

# MODELO DE MÍNIMOS QUADRADOS PARA A AUDIÇÃO HUMANA

IOHANNA WIELEWSKI DE SOUZA VIGINÉSKI <sup>1</sup>

ÉRIKA MARIA CHIOCA LOPES <sup>2</sup>

**Resumo:** A audição é um sentido muito apurado e preciso do corpo humano. O ouvido tem a capacidade de captar o som e de transmitir a informação para o cérebro, por meio de uma série de mecanismos biofísicos. Para interpretar e analisar padrões da audição humana, são utilizados modelos matemáticos. Este artigo apresenta a fundamentação teórica de tópicos de Álgebra Linear e das Séries de Fourier para mostrar sua aplicação na descrição de um modelo de aproximação de mínimos quadrados para a audição do homem.

**Palavras-Chave:** Álgebra Linear, Séries de Fourier, Modelos de Mínimos Quadrados, Audição Humana.

**Abstract:** Hearing is a very accurated and keen sense of the human body. The ear has the ability to capture the sound and transmit it as information to the brain through a series of biophysical mechanisms. Many mathematical models are used to interpret and analyse the patterns of the human hearing. This work presents the elements of Linear Algebra and Fourier series which are used to build a model for the human hearing, the so-called minimum square approximation model, which is also described in the work.

**Keywords:** Linear Algebra, Fourier Series, Least Square Method, Human Audition.

---

<sup>1</sup>FEELT/UFU, Av: João Naves de Ávila, 2160 Uberlândia/MG,38400-902 ,iohanna\_ws@hotmail.com

<sup>2</sup>FAMAT/UFU,Av João Naves de Ávila, 2121, Uberlândia/MG, 38.408-100, erika@famat.ufu.br

# 1 INTRODUÇÃO

A audição é um dos sentidos mais importantes para o desenvolvimento social do ser humano. É por meio da audição que identificamos sons para que possamos nos comunicar oralmente. A compreensão de sons vai além do que podemos compreender e pensar; através dela, reconhecemos vozes familiares mesmo quando elas estão distorcidas, latidos de um cachorro, barulho de chuva, a música predileta e tudo que se pode ouvir.

O mecanismo da audição humana é bastante complexo: a percepção de um ruído se dá através da propagação do som em um meio físico, onde este será processado fisiologicamente pelo ouvido e enviado para o cérebro por impulsos elétricos através de fibras nervosas auditivas. Por fim, o cérebro poderá interpretar o som e determinar seu significado e importância. Mesmo após anos de estudo, o processamento do som pelo sistema auditivo ainda não está totalmente compreendido, não se sabe ainda se nossos ouvidos apresentam seu melhor desempenho.(BISTAFA, 2006)

Para que o som chegue ao ouvido e este possa captá-lo e escolhê-lo, existe uma série de mecanismos biofísicos que fazem esta percepção. Padrões da audição humana podem ser analisados e interpretados por meio de modelos matemáticos. Neste sentido, este artigo apresenta na fundamentação teórica conceitos e teoremas de Álgebra Linear - como produto interno, ortogonalidade, processo de Gram-Schmidt - e das Séries de Fourier para mostrar uma aplicação na descrição de um modelo de aproximação de mínimos quadrados para a audição do homem.

## 2 MATERIAL E MÉTODOS

O referencial teórico estudado para a realização deste trabalho inclui tópicos de Álgebra Linear e Séries de Fourier, além de conceitos da Biofísica.

### 2.1 Anatomia do Ouvido

O ouvido humano é uma antena para o cérebro, uma parte do cérebro ligada diretamente ao mundo externo, responsável por procurar informações na forma de vibrações do ambiente. Ele é dividido, conforme mostra a Figura 1, em três partes básicas: ouvido externo, ouvido médio e ouvido interno, cada um realizando uma função diferente relativa à captação do som.

O ouvido externo é formado pelo pavilhão auricular - ou orelha - e pelo canal auditivo.

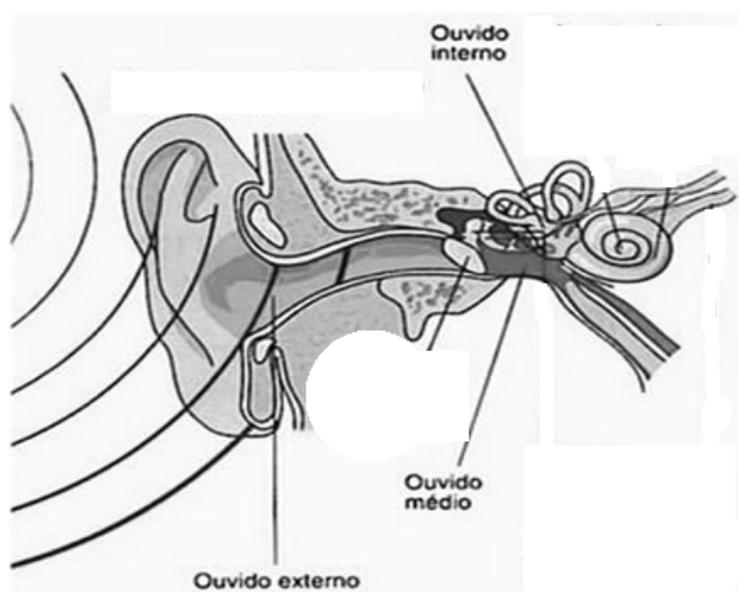


Figura 1: Anatomia Resumida do Ouvido

O ouvido médio compreende uma cavidade limitada pelo tímpano e pelas paredes ósseas; é a parte onde estão localizados os menores ossos do corpo humano (martelo, bigorna e estribo). O ouvido médio se comunica com o interior através da Trompa de Eustáquio. Já o ouvido interno é uma cavidade fechada que contém a cóclea e os canais semicirculares. Tais partes anatômicas podem ser observadas na Figura 2, abaixo. (HENEINE, 2008)

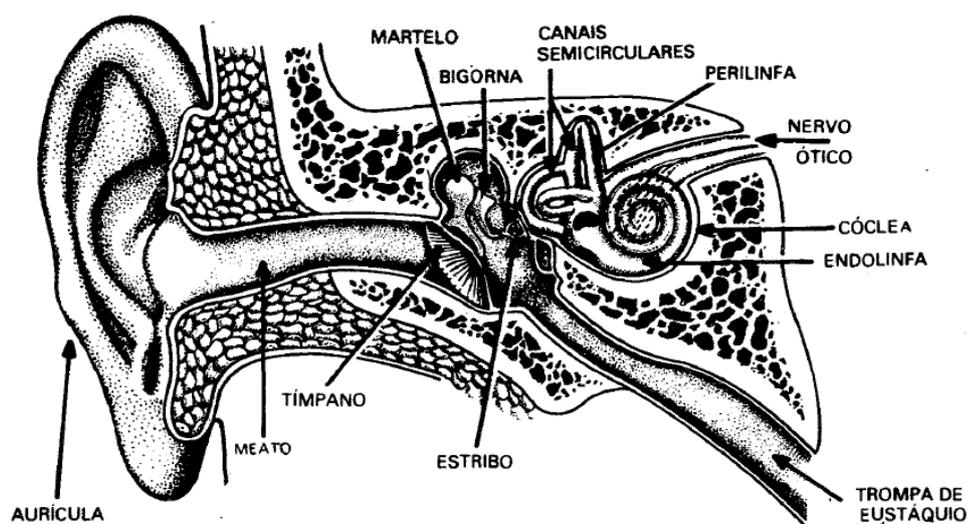


Figura 2: Partes Anatômicas de todo Ouvido

Cada divisão do ouvido desempenha um papel diferente na captação, percepção, res-  
posta e condução do som para o sistema nervoso. O ouvido externo capta e conduz a onda  
sonora através do canal auditivo, o que faz vibrar a membrana timpânica. De acordo com  
Henine e Garcia, o ouvido médio desempenha duas funções distintas: a de transformar,  
por meio da pressão, a amplitude da onda em energia sonora e a de amplificar a força  
mecânica realizada pelos ossículos. Assim, a vibração do tímpano provoca a vibração dos  
ossículos do ouvido médio, que se movimentam em forma de alavanca, gerando energia  
mecânica. Por fim, o ouvido interno, que pode ser visualizado na Figura 3, é a região  
mais importante para a audição, pois tem por desígnio transmitir esta informação para o  
cérebro, através de impulsos elétricos. Para tal, a energia mecânica gerada pelos ossículos  
do ouvido médio é passada para um fluido dentro da cóclea, que contém milhares de  
células ciliadas que oscilam com o fluido. Tais movimentos geram corrente elétrica e esti-  
mulam diversas áreas do ouvido interno, o que criará energia elétrica. A energia elétrica  
trafega através do nervo vestibulococlear, que manda os sinais ao longo de vários cami-  
nhos neurais até o sistema nervoso central, onde é analisada e interpretada em sua forma  
final como som (BRUNNER, 2006).

