

PLANEJAMENTO DE EXPERIMENTOS VISANDO A CONSTRUÇÃO DE MODELOS DE SISTEMAS MECÂNICOS

RESUMO

Este trabalho apresenta o estudo sobre o planejamento de experimentos através de Superfície de Resposta (SR), permitindo obter uma relação entre as respostas e as variáveis do projeto, visando a otimização do projeto em relação às variáveis de interesse. Por meio da Superfície de Resposta, obtém-se uma função matemática que melhor representa os dados do experimento, permitindo fazer simulações do processo. Assim, as repetições de experimentos são reduzidas, economizando tempo e evitando custos desnecessários.

As técnicas estudadas são aplicadas em um problema prático de Engenharia Mecânica que visa determinar as melhores condições de corte no fresamento de aço – otimizando a velocidade de corte, o avanço por dente e a profundidade do corte – com o objetivo de minimizar a formação de rebarbas nas bordas laterais e de saída durante a usinagem do aço utilizando ferramentas de metal duro. Por fim, foram desenvolvidos códigos computacionais para fazer simulações numéricas e analisar com mais precisão os resultados.

Palavras-chave: planejamento de experimentos, superfície de resposta, otimização sequencial, fresamento de aço, simulação numérica

ABSTRACT

This paper presents the study about the planning of experiments through Surface Response (RS), allowing to obtain a relation between the answers and the project variables, in order to optimize the design in relation to the variables of interest. Through Surface Response a mathematical function that better represents the data of the experiment can be obtained and applied in the process simulation. Thus, the experiment repetitions are reduced, saving time and avoiding unnecessary costs.

The studied techniques are applied on a practical Mechanical Engineering problem that aims to determine the best conditions of cut in the milling of steel – optimizing the cutting speed, the feed per tooth and the depth of cut – aiming to decrease the formation of burrs at the lateral and exit edges during face milling of mould steel using carbide tools. Finally, computer codes were developed to make numerical simulations and analyze results more accurately.

Keywords: experiment planning, Surface Response, sequential optimization, milling of steel, numerical simulation

1. INTRODUÇÃO

No estudo de sistemas que apresentam diversas variáveis, muitas vezes não é possível uma solução analítica. Em outras vezes, esta solução existe, mas apresenta tal complexidade que não é interessante trabalhar com ela. Essas situações são constantes em problemas de engenharia. Dessa forma, é necessário utilizar estratégias para contornar esses problemas. Assim nascem os métodos empíricos, que utilizam de técnicas estatísticas e geram uma aproximação para a modelagem do sistema. Ainda que tal aproximação sempre apresente um erro em relação ao sistema real, é possível direcionar a coleta de dados de forma a reduzir a incerteza sobre o resultado.

2. FUNDAMENTOS ESTATÍSTICOS

A partir dos dados obtidos em experimentos, é necessário aplicar corretamente as técnicas estatísticas para encontrar resultados desejados. Neste sentido, é importante definir algumas grandezas estatísticas. Para tanto, utiliza-se aqui um exemplo retirado do livro de Barros Neto et al (1995), simples e de fácil abstração, mas que contempla todas as grandezas necessárias.

Neste exemplo, o objetivo é saber quantos grãos existem em um quilo de feijão. A solução mais direta é simplesmente contar os grãos. Porém, essa solução pode se tornar muito trabalhosa, e então deve-se procurar outras abordagens. Também é possível descobrir o peso de apenas um grão e dividir o peso total por este valor, obtendo assim uma estimativa do número total de grãos. Mas para chegar nesse resultado, é preciso supor que todos os grãos possuem o mesmo peso, e essa suposição pode gerar erros significativos. É fácil perceber as consequências dessa suposição, afinal, cada grão pode apresentar um peso diferente, e assim o resultado final também será diferente. Para diminuir essa variação, pode-se utilizar nos cálculos a média dos pesos de uma amostra de grãos, e não apenas o peso de um.

Ainda neste exemplo, o conjunto formado por todos os grãos é chamado de população. Esta população é um conjunto finito, mas é possível existir populações infinitas. Amostra é a parcela da população que é selecionada para representar a população. Quando se mede o peso de um grão para estimar a quantidade total, está selecionando uma amostra de um indivíduo apenas. Uma amostra maior pode representar melhor a população, mas também demanda maiores custos. Além disso, para cumprir com mais eficiência o objetivo, a amostra deve ser

aleatória. Define-se a média amostral como a média aritmética de todas as medidas obtidas na amostra, ou seja:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n} \quad (1)$$

sendo x_i é a i -ésima observação e n é o número total de observações na amostra. Porém, podem existir infinitos conjuntos com a mesma média, mas isso não significa que eles são conjuntos iguais, ou mesmo parecidos, pois a média é uma grandeza que não expressa como os valores do conjunto estão dispersos à sua volta. Dessa forma, define-se a variância amostral:

$$s^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}{n-1} \quad (2)$$

sendo \bar{x} é a média amostral. A partir da variância, pode-se definir o desvio padrão amostral:

$$s = (s^2)^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

sendo s^2 é a variância das observações na amostra.

