto é:

$$s(x) = \int_0^x \sqrt{1 + [y'(t)]^2} dt.$$

Pelo Teorema Fundamental do Cálculo (cf. Guidorizzi [4, pag. 404] ou Stewart [6, pag. 363]):

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \sqrt{1 + tg^2\phi} = \sqrt{\sec^2\phi} = \sec\phi, \text{ pois } 0 < \phi < \frac{\pi}{2}.$$

Mas, pela Regra da Cadeia para funções de uma variável, do fato de $\frac{ds}{dx} = \sec\phi$, segue:

$$\rho = \frac{ds}{d\phi} = \frac{ds}{dx} \frac{dx}{d\phi} \implies \rho = \sec\phi \frac{dx}{d\phi} \implies \frac{dx}{d\phi} = \rho \cos\phi.$$

Pela equação (11), como \vec{n} e a aceleração centrípeta têm mesma norma:

$$\frac{dx}{d\phi} = \rho \frac{\|\vec{n}\|}{-g} = \frac{\rho v^2}{-g\rho} = \frac{v^2}{-g}.$$

Diante disto, de $\frac{dx}{d\phi} = \frac{1}{\frac{d\phi}{dx}}$ a equação (10) fica, sendo $\vec{v}_x^R = [x(t) \ 0]^T$ a componente horizontal da velocidade, da forma:

$$y''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}(x) = -\frac{g}{(v^R)^2} \sec^2\phi = -\frac{g}{(v^R \cos\phi)^2} = -\frac{g}{\|\vec{v}_x^R\|^2}. \quad (12)$$

Da última equação, temos um resultado fisicamente óbvio mas que é importante neste estudo, pois mostra que $y''(x)$ é uma função negativa, o que implica que a trajetória forma um gráfico de concavidade para baixo. Considerando, agora, apenas a componente horizontal da velocidade, a partir das equações em (9):

$$\dot{v}_x^R = -\frac{F(v)}{v} v_x^R. \quad (13)$$

Com v_0^R e v_0 as respectivas velocidades escalares de lançamento com resistência e no vácuo, considerando que os lançamentos possuam alcance unitário e mesmo ângulo de lançamento θ , é intuitivo pensar que $v_0^R > v_0$. Vejamos isto, matematicamente.

Voltando a equação (13) do movimento para uma trajetória com resistência e fazendo a substituição $G(t) = \frac{F(v)}{v}$, teremos a seguinte expressão para a componente horizontal:

$$x''(t) = -G(t)x'(t), \quad x'(0) = \|v_{0x}^R\|,$$

em que $v_{0x}^R = v_0^R \cos(\theta)$.

Vendo esta equação diferencial linear de primeira ordem em $x'(t)$, obtemos:

$$x'(t) = K e^{-G_1(t)}, \quad \text{onde } G_1(t) = \int_0^t G(s) ds.$$

Aplicando a condição inicial, onde $x'(0) = \|v_{0x}^R\|$:

$$x'(0) = K \Rightarrow K = \|v_{0x}^R\|.$$

Logo,

$$x'(t) = \|v_{0x}^R\| e^{-G_1(t)}, \quad \text{com } G_1(t) = \int_0^t G(s) ds. \quad (14)$$

Para a componente vertical, das equações apresentadas em (9), como $y''(t) = -g - G(t)y'(t)$, de forma análoga obtemos, resolvendo a equação diferencial linear de primeira ordem em $y'(t)$, considerando $v_{0y}^R = v_0^R \sin(\theta)$, que:

$$y'(t) = \|v_0^R\| e^{-G_1(t)} - g \int_0^t e^{G_1(s)-G_1(t)} ds. \quad (15)$$

Tendo em mãos as equações (14) e (15), tem-se que:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y'(t)}{x'(t)} = \frac{\|v_0^R\| e^{-G_1(t)} - g \int_0^t e^{G_1(s)-G_1(t)} ds}{\|v_0^R\| e^{-G_1(t)}} = \frac{\|v_0^R\|}{\|v_0^R\|} - \frac{g \int_0^t e^{G_1(s)} ds}{\|v_0^R\|}. \quad (16)$$

Por outro lado, sabe-se que uma trajetória sem resistência, por ter o comportamento de uma parábola, se tiver um ângulo de lançamento θ e alcance 1 sua equação deve ficar da forma $p(x) = tg(\theta)x(1-x)$. Isto foi visto ao final na Seção 3.1. Neste caso, temos por equações paramétricas:

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos(\theta)t \\ y(t) = -\frac{g}{2}t^2 + (v_0 \text{sen}(\theta))t \end{cases},$$

resultando que o alcance $\frac{\|v_0\|^2 \text{sen}(2\theta)}{g} = 1$.