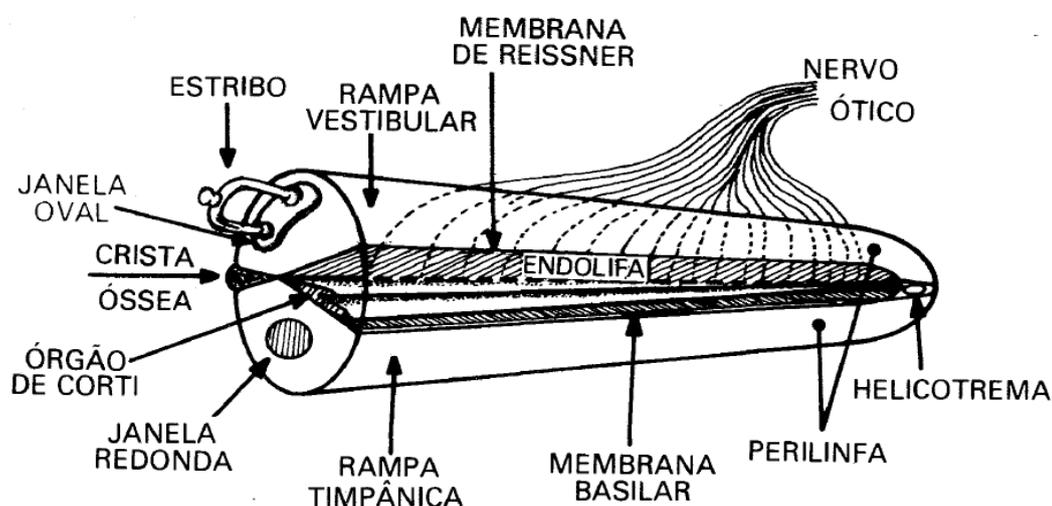


Figura 3: Ouvido Interno - Cóclea - Visão Lateral

## 2.2 Onda Sonora

Entende-se onda sonora como a vibração das moléculas existentes no ar na mesma direção  
do som, conhecida, então, por onda longitudinal. O som pode então ser definido como

uma variação da pressão ambiente detectável pelo sistema auditivo. A onda sonora, por ser uma onda periódica - em que, a intervalos de tempos iguais, a velocidade de cada vibração é a mesma - comporta-se como um oscilador harmônico. O tipo mais elementar de onda sonora assemelha-se a uma onda senoidal, que pode ser definida como uma função do tempo pela equação 1 a seguir :

$$q(t) = A_0 + A \sin(\omega t - \delta) \quad (1)$$

onde  $q(t)$  representa a pressão atmosférica no tímpano no instante  $t$ ,  $A_0$  é a pressão atmosférica normal do ambiente,  $A$  representa a variação máxima da pressão quando comparada com a pressão atmosférica normal (isto é, a amplitude de onda),  $\frac{\omega}{2\pi}$  é a frequência da onda em ciclos por segundo e o ângulo de fase da onda é  $\delta$  (ANTON & RORRES, 2001). A figura 4 mostra os parâmetros desta função  $q(t)$  expressos na forma de onda:

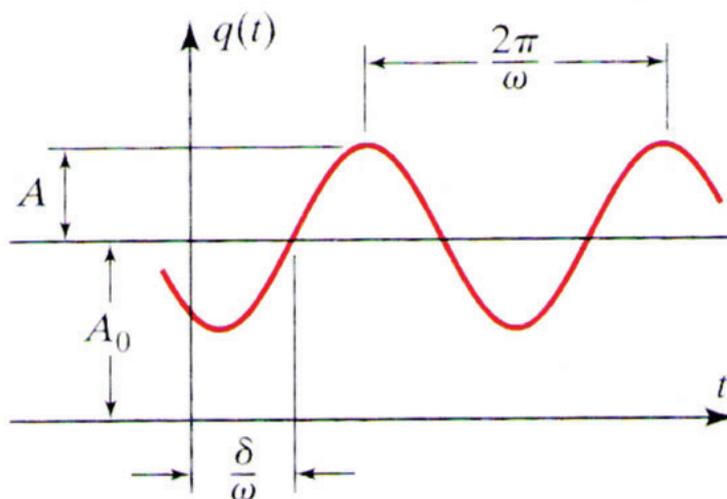


Figura 4: Parâmetros da equação 1 para uma onda sonora senoidal

Existe um intervalo de variação da frequência da onda senoidal no qual o ser humano a compreende como um som, conhecido como limiar diferencial. Para os humanos, este intervalo é aproximadamente de 20 a 20.000 ciclos por segundo(cps). As frequências fora deste intervalo não estimulam os cílios da cóclea de maneira suficiente para produzir sinais nervosos.

Por outro lado, de acordo com Anton e Rorres, uma onda sonora não elementar é, em

geral, uma soma finita de componentes senoidais, de diferentes amplitudes, frequências e ângulos de fase. Temos então que uma onda sonora não elementar pode ser expressa da seguinte forma:

$$q(t) = A_0 + A_1 \text{sen}(\omega_1 t - \delta_1) + A_2 \text{sen}(\omega_2 t - \delta_2) + \dots + A_n \text{sen}(\omega_n t - \delta_n) \quad (2)$$

Então, a resposta do ouvido a esta onda será dada por impulsos nervosos ao longo dos mesmos caminhos neurais que seriam estimulados pelos componentes individuais da equação 2, como ilustra a Figura 5.

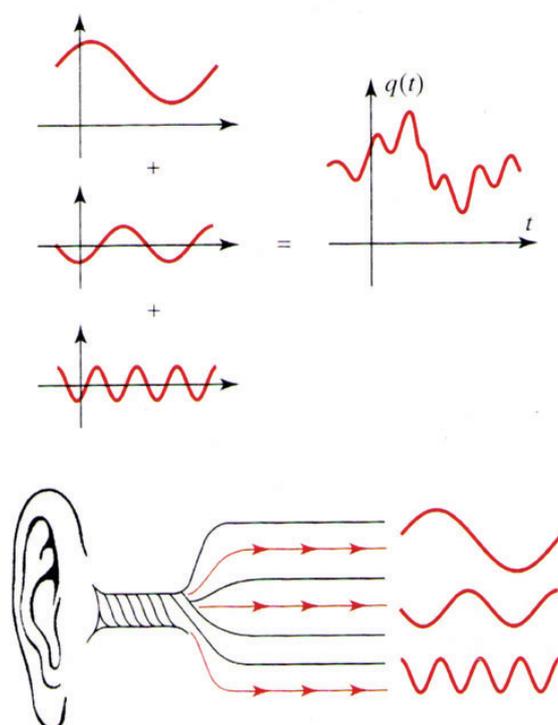


Figura 5: Diferentes formas de onda, representadas pela equação 2, e a resposta do ouvido

Para uma onda sonora  $p(t)$  que não é uma soma finita de ondas senoidais, ou seja, que não pode ser representada por uma onda  $q(t)$  do tipo dado pela equação 2, este artigo irá descrever uma forma de aproximá-la por uma onda de tal tipo, pois a resposta do ouvido a  $p(t)$  coincide com a resposta a alguma onda do tipo  $q(t)$  (ANTON & RORRES, 2001). Esta aproximação será feita pelo método dos mínimos quadrados e a fundamentação teórica para isto passa a ser feita nas próximas duas subseções.

## 2.3 Álgebra Linear

### 2.3.1 Produto Interno

**Definição 2.1** Um **produto interno** em um espaço vetorial real  $V$  é uma função que associa um número real  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$  a cada par de vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  em  $V$ , de tal maneira que os seguintes axiomas são satisfeitos, para quaisquer vetores  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  e  $\mathbf{w}$  de  $V$  e qualquer escalar real  $l$ :

1.  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = \langle \mathbf{v}, \mathbf{u} \rangle$
2.  $\langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle + \langle \mathbf{v}, \mathbf{w} \rangle$
3.  $\langle l\mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = l\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle$
4.  $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle \geq 0$  e  
 $\langle \mathbf{v}, \mathbf{v} \rangle = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$

**Exemplo 2.2** O produto escalar de dois vetores tridimensionais  $\mathbf{u} = (u_1, u_2, u_3)$  e  $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3)$ , usualmente definido em Geometria Analítica, por:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 \quad (3)$$

representa um produto interno no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , como pode ser facilmente verificado a partir da definição de produto interno.