2.1 Distribuição normal

No estudo das variáveis aleatórias, pode-se destacar o grupo que segue a chamada *distribuição normal padronizada*. Essas variáveis, independentemente da sua natureza, apresentam o mesmo perfil de distribuição de valores em torno da média, em função do desvio padrão. Dessa forma pode-se, por exemplo, afirmar que 34,1% da população de uma variável aleatória apresentará valores entre a média e a média mais o desvio padrão. A representação gráfica auxilia o entendimento destas propriedades da curva normal, conforme pode ser observado na Fig. 1.

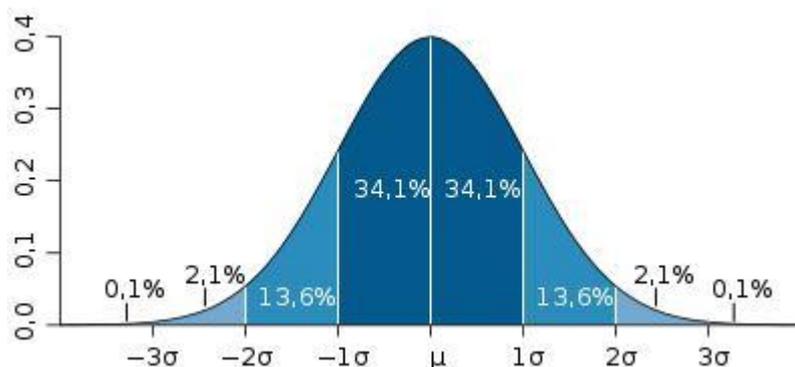


Figura 1 - Exemplo de uma distribuição normal padronizada

Obviamente, para se perceber esse comportamento, é necessário que a amostra apresente um tamanho considerável.

Existem diversos teoremas provando que quando uma variável é função de muitas variáveis independentes, com o mesmo nível de importância, a sua distribuição tenderá para a normalidade, não importa qual seja a natureza das distribuições das variáveis individuais (Morettin, 1999).

Como essa distribuição não depende da natureza da variável, o estudo da curva normal é muito importante. Existem funções que aproximam a curva normal, mas normalmente a informação mais importante contida nos gráficos é a integral dessa curva. É através desse procedimento que se encontra valores como os 34,1% citados anteriormente. Esses valores são tabelados, para facilitar sua utilização.

2.2 Covariância e correlação

Ainda utilizando como população o conjunto de grãos de feijão, considere duas variáveis aleatórias: o peso e o volume de cada grão. Apesar de serem variáveis aleatórias, elas apresentam uma relação entre si: um grão de volume maior tende a ser mais pesado. Sabe-se que essa não é uma relação rígida: sempre haverá variações. Mas ainda assim é interessante conhecer essa relação. Assim, define-se a covariância como sendo:

$$Cov(x, y) = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{n - 1} \quad (4)$$

sendo que (x_i, y_i) são observações individuais, x e y são as variáveis aleatórias, neste exemplo, o peso e o volume respectivamente, (\bar{x}, \bar{y}) são as médias amostrais e n é o número de

elementos da amostra. Porém, o valor da covariância depende da escala utilizada para medir x e y . Dessa forma, não se pode comparar diretamente duas covariâncias de populações diferentes. Para efeito de comparação, torna-se necessário usar uma covariância adimensional, e assim define-se o coeficiente de correlação entre duas variáveis:

$$r(x, y) = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left[\frac{(x_i - \bar{x})}{S_x} \right] \left[\frac{(y_i - \bar{y})}{S_y} \right] \quad (5)$$

sendo que S_x e S_y são os desvios padrão amostrais. Esse coeficiente varia de -1 a 1, e se duas variáveis forem independentes, seu coeficiente de correlação será zero. É importante ressaltar que a recíproca não é verdadeira: se o coeficiente de correlação for zero, não significa necessariamente que as variáveis são independentes entre si.

2.3 Estimativa do erro experimental

Quando um ensaio é realizado duas ou mais vezes, é possível estimar o erro experimental. Porém, é necessária uma repetição autêntica, ou seja, todas as etapas do processo, sem exceção, devem ser feitas novamente, além de serem realizados em ordem aleatória. Assim feito, pode-se avaliar a significância estatística dos resultados.

A partir dos resultados de um mesmo conjunto de dados, toma-se a variância referente à combinação de níveis específicos como uma estimativa da verdadeira variância devido aos erros aleatórios do procedimento experimental. Sendo assim, pode-se combinar as informações das repetições de