Prosseguindo, $p'(x) = tg(\theta)(1-2x) = \frac{\|v_0^R\|}{\|v_0^R\|}(1-2x)$, lembrando que $\frac{dy}{dx} = \frac{\|v_0^R\|}{\|v_0^R\|}$ pela equação (16), quando $t = 0$. Integrando a expressão da equação (14), obtemos que $x(t) = \|v_0^R\| \int_0^t e^{-G_1(s)} ds$. Substituindo esta expressão de x na equação de $p'(x)$, obtemos:

$$p'(x) = \frac{\|v_0^R\|}{\|v_0^R\|} \left[1 - 2\|v_0^R\| \int_0^t e^{-G_1(s)} ds \right] = \frac{\|v_0^R\|}{\|v_0^R\|} - 2\|v_0^R\| \int_0^t e^{-G_1(s)} ds. \quad (17)$$

A partir das equações (16) e (17), utilizando de $v_0^R = v_0 \cos(\theta)$ e $v_0^R = v_0 \text{sen}(\theta)$:

$$y'(x) - p'(x) = \frac{g}{\|v_0^R\|} \left[- \int_0^t e^{G_1(s)} ds + \frac{\|v_0^R\|^2 \text{sen}(2\theta)}{g} \int_0^t e^{-G_1(s)} ds \right].$$

Supondo que $\|v_0^R\| \leq \|v_0\|$, do fato de $\frac{\|v_0\|^2 \text{sen}(2\theta)}{g} = 1$, teríamos $y'(x) - p'(x) < 0$, para $x > 0$. Isto é um absurdo, pois tal fato implica

$y(x) < p(x)$, $\forall x > 0$ devido a $y(0) = p(0) = 0$. Mas, como premissa consideramos o mesmo alcance para as duas trajetórias, ou seja, $y(1) = p(1) = 0$. Logo, podemos concluir que $v_0^R > v_0$. Algo fisicamente óbvio, mas matematicamente interessante.

Portanto, já está provado matematicamente que a velocidade de lançamento no vácuo deve ser menor que a velocidade de lançamento com resistência para se atingir o mesmo ponto de alcance, se o lançamento partir do mesmo ponto inicial. Ou seja, $v_0^R > v_0$. Agora resta provar que dado o gráfico de três trajetórias, sendo $p_0(x)$ e $p_1(x)$ trajetórias sem resistência e $f(x)$ uma trajetória com resistência, se $p_0(x)$ tiver o mesmo ângulo de lançamento de $f(x)$ e $p_1(x)$ o mesmo ângulo de impacto, o gráfico que representa a trajetória com resistência estará envolvido pelos outros dois gráficos, conforme figura a seguir:

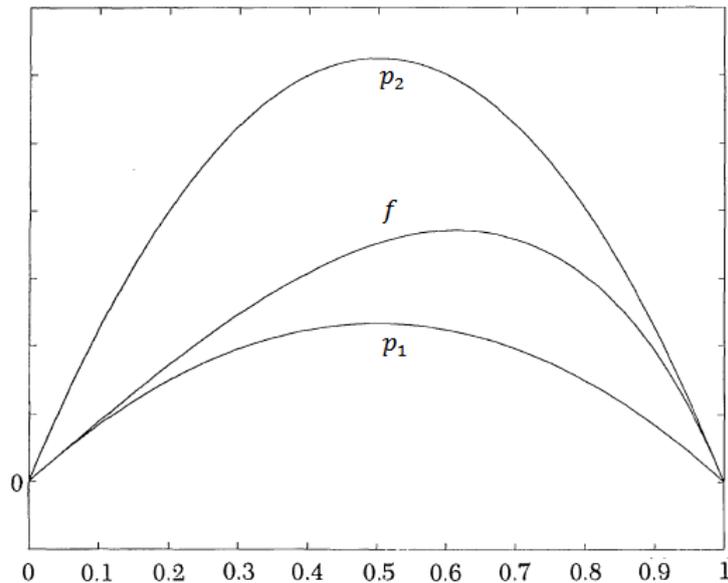


Figura 7: Gráfico das trajetórias.