**Exemplo 2.3** Considerando o espaço vetorial  $C[a, b]$  das funções reais contínuas em  $[a, b]$ , podemos definir uma função que associa, a cada par de funções  $\mathbf{f} = f(x)$  e  $\mathbf{g} = g(x)$ , o seguinte número real:

$$\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx \quad (4)$$

Esta função define um produto interno em  $C[a, b]$ . De fato, usando as propriedades amplamente conhecidas do cálculo integral, temos:

$$1. \langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle \mathbf{g}, \mathbf{f} \rangle$$

$$2. \langle \mathbf{f} + \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle = \int_a^b [f(x) + g(x)]h(x)dx = \int_a^b [f(x)h(x) + g(x)h(x)]dx = \\ = \int_a^b f(x)h(x)dx + \int_a^b g(x)h(x)dx = \langle \mathbf{f}, \mathbf{h} \rangle + \langle \mathbf{g}, \mathbf{h} \rangle$$

$$3. \langle k\mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_a^b kf(x)g(x)dx = k \int_a^b f(x)g(x)dx = k\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle$$

$$4. \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle = \int_a^b f(x)f(x)dx = \int_a^b [f(x)]^2dx \geq 0.$$

Além disso, como  $\mathbf{f}$  é contínua em  $[a, b]$ , segue do Cálculo que  $\int_a^b [f(x)]^2dx = 0$  se, e somente se,  $\mathbf{f} = \mathbf{0}$ .

O produto interno permite que se crie uma geometria num espaço vetorial qualquer, semelhante àquela que se tem nos espaços euclidianos  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ : é possível introduzir as noções de comprimento, distância e ângulo em espaços vetoriais arbitrários, desde que eles tenham produto interno.

**Definição 2.4** Se  $V$  é um espaço com produto interno, então o **comprimento** ou **norma** de um vetor  $\mathbf{u}$  de  $V$  é representada por  $\|\mathbf{u}\|$  e é definida por:

$$\|\mathbf{u}\| = \langle \mathbf{u}, \mathbf{u} \rangle^{1/2}$$

**Definição 2.5** A **distância** entre dois vetores  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  é representada por  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  e é definida por:

$$d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \|\mathbf{u} - \mathbf{v}\|$$

**Definição 2.6** Sendo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dois vetores não nulos, o **ângulo**  $\theta$  entre eles é tal que  $0 \leq \theta \leq \pi$  e seu cosseno é dado pela fórmula:

$$\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle}{\|\mathbf{u}\| \|\mathbf{v}\|}$$

**Exemplo 2.7** No espaço vetorial  $C[0, 1]$  com o produto interno definido em 4 do Exemplo 2.3, considere  $\mathbf{f} = f(x) = x^3 - x - 1$  e  $\mathbf{g} = g(x) = x^2 + 1$ . Assim:

- O produto interno entre  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  é:  $\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle = \int_0^1 (x^3 - x - 1) \cdot (x^2 + 1) dx = -\frac{5}{3}$ ;

- O comprimento de  $\mathbf{f}$  é:  $\|\mathbf{f}\| = \langle \mathbf{f}, \mathbf{f} \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_0^1 (x^3 - x - 1)^2 dx} = \frac{\sqrt{331}}{\sqrt{210}}$ ;

- O comprimento de  $\mathbf{g}$  é:  $\|\mathbf{g}\| = \langle \mathbf{g}, \mathbf{g} \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_0^1 (x^2 + 1)^2 dx} = \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{15}}$ ;

- A distância entre  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  é:

$$d(\mathbf{f}, \mathbf{g}) = \|\mathbf{f} - \mathbf{g}\| = \langle \mathbf{f} - \mathbf{g}, \mathbf{f} - \mathbf{g} \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_0^1 (x^3 - x - 1 - x^2 - 1)^2 dx} = \frac{1423}{210}$$

- O ângulo  $\theta$  entre  $\mathbf{f}$  e  $\mathbf{g}$  é tal que:  $\cos \theta = \frac{\langle \mathbf{f}, \mathbf{g} \rangle}{\|\mathbf{f}\| \|\mathbf{g}\|} = \frac{-\frac{5}{3}}{\frac{\sqrt{331}}{\sqrt{210}} \cdot \frac{2\sqrt{7}}{\sqrt{15}}} = \frac{-5\sqrt{3150}}{6\sqrt{2317}}$ .

### 2.3.2 Ortogonalidade e Processo de Gram-Schmidt

A partir da definição de ângulo entre dois vetores de um espaço vetorial qualquer, podemos generalizar o conceito de vetores ortogonais dos espaços euclidianos  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , fazendo com que o ângulo entre os mesmos seja  $\frac{\pi}{2}$ .

**Definição 2.8** Sendo  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  dois vetores quaisquer de um determinado espaço vetorial com produto interno, dizemos que eles são **ortogonais** quando  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$ .

Assim, a ortogonalidade entre dois vetores depende do produto interno considerado no espaço vetorial.

**Exemplo 2.9** No espaço vetorial  $C[-1, 1]$ , definido com o produto interno como em 4 do exemplo 2.3, sejam  $\mathbf{f}_1 = x$  e  $\mathbf{f}_2 = x^2$ . Então:

$$\langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_2 \rangle = \int_{-1}^1 x \cdot x^2 dx = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0$$

logo  $\mathbf{f}_1$  e  $\mathbf{f}_2$  são ortogonais em relação ao produto interno dado.

O resultado demonstrado a seguir é conhecido como Teorema de Pitágoras generalizado.

**Teorema 2.10** *Se  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores ortogonais em um espaço com produto interno, então:*

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2$$

*Prova:* A ortogonalidade de  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  implica que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle = 0$  e portanto:

$$\|\mathbf{u} + \mathbf{v}\|^2 = \langle \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v} \rangle = \|\mathbf{u}\|^2 + 2\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle + \|\mathbf{v}\|^2 = \|\mathbf{u}\|^2 + \|\mathbf{v}\|^2.$$

□

**Exemplo 2.11** Voltando ao exemplo anterior, para os vetores ortogonais  $\mathbf{f}_1 = x$  e  $\mathbf{f}_2 = x^2$ , temos por definição que:

- $\|\mathbf{f}_1\| = \langle \mathbf{f}_1, \mathbf{f}_1 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x)^2 dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}};$
- $\|\mathbf{f}_2\| = \langle \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x^2)^2 dx} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}};$
- $\|\mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2\| = \langle \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2, \mathbf{f}_1 + \mathbf{f}_2 \rangle^{1/2} = \sqrt{\int_{-1}^1 (x + x^2)^2 dx} = \frac{16}{15}.$

Daí é fácil verificar que o Teorema de Pitágoras generalizado é satisfeito por estes vetores.

**Definição 2.12** *Um conjunto de vetores em um espaço com produto interno é chamado **conjunto ortogonal** se quaisquer dois vetores distintos desse espaço são ortogonais. Um **conjunto ortonormal** é um conjunto ortogonal no qual cada vetor possui norma igual a 1.*

**Exemplo 2.13** No espaço vetorial  $\mathbb{R}^3$  com produto interno definido usualmente como em 3 do exemplo 2.2, considere os vetores

$$\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0), \quad \mathbf{v}_2 = (1, 0, 1) \text{ e } \mathbf{v}_3 = (1, 0, -1)$$

É fácil verificar que  $\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3 \rangle = \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3 \rangle = 0$ . Logo, o conjunto  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  é ortogonal. Temos que  $\|\mathbf{v}_1\| = 1$ , enquanto que  $\|\mathbf{v}_2\| = \|\mathbf{v}_3\| = \sqrt{2}$ . Por isso,  $S$  não é um conjunto ortonormal. No entanto, é possível construir um conjunto ortonormal a partir de  $S$ , fazendo a chamada **normalização** de  $S$ , na qual definimos três vetores  $\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3$ , ortogonais e de norma 1:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \text{ e } \mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{v}_3}{\|\mathbf{v}_3\|} = \left( \frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}} \right)$$

Assim, o conjunto  $W = \{\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \mathbf{g}_3\}$  é ortonormal.

**Exemplo 2.14** Os vetores  $\mathbf{f}_1 = x$  e  $\mathbf{f}_2 = x^2$  dos Exemplos 2.9 e 2.11 formam um conjunto ortogonal de vetores em  $C[-1, 1]$ . Para obter um conjunto ortonormal, podemos normalizá-los, construindo os vetores  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$  da seguinte maneira:

- $\mathbf{g}_1 = \frac{\mathbf{f}_1}{\|\mathbf{f}_1\|} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$ ;
- $\mathbf{g}_2 = \frac{\mathbf{f}_2}{\|\mathbf{f}_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2$

**Teorema 2.15** *Se  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto ortogonal de vetores não-nulos de um espaço com produto interno, então  $S$  é linearmente independente.*

*Prova:* Suponhamos a seguinte combinação linear dos vetores de  $S$ :

$$k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n = \mathbf{0}$$

Para que  $S$  seja um conjunto linearmente independente, os coeficientes devem ser todos iguais a zero, ou seja,  $k_1 = k_2 = \dots = k_n = 0$ . Para cada  $\mathbf{v}_i$  em  $S$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , fazendo o produto interno na equação acima:

$$\langle k_1\mathbf{v}_1 + k_2\mathbf{v}_2 + \dots + k_n\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{0}, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Agora, aplicando a propriedade 3 da definição de produto interno e reorganizando a equação, temos:

$$k_1\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2\langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_n\langle \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = 0$$

Pela ortogonalidade de  $S$  decorre que  $\langle \mathbf{v}_j, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ , para todo  $j \neq i$ , reduzindo então a equação a  $k_i \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = 0$ . Como esses vetores não são nulos, isso impede que o produto interno de  $\mathbf{v}_i$  com  $\mathbf{v}_i$  seja igual a zero, por causa da quarta propriedade da definição de produto interno. Logo  $k_i = 0$  para todo  $i = 1, 2, \dots, n$  e assim  $S$  é linearmente independente.

□

**Definição 2.16** *Uma base ortogonal de um espaço vetorial com produto interno é um conjunto ortogonal de vetores que forma uma base para esse espaço e uma base ortonormal é um conjunto ortonormal de vetores que é base para esse espaço.*

Um método construtivo e muito eficiente para encontrar uma base ortonormal de um espaço vetorial com produto interno é o **processo de ortonormalização de Gram-Schmidt**, exposto na prova do teorema a seguir.

**Teorema 2.17** *Todo espaço vetorial não nulo, com produto interno e de dimensão finita, tem uma base ortonormal.*

*Linhas gerais da prova:* Dado um espaço vetorial  $V$ , não nulo e de dimensão finita, o processo a seguir estabelece os passos para encontrar uma base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de  $V$ , a partir de uma base dada  $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_n\}$

**Passo 1:** Considere  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1$

**Passo 2:** Considere o subespaço  $W_1$  gerado por  $\mathbf{v}_1$ . Obtém-se o vetor  $\mathbf{v}_2$  por meio da fórmula:

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1$$

Definindo dessa forma,  $\mathbf{v}_2$  é ortogonal a  $\mathbf{v}_1$  e é fácil provar que  $\mathbf{v}_2$  não é nulo, pela independência linear da base original, conforme está ilustrado na figura 6.

**Passo 3:** Considere agora o subespaço  $W_2$  gerado por  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ . Da mesma forma que no passo 2, define-se o vetor  $\mathbf{v}_3$ , que será ortogonal tanto a  $\mathbf{v}_2$  quanto a  $\mathbf{v}_1$ , pela fórmula:

$$\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2$$

Também é possível provar que  $\mathbf{v}_3$  não é nulo, como pode ser visto na figura 7.

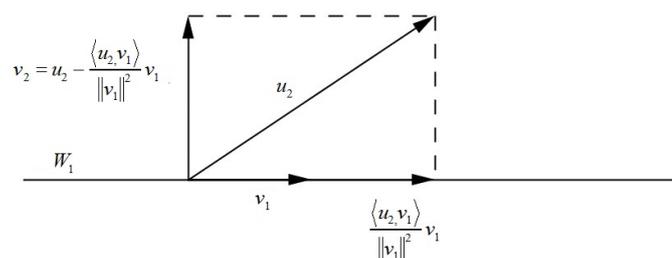


Figura 6: Vetor  $\mathbf{v}_2$  é ortogonal ao vetor  $\mathbf{v}_1$

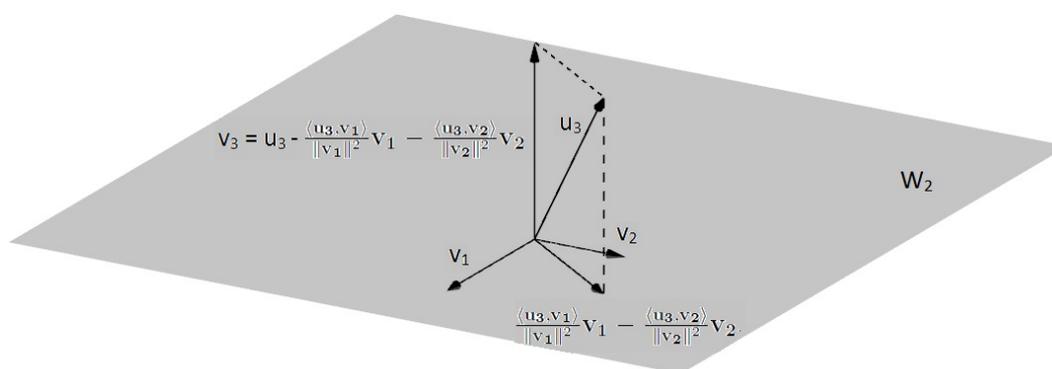


Figura 7: Componente  $u_3$  é ortogonal ao espaço  $W_2$  gerado

Prosseguindo da mesma forma, iremos obter  $n$  vetores que formam um conjunto ortogonal  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$ . Pelo teorema 2.15,  $S$  é um conjunto linearmente independente. Como  $V$  tem dimensão  $n$ , então  $S$  é uma base ortogonal de  $V$ . A partir desta base, é possível normalizar seus vetores para encontrar a procurada base ortonormal de  $V$ .

Portanto, esses passos completam a ideia central da demonstração do teorema.  $\square$

**Exemplo 2.18** Vamos aplicar o processo de Gram-Schmidt do último teorema para a base

$$\mathbf{u}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{u}_2 = (0, 1, 1) \quad \text{e} \quad \mathbf{u}_3 = (0, 1, 2)$$

do  $\mathbb{R}^3$  com produto interno usual. Seguindo os passos do processo, temos:

- $\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = (1, 0, 0)$ ;

- $\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = (0, 1, 1) - \frac{0}{1}(0, 1, 1) = (0, 1, 1);$
- $\mathbf{v}_3 = \mathbf{u}_3 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{u}_3, \mathbf{v}_2 \rangle}{\|\mathbf{v}_2\|^2} \mathbf{v}_2 = (0, 1, 2) - \frac{0}{1}(0, 1, 1) - \frac{3}{2}(0, 1, 1) = \left(0, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$

Assim, obtivemos a base ortogonal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3\}$  do  $\mathbb{R}^3$ . Agora, basta normalizar seus vetores para obter a seguinte base ortonormal:

$$\mathbf{g}_1 = (1, 0, 0), \quad \mathbf{g}_2 = \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right) \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_3 = \left(0, -\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

**Exemplo 2.19** Considere  $W$  o subespaço de  $C[-1, 1]$  gerado por  $\mathbf{f}_1 = x$  e  $\mathbf{f}_2 = x^2$ , ou seja, o conjunto de todos os polinômios da forma  $a_0 + a_1x + a_2x^2$ , onde os escalares  $a_0, a_1$  e  $a_2$  são reais. No Exemplo 2.9, já foi verificado que esses vetores são ortogonais, o que implica pelo Teorema 2.15 que formam uma base de  $W$ . Já no Exemplo 2.14, normalizamos essa base, obtendo os vetores

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x \quad \text{e} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2$$

Assim, tais vetores  $\mathbf{g}_1$  e  $\mathbf{g}_2$  formam uma base ortonormal de  $W$ .

**Definição 2.20** *Seja  $W$  um subespaço de um espaço vetorial com produto interno  $V$ . Um vetor  $\mathbf{u}$  de  $V$  é dito **ortogonal a  $W$**  se  $\mathbf{u}$  é ortogonal a cada vetor de  $W$ . O conjunto de todos os vetores de  $V$  que são ortogonais a  $W$  é chamado de **complemento ortogonal** de  $W$  e será representado por  $W^\perp$ .*

Pode ser demonstrado que o complemento ortogonal  $W^\perp$  é um subespaço vetorial de  $V$ .

**Teorema 2.21** *Se  $W$  é um subespaço de dimensão finita de um espaço vetorial com produto interno  $V$ , então cada vetor  $\mathbf{u} \in V$  pode ser expresso precisamente e de maneira única como:  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  onde  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$  e  $\mathbf{w}_2$  está em  $W^\perp$  (Figura 8).*

*Prova:* A prova será feita em duas partes, sendo que a primeira consiste em encontrar vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  atendendo às condições do Teorema, e a segunda em mostrar a unicidade de tais vetores.