Para tal prova, vamos utilizar as proposições que foram demonstradas na Subseção 3.2.

Desde que a segunda derivada da trajetória sob força resistiva é negativa e estritamente decrescente, como mostrado na equação (12), diretamente da Proposição 3.3, fica demonstrado que a trajetória com resistência f está abaixo da trajetória parabólica p_1 .

Agora, para mostrar que a trajetória com resistência f está acima da trajetória parabólica p_0 , de acordo com a Proposição 3.2, temos que mostrar

que a trajetória com resistência satisfaz a condição $y''(0) > -2y'(0)$. Portanto, seja v_0 a velocidade de lançamento para a trajetória parabólica p_0 e seja v_0^R a velocidade de lançamento na trajetória com resistência. Desde que as duas trajetórias tenham alcance unitário, a partir da equação do alcance (7), temos:

$$L = \frac{(v_0)^2}{g} \text{sen}(2\theta) \Rightarrow g = 2(v_0)^2 \text{sen}(\theta) \text{cos}(\theta),$$

onde θ é o ângulo de lançamento, que é comum as duas trajetórias. Portanto, pela equação (12), temos que:

$$y''(0) = -\frac{g}{\|v_x\|^2} = -\frac{g}{(v_0^R)^2 \text{cos}^2(\theta)} = -\frac{2(v_0)^2 \text{sen}(\theta) \text{cos}(\theta)}{(v_0^R)^2 \text{cos}^2(\theta)}.$$

Logo,

$$y''(0) = -2tg(\theta) \left(\frac{v_0}{v_0^R} \right)^2.$$

Tendo em vista que $tg(\theta) = y'(0)$, temos que:

$$y''(0) = -2y'(0) \left(\frac{v_0}{v_0^R} \right)^2 > -2y'(0), \quad (18)$$

desde que $v_0^R > v_0$, como já demonstrado. Por fim, a partir da equação (18) e da Proposição 3.2, fica demonstrado, pelo fato de y'' ser decrescente, que o gráfico da trajetória sob influência de resistência está acima da trajetória parabólica p_0 , concluindo assim os objetivos deste estudo.

4 Conclusão

Portanto, demonstramos, matematicamente, algo que fisicamente, talvez, seja intuitivo: dado um objeto de massa unitária foi verificado que ao ser lançado, partindo da mesma origem, no vácuo ou sob algum tipo de resistência (do ar, mais comumente) que as respectivas velocidades iniciais v_0 e v_0^R satisfazem a desigualdade $v_0 < v_0^R$ para que, em ambos os lançamentos, o ponto de alcance seja o mesmo. E, por outro lado, demonstramos algo interessante e talvez não tão intuitivo, onde dado o gráfico de três trajetórias, sendo $p_0(x)$ e $p_1(x)$ trajetórias sem resistência e $f(x)$ uma trajetória com resistência, partindo todas da origem, se $p_0(x)$ tiver o mesmo ângulo de lançamento de $f(x)$ e $p_1(x)$ o mesmo ângulo de impacto de $f(x)$, o gráfico que representa a trajetória com resistência estará envolvido pelos outros dois gráficos, ou ainda, $p_0(x) < f(x)$ e $p_1(x) > f(x)$, ou seja, $p_0(x) < f(x) < p_1(x)$, para $0 < x < L$, em que $x = L$ é o alcance das curvas.

Referências

- [1] CAJORI, F., *History of Mathematics*, J.S. Cushig & Co. - Berwick & Smith, 1893.
- [2] LIMA, E. L., *Análise Real*, Vol. 1, IMPA - Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, 1989.
- [3] GROETSCH, C., The commandant's corollary, Amer Math. Monthly 107 (2000) 15-23.
- [4] GUIDORIZZI, H. L., *Um Curso de Cálculo*, Vol. 1 e 2; 5a. edição, LTC - Livros Técnicos e Científicos Editora, Rio de Janeiro, 2008.
- [5] HIBBELER, R.C, *Dinâmica: Mecânica para Engenharia*, Prentice Hall, São Paulo, 10^a ed., 2005.
- [6] STEWART, J., *Cálculo*, Vol. 1 e 2; 6a. edição, Cengage Learning, São Paulo, 2011.
- [7] THOMAS, G. B., *Cálculo*, Vol. 1; 11a. edição, Pearson Education, São Paulo, 2006.