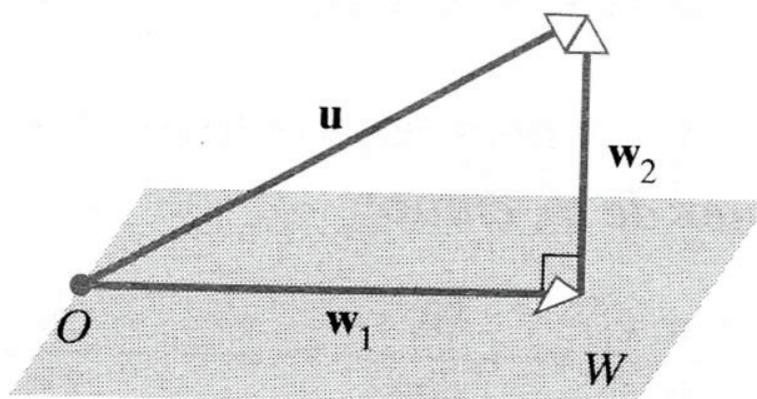


Figura 8: Teorema 2.21, da Projeção

Pelo processo de Gram-Schmidt temos uma base ortonormal  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  para  $W$ . Assim, para um vetor  $\mathbf{u} \in V$ , vamos definir os vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  da seguinte forma:

$$\mathbf{w}_1 = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle \mathbf{v}_n$$

e

$$\mathbf{w}_2 = \mathbf{u} - \mathbf{w}_1$$

Decorre que  $\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2 = \mathbf{w}_1 + (\mathbf{u} - \mathbf{w}_1) = \mathbf{u}$  e, portanto a primeira parte da prova se restringe a mostrar que  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$  e que  $\mathbf{w}_2$  é ortogonal a  $W$ . Como  $\mathbf{w}_1$  é combinação linear dos vetores da base de  $W$ , então  $\mathbf{w}_1$  está em  $W$ . Agora, para provar que  $\mathbf{w}_2$  é ortogonal a  $W$ , é necessário provar que o produto interno entre os vetores  $\mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}$  é igual a zero, onde  $\mathbf{w}$  é um vetor qualquer de  $W$ . Este vetor  $\mathbf{w}$  pode ser escrito como combinação linear dos vetores da base  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n\}$  de tal forma que:

$$\mathbf{w} = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$$

Assim,

$$\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u} - \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle - \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle \quad (5)$$

Mas

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n \rangle = k_1 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle + k_2 \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle + \dots + k_n \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle$$

Usando as definições de produto interno e de base ortonormal, podemos afirmar que:

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle k_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle k_2 + \cdots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_n \rangle k_n$$

Assim, conclui-se que  $\langle \mathbf{u}, \mathbf{w} \rangle$  e  $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{w} \rangle$  são iguais, logo a equação 5 fornece  $\langle \mathbf{w}_2, \mathbf{w} \rangle = 0$ .

Para provar a segunda parte, ou seja, a unicidade dos vetores  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  com as propriedades enunciadas neste teorema, escrevemos o vetor  $\mathbf{u}$  também da forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{w}'_1 + \mathbf{w}'_2 \quad (6)$$

onde  $\mathbf{w}'_1$  está em  $W$  e  $\mathbf{w}'_2$  é ortogonal a  $W$ . Se subtrairmos a equação  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  de 6, obtemos:

$$\mathbf{u} - \mathbf{u} = (\mathbf{w}'_1 - \mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2)$$

que é equivalente a

$$\mathbf{w}_1 - \mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \quad (7)$$

Como ambos os vetores  $\mathbf{w}_2$  e  $\mathbf{w}'_2$  são ortogonais a  $W$ , é fácil ver que sua diferença também será. Mas, como  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}'_1$  estão em  $W$ , segue da equação 7 que o vetor  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$  também está em  $W$ . Assim  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2$  deve ser ortogonal a si mesmo, isto é:

$$\langle \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2, \mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 \rangle = 0$$

Pelo item 4 da definição 2.1, chegamos então que  $\mathbf{w}'_2 - \mathbf{w}_2 = \mathbf{0}$ , logo  $\mathbf{w}'_2 = \mathbf{w}_2$ . Por 7,  $\mathbf{w}'_1 = \mathbf{w}_1$ , o que finaliza esta demonstração.

□

O vetor  $\mathbf{w}_1$  é então chamado de **projeção ortogonal** de  $\mathbf{u}$  em  $W$ , denotado por  $proj_W^{\mathbf{u}}$ , e o vetor  $\mathbf{w}_2$  é chamado de **componente de  $\mathbf{u}$  ortogonal a  $W$** , denotado por  $proj_{W^\perp}^{\mathbf{u}}$ . Esta nomenclatura para  $\mathbf{w}_1$  e  $\mathbf{w}_2$  explica então a referência ao teorema 2.21 por **Teorema da Projeção**. Assim, a fórmula  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$  desse referido teorema pode ser reformulada nessa nova notação:

$$\mathbf{u} = proj_W^{\mathbf{u}} + proj_{W^\perp}^{\mathbf{u}}$$

ou ainda

$$proj_{W^\perp}^{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}} \quad (8)$$

como pode ser ilustrado pela figura 9 a seguir.

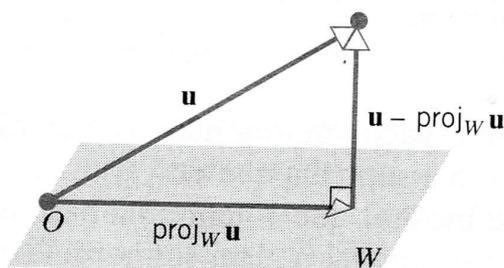


Figura 9: Projeção de  $u$  em  $W$

**Teorema 2.22** *Seja  $W$  um subespaço vetorial de dimensão finita de um espaço com produto interno  $V$ . Se  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é uma base ortonormal de  $W$  e  $\mathbf{u}$  é um vetor qualquer de  $V$ , então:*

$$\text{proj}_W^{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r$$

*Prova:* A partir do Teorema 2.21 sabe-se que:  $\mathbf{u} = \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$ , onde  $\mathbf{w}_1 = \text{proj}_W^{\mathbf{u}} \in W$  e  $\mathbf{w}_2 = \text{proj}_{W^\perp}^{\mathbf{u}} \in W^\perp$ . Como  $S = \{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é uma base de  $W$ , podemos escrever  $\mathbf{w}_1$  como combinação linear desta base:

$$\mathbf{w}_1 = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n$$

Fixado  $i = 1, 2, \dots, n$ , para cada vetor  $\mathbf{v}_i$  de  $S$ , temos:

$$\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_i \rangle = \langle k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n, \mathbf{v}_i \rangle = k_1 \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_i \rangle + k_2 \langle \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_i \rangle + \dots + k_r \langle \mathbf{v}_r, \mathbf{v}_i \rangle$$

Como  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r\}$  é um conjunto ortonormal, então

$$\langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_i \rangle = \|\mathbf{v}_i\|^2 = 1 \text{ e } \langle \mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j \rangle = 0, \text{ para todo } j \neq i.$$

Substituindo na expressão acima, segue que  $\langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_i \rangle = k_i$ , para cada  $i = 1, 2, \dots, n$ . Além disso, temos:

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_i \rangle + \langle \mathbf{w}_2, \mathbf{v}_i \rangle = \langle \mathbf{w}_1, \mathbf{v}_i \rangle$$

pois  $\mathbf{w}_2 \in W^\perp$  e  $\mathbf{v}_i \in W$ , para todo  $i$ . Portanto,

$$\text{proj}_W^{\mathbf{u}} = \mathbf{w}_1 = k_1 \mathbf{v}_1 + k_2 \mathbf{v}_2 + \dots + k_n \mathbf{v}_n = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 + \dots + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_r \rangle \mathbf{v}_r$$

□

**Exemplo 2.23** Suponha que  $\mathbb{R}^3$  tem o produto interno euclidiano, como em 3, e que  $W$  é o subespaço gerado pelos vetores ortonormais  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$ , ou seja,  $W$  é um plano em  $\mathbb{R}^3$ . Pelo Teorema 2.22, a projeção ortogonal de  $\mathbf{u} = (1, 1, 1)$  em  $W$  é:

$$proj_W^{\mathbf{u}} = \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_1 \rangle \mathbf{v}_1 + \langle \mathbf{u}, \mathbf{v}_2 \rangle \mathbf{v}_2 = 1(0, 1, 0) + \left(-\frac{1}{5}\right) \left(-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5}\right) = \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right)$$

Assim, este vetor  $proj_W^{\mathbf{u}}$  pertence ao plano  $W$ . O componente ortogonal de  $\mathbf{u}$  a  $W$  é:

$$proj_{W^\perp}^{\mathbf{u}} = \mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}} = (1, 1, 1) - \left(\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25}\right) = \left(\frac{21}{25}, 0, \frac{28}{25}\right)$$

Observemos que  $proj_{W^\perp}^{\mathbf{u}}$  é ortogonal aos dois vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , de modo que este vetor é ortogonal ao espaço gerado pelos vetores  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$ , como era de se esperar.

### 2.3.3 Melhor Aproximação - Mínimos Quadrados

Veremos que a projeção ortogonal de um vetor em um subespaço pode ser usada para resolver problemas de aproximação. Considere inicialmente que  $P$  é um ponto no espaço  $\mathbb{R}^3$  usual e  $W$  é um plano pela origem. Então traçando uma reta que passa por  $P$  e é perpendicular ao plano  $W$  obtém-se o ponto  $Q$  de  $W$  mais próximo de  $P$ , conforme vemos na figura 10. Chamando  $\mathbf{u} = \overrightarrow{OP}$  temos que a distância entre  $P$  e  $W$  é dada, de acordo com 8, por:

$$\|\mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}}\|$$

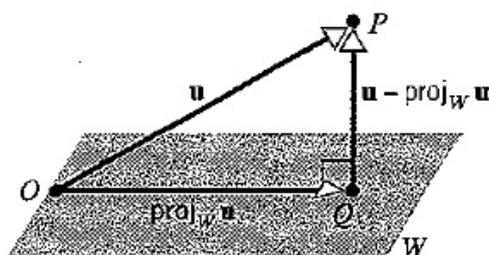


Figura 10: Ponto  $Q$ , o ponto de  $W$  mais próximo de  $P$

Isso significa que, dentre todos os vetores  $\mathbf{w} \in W$ , o vetor  $\mathbf{w} = proj_W^{\mathbf{u}}$  minimiza a distância  $\|\mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}}\|$ . Assim, consideraremos  $proj_W^{\mathbf{u}}$  como a melhor aproximação de  $\mathbf{u}$  por vetores em  $W$ . Tal conclusão pode ser generalizada para espaços vetoriais

arbitrários com produto interno, indicada no resultado abaixo, chamado **Teorema da melhor aproximação**.

**Teorema 2.24** *Se  $W$  é um subespaço de dimensão finita de um espaço com produto interno  $V$  e se  $\mathbf{u}$  é um vetor de  $V$ , então  $proj_W^{\mathbf{u}}$  é a melhor aproximação de  $\mathbf{u}$  em  $W$ , no seguinte sentido:*

$$\| \mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}} \| < \| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|$$

para cada vetor  $\mathbf{w}$  em  $W$  distinto de  $proj_W^{\mathbf{u}}$ .

*Prova:* Para cada vetor  $\mathbf{w}$  em  $W$  podemos escrever:

$$\mathbf{u} - \mathbf{w} = (\mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}}) + (proj_W^{\mathbf{u}} - \mathbf{w})$$

Pelo Teorema 2.21,  $\mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}}$  é ortogonal a  $W$  e  $proj_W^{\mathbf{u}} - \mathbf{w}$  está em  $W$ , então esses vetores são ortogonais. Pelo Teorema de Pitágoras (Teorema 2.10), segue que:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|^2 = \| (\mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}}) \|^2 + \| (proj_W^{\mathbf{u}} - \mathbf{w}) \|^2$$

Se  $\mathbf{w} \neq proj_W^{\mathbf{u}}$ , então o termo da direita nesta última equação é positivo e, portanto:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{w} \|^2 > \| \mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}} \|^2$$

ou equivalentemente:

$$\| \mathbf{u} - \mathbf{w} \| > \| \mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}} \|$$

□

**Exemplo 2.25** No espaço  $\mathbb{R}^3$  com o produto interno definido como em 3, consideremos  $W$  o mesmo plano do Exemplo 2.23, gerado pelos vetores ortonormais  $\mathbf{v}_1 = (0, 1, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 = (-\frac{4}{5}, 0, \frac{3}{5})$  e consideremos o mesmo vetor  $\mathbf{u} = (1, 1, 1) \in \mathbb{R}^3$ . Podemos concluir, através do Teorema 2.24, que a projeção ortogonal de  $\mathbf{u}$  em  $W$ , dada por  $proj_W^{\mathbf{u}} = (\frac{4}{25}, 1, -\frac{3}{25})$  é o vetor que mais aproxima  $\mathbf{u}$  de  $W$ . Isto significa que  $\| \mathbf{u} - proj_W^{\mathbf{u}} \|$  é a menor distância possível entre o ponto  $(1, 1, 1)$  e esse plano  $W$ .

**Exemplo 2.26** Vamos considerar o espaço das funções contínuas com o produto interno definido como em 4. Queremos encontrar a função que melhor se aproxima de uma dada função contínua  $\mathbf{f}$  em  $[a, b]$ , dentre todas as funções de um subespaço específico  $W$  de  $C[a, b]$ . A “melhor aproximação” será aquela função  $\mathbf{g}$  cuja distância a  $W$  é mínima. Assim, de acordo com o Teorema 2.24, a melhor aproximação de  $\mathbf{f}$  por funções em  $W$  é a função  $\mathbf{g} = \text{proj}_W^{\mathbf{f}}$ , chamada de **aproximação de mínimos quadrados** de  $\mathbf{f}$  em  $W$ .

Em particular se voltarmos ao espaço vetorial  $C[-1, 1]$  e ao subespaço  $W$  gerado pelos vetores ortonormais  $\mathbf{g}_1 = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}x$  e  $\mathbf{g}_2 = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}x^2$  do Exemplo 2.19, seja  $\mathbf{h} = e^x \in C[-1, 1]$ . Pelo Teorema 2.22, a projeção ortogonal de  $\mathbf{h}$  em  $W$  é a função:

$$\text{proj}_W^{\mathbf{h}} = \langle \mathbf{h}, \mathbf{g}_1 \rangle \mathbf{g}_1 + \langle \mathbf{h}, \mathbf{g}_2 \rangle \mathbf{g}_2$$

onde

- $\langle \mathbf{h}, \mathbf{g}_1 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x dx = \frac{\sqrt{6}}{e}$
- $\langle \mathbf{h}, \mathbf{g}_2 \rangle = \int_{-1}^1 e^x \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} x^2 dx = -2\sqrt{10}e$

Logo,

$$\text{proj}_W^{\mathbf{h}} = \frac{\sqrt{6}}{e} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} x + -2\sqrt{10}e \cdot \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}} x^2 = \frac{3}{e} x - 10ex^2$$

isto é, esta é a função que mais aproxima  $\mathbf{h} = e^x$  em  $W$ .

## 2.4 Coeficientes de Fourier

Uma função na forma

$$t(x) = c_0 + c_1 \cos x + c_2 \cos 2x + \dots + c_n \cos nx + d_1 \text{sen} x + d_2 \text{sen} 2x + \dots + d_n \text{sen} nx$$

onde  $c_n$  ou  $d_n$  não são nulos, é conhecida como **polinômio trigonométrico** de ordem  $\mathbf{n}$ . São então combinações lineares das funções reais

$$1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), \text{sen}(x), \text{sen}(2x), \dots, \text{sen}(nx)$$

**Teorema 2.27** *As  $2n + 1$  funções reais*

$$1, \cos(x), \cos(2x), \dots, \cos(nx), \operatorname{sen}(x), \operatorname{sen}(2x), \dots, \operatorname{sen}(nx)$$

*são linearmente independentes.*

*Prova:* Pelo Teorema 2.15, basta provarmos que essas funções são duas a duas ortogonais. Considerando que  $k$  e  $l$  são números naturais entre 1 e  $n$ , a partir do Cálculo Integral e da Trigonometria, temos que:

1) Para  $k \neq l$ , ambos não nulos:  $\langle \cos(kx), \cos(lx) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \cos(lx) dx = 0$ . Então  $\cos(kx)$  e  $\cos(lx)$  são ortogonais.

2) Para  $l = 0$  e  $k \neq 0$ :  $\langle \cos(kx), 1 \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(kx) dx = 0$ . Logo  $\cos(kx)$  e a função 1 são ortogonais.

3) Para  $k \neq l$ , ambos não nulos:  $\langle \cos(kx), \operatorname{sen}(lx) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \operatorname{sen}(lx) dx = 0$ . Logo  $\cos(kx)$  e  $\operatorname{sen}(lx)$  são ortogonais.

4) Para  $k = l$ , ambos não nulos:  $\langle \cos(kx), \operatorname{sen}(lx) \rangle = \int_0^{2\pi} \cos(kx) \operatorname{sen}(kx) dx = 0$ . Logo  $\cos(kx)$  e  $\operatorname{sen}(lx)$  também são ortogonais.

5) Para  $k \neq l$ , ambos não nulos:  $\langle \operatorname{sen}(kx), \operatorname{sen}(lx) \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kx) \operatorname{sen}(lx) dx = 0$ . Logo  $\operatorname{sen}(kx)$  e  $\operatorname{sen}(lx)$  também são ortogonais.

6) Para  $l = 0$  e  $k \neq 0$ :  $\langle \operatorname{sen}(kx), 1 \rangle = \int_0^{2\pi} \operatorname{sen}(kx) dx = 0$ . Então as funções  $\operatorname{sen}(kx)$  e 1 também são ortogonais.

□

Por consequência, este conjunto de funções forma uma base de um subespaço  $W$  de dimensão  $2n + 1$  de  $C[0, 2\pi]$ .

Vamos encontrar a aproximação de mínimos quadrados de uma função  $\mathbf{f} = f(x)$  contínua no intervalo  $[0, 2\pi]$  por polinômios trigonométricos de ordem  $n$  ou menor. Como visto anteriormente, esta aproximação é dada pela projeção ortogonal da função  $\mathbf{f}$  sobre  $W$ . Pelo Teorema 2.22, precisamos encontrar uma base ortonormal  $\mathbf{g}_0, \mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_{2n}$  de  $W$ ,

de forma que  $proj_W^{\mathbf{f}}$  é dada pela fórmula:

$$proj_W^{\mathbf{f}} = \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle \mathbf{g}_0 + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle \mathbf{g}_1 + \cdots + \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle \mathbf{g}_{2n} \quad (9)$$

Utilizando o produto interno para funções contínuas dado por  $\int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$ , temos que  $\|1\| = \sqrt{2\pi}$ ,  $\|\cos kx\| = \sqrt{\pi}$ ,  $\|\text{sen} kx\| = \sqrt{\pi}$ , para todo natural  $k = 1, 2, \dots, n$ . A base ortonormal, obtida pelo processo de ortonormalização de Gram-Schmidt, fica da seguinte forma:

$$\mathbf{g}_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathbf{g}_1 = \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \mathbf{g}_n = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad \mathbf{g}_{n+1} = \frac{\text{sen} x}{\sqrt{\pi}}, \quad \dots, \quad \mathbf{g}_{2n} = \frac{\text{sen} nx}{\sqrt{\pi}}$$

Aplicando na fórmula 9, renomeando os termos:

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_0 \rangle, \quad a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_1 \rangle, \quad \dots, \quad a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_n \rangle,$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+1} \rangle, \quad b_2 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{n+2} \rangle, \quad \dots, \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \langle \mathbf{f}, \mathbf{g}_{2n} \rangle$$

e reorganizando a fórmula agora com os “novos termos”, temos:

$$\mathbf{f} \simeq proj_W^{\mathbf{f}} = \frac{a_0}{2} + (a_1 \cos x + \cdots + a_n \cos nx) + (b_1 \text{sen} x + \cdots + b_n \text{sen} nx) \quad (10)$$

onde

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx,$$

$$a_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos x}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos x dx,$$

$$\vdots$$

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx,$$

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\text{sen} x}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen} x dx,$$

$$\vdots$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{\text{sen}nx}{\sqrt{\pi}} dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}nx dx.$$

A fórmula 10 agora pode ser reescrita como um somatório:

$$\mathbf{f} \simeq \text{proj}_W \mathbf{f} = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n a_k \cos kx + \sum_{k=1}^n b_k \text{sen}kx \quad (11)$$

onde os números

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, \dots, n) \quad \text{e} \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}kx dx \quad (k = 1, \dots, n) \quad (12)$$

são conhecidos como **coeficientes de Fourier** de  $\mathbf{f}$ . A aproximação de mínimos quadrados melhora à medida que aumenta o número de termos do polinômio trigonométrico.

**Exemplo 2.28** Considere por exemplo a função  $\mathbf{f} = f(x) = x$  em  $C[0, 2\pi]$ . Para encontrar a aproximação de mínimos quadrados de  $\mathbf{f}$ , primeiro calculamos seus coeficientes de Fourier, utilizando integração por partes.

- $a_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x dx = 2\pi;$
- Para  $k = 1, 2, \dots, n$ :  $a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \cos kx dx = 0;$
- Para  $k = 1, 2, \dots, n$ :  $b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \text{sen}kx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} x \text{sen}kx dx = -\frac{2}{k}.$

Assim, a aproximação de mínimos quadrados de  $x$  em  $[0, 2\pi]$  é dada pelo seguinte polinômio trigonométrico, de ordem menor ou igual a  $n$ , de acordo com a equação 10:

$$x \simeq \pi - 2 \left( \text{sen}x + \frac{\text{sen}2x}{2} + \frac{\text{sen}3x}{3} + \dots + \frac{\text{sen}nx}{n} \right)$$

A Figura 11 abaixo ilustra o gráfico de  $\mathbf{f} = x$  e algumas de suas aproximações de mínimos quadrados, na qual podemos observar que a aproximação melhora à medida que  $n$  aumenta.

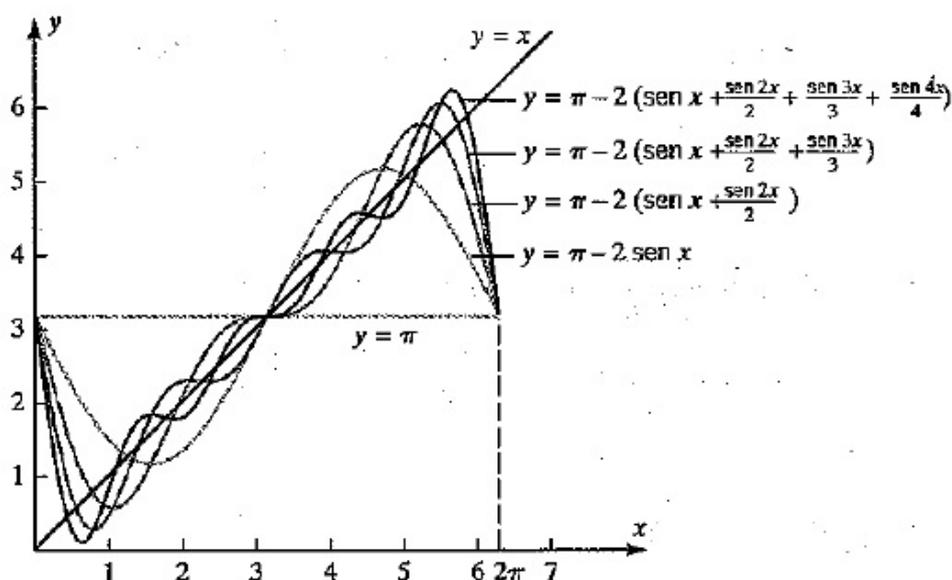


Figura 11: Gráfico de  $x=y$  e suas aproximações

### 3 RESULTADOS E DISCUSSÕES

Como visto na seção 2.2, vamos considerar uma onda sonora que é uma soma finita de ondas senoidais, representada por  $q(t)$  na equação 2. Para uma onda sonora periódica  $p(t)$  com período  $T$ , que não se comporta dessa forma, comentamos que a resposta do ouvido a essa onda coincide com a resposta do ouvido a uma onda do tipo  $q(t)$ . Ou seja, existe uma onda sonora  $q(t)$ , dada pela equação 2, que produz a mesma resposta que  $p(t)$ , mesmo sendo funções diferentes do tempo (ANTON & RORRES, 2001).

Queremos determinar as amplitudes, frequências e ângulos de fase das componentes senoidais de  $q(t)$ . É razoável esperar que  $p(t)$  e  $q(t)$  tenham o mesmo período  $T$  e consequentemente suas componentes senoidais também terão período  $T$ . Assim, as frequências  $\frac{\omega_k}{2\pi}$  dos termos senoidais devem ser múltiplos da frequência de  $q(t)$ , que é dada pela fórmula da Física  $f = \frac{1}{T}$ . Logo,

$$\omega_k = \frac{2k\pi}{T}, \quad k = 1, 2, \dots$$

Conhecendo o limiar diferencial do ouvido, que não pode perceber ondas com frequências que ultrapassam 20.000 cps, podemos estabelecer um limite para o inteiro  $k$  de forma que

$\frac{w_k}{2\pi} = \frac{k}{T} < 20.000$ . Então,  $q(t)$  fica da forma:

$$q(t) = A_0 + A_1 \text{sen} \left( \frac{2\pi t}{T} - \delta_1 \right) + \dots + A_n \text{sen} \left( \frac{2n\pi t}{T} - \delta_n \right)$$

sendo que  $n$  é o inteiro tal que  $\frac{n}{T}$  não é maior que 20.000 cps.

Estabelecida a relação de  $p(t)$  e  $q(t)$  para frequências, trabalharemos agora com as amplitudes representadas por  $A_0, A_1, \dots, A_n$  e com os ângulos de fase  $\delta_0, \delta_1, \dots, \delta_n$ . Porém, o sistema auditivo é criterioso, de maneira a "escolher" a função  $q(t)$  que será uma boa aproximação para  $p(t)$ , no sentido de que o erro desta aproximação não será percebido pelo ouvido. Este erro, dado por  $e(t) = p(t) - q(t)$  será usado para definir o seguinte critério:

$$\int_0^T [e(t)]^2 dt = \int_0^T [p(t) - q(t)]^2 dt \quad (13)$$

deve ser o menor possível. Tal integral é proporcional à energia acústica da onda de erro  $e(t)$ . Assim, a diferença energética entre as ondas sonoras, representada pelas formas de ondas ( $p(t)$  e  $q(t)$ ), determina se o ouvido percebe tal diferença ou não. Em suma quanto menor a diferença de energia, mais tais ondas se aproximarão, logo proporcionarão um erro tendendo a zero (ANTON & RORRES, 2001).

Matematicamente, a função  $q(t)$  em 13 é a aproximação de mínimos quadrados de  $p(t)$  no espaço  $C[0, T]$  das funções contínuas no intervalo  $[0, T]$ , ou seja,  $q(t) = \text{proj}_{C[0, T]}^{p(t)}$ . Fazendo uma mudança de escala, do intervalo  $[0, 2\pi]$  para o intervalo  $[0, T]$  nos coeficientes de Fourier dados em 12 e em  $q(t)$  dada pela equação 11, temos que:

$$q(t) = \frac{a_0}{2} + \left( a_1 \cos \frac{2\pi}{T} t + \dots + a_n \cos \frac{2n\pi}{T} t \right) + \left( b_1 \text{sen} \frac{2\pi}{T} t + \dots + b_n \text{sen} \frac{2n\pi}{T} t \right) \quad (14)$$

é a função que minimiza o erro quadrático médio dado em 13, onde

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos \frac{2k\pi t}{T} dt, \quad k = 0, 1, 2, \dots, n$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \text{sen} \frac{2k\pi t}{T} dt, \quad k = 1, 2, \dots, n$$

**Exemplo 3.1** Por fim, vamos exemplificar com uma onda sonora  $p(t)$  no formato de serra, que possui uma frequência de 5000 cps, como mostrado na figura 12.

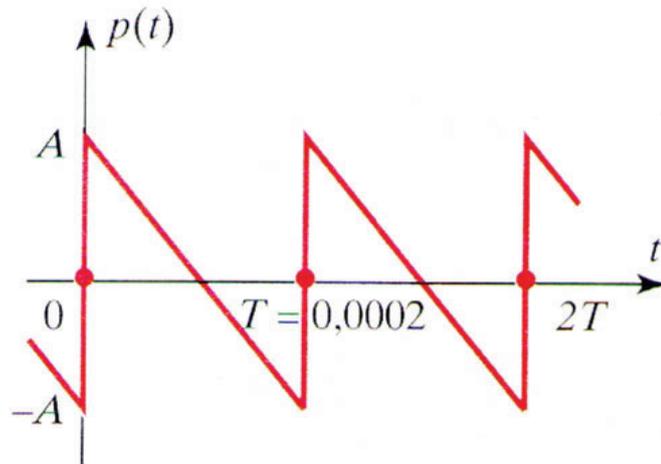


Figura 12: Onda Serreada  $p(t)$

Suponhamos que a pressão atmosférica normal é ao nível zero e a amplitude máxima da onda é  $A$ . O período básico da onda é  $T = 1/5000$  segundo. No intervalo de  $t = 0$  até  $t = T$ , a função  $p(t)$  é representada pela equação:

$$p(t) = \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right)$$

Os coeficientes de Fourier são dados pelas integrais:

$$a_0 = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) dt = 0$$

e para  $k = 1, 2, \dots$ :

$$a_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \cos \left( \frac{2kt\pi}{T} \right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) \cos \left( \frac{2kt\pi}{T} \right) dt = 0$$

$$b_k = \frac{2}{T} \int_0^T p(t) \text{sen} \left( \frac{2kt\pi}{T} \right) dt = \frac{2}{T} \int_0^T \frac{2A}{T} \left( \frac{T}{2} - t \right) \text{sen} \left( \frac{2kt\pi}{T} \right) dt = \frac{2A}{k\pi}$$

Agora podemos analisar como esta onda  $p(t)$  é percebida pelo ouvido humano. Conhecendo a capacidade da frequência da onda sonora que o ouvido pode interpretar (20.000 cps), para que  $\frac{k}{T} \leq 20.000$ , devemos ter  $k = 4$ . Assim, a aproximação de mínimos quadrados para  $p(t)$  fica:

$$q(t) = \frac{2A}{\pi} \left( \text{sen} \frac{2\pi}{T} t + \frac{1}{2} \text{sen} \frac{4\pi}{T} t + \frac{1}{3} \text{sen} \frac{6\pi}{T} t + \frac{1}{4} \text{sen} \frac{8\pi}{T} t \right)$$

A figura 13, abaixo mostra graficamente as duas formas de ondas  $p(t)$  e  $q(t)$  ao longo de um determinado período. Conclui-se que mesmo que  $q(t)$  não seja uma boa aproximação a cada ponto da onda  $p(t)$ , ambas as ondas produzem o mesmo estímulo sonoro para o ouvido. À medida que aumenta o número de termos do polinômio trigonométrico, a aproximação de mínimos quadrados se torna mais eficiente.

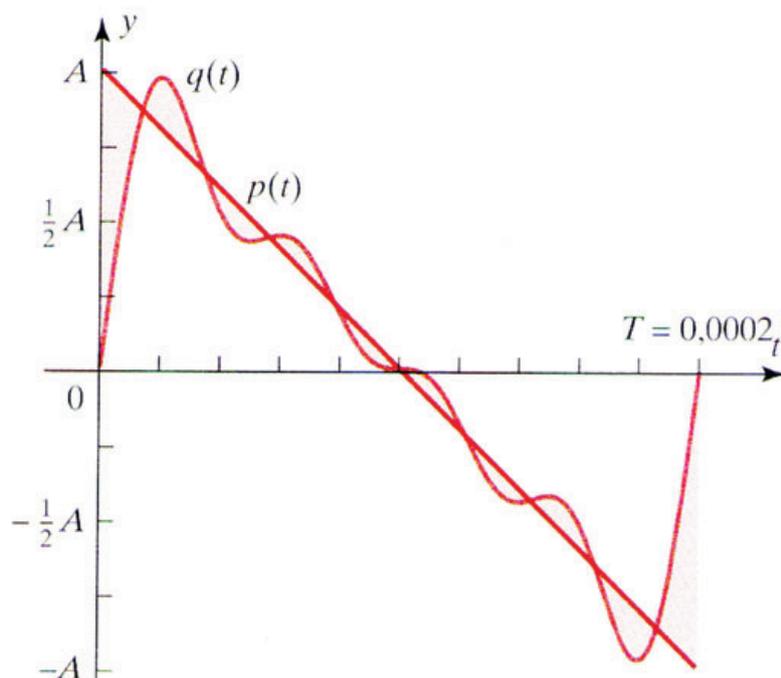


Figura 13: Gráficos das ondas  $p(t)$  e sua aproximação de mínimos quadrados  $q(t)$

## 4 CONCLUSÃO

Sabemos que o mecanismo da audição humana é bastante complexo, envolvendo a propagação do som em um meio físico, seu processamento fisiológico por meio das estruturas que compõem o ouvido, o envio ao cérebro por impulsos elétricos e sua interpretação pelo cérebro. Para a interpretação do sinal sonoro no cérebro, considera-se que o critério utilizado é o de aproximar a onda sonora  $p$  que chega por uma onda  $q$  que pode ser representada pela equação 14, chamada de aproximação de mínimos quadrados de  $f$ , onde se utiliza o limiar de frequência captada pelo ouvido humano para determinar o valor de  $n$  na equação. Isto significa que o indivíduo ouvirá da mesma forma as duas ondas,  $p$  e  $q$ ,

enviadas ao cérebro dele. Com isso, é possível simular o reconhecimento da onda sonora pelo cérebro.

Conclui-se que a álgebra linear é uma área da matemática de grande aplicação em novos campos de estudos. Neste artigo, com diferentes ferramentas matemáticas, pode-se encontrar uma aplicação de grande interesse na área biofísica.

## 5 REFÊRENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BISTAFA, R. Sylvio. Acústica aplicada ao controle do ruído. 1ª ed. Edgard Blucher, 2006.

BRUNNER & SUDDARTH. Tratado de Enfermagem Médico-Cirúrgica. 10ª ed. Guanabara Koogan, 2006.

CALLIOLI, Carlos A.; DOMINGUES, Hygino H. & COSTA, Roberto C. F. Álgebra Linear e Aplicações. 6ª ed. São Paulo: Atual, 1990.

GARCIA, Eduardo A.C. Biofísica. Sarvier, 1ª ed. 2002.

HENEINE, Ibrahim Fellippe. Biofísica Básica. 8ª ed. Atheneu, 2008.

HOWARD, Anton & RORRES, Chris. Álgebra Linear com Aplicações. 8ª ed. Porto Alegre: Bookman, 2001.

LIMA, Elon Lages. Álgebra Linear. 7ª ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2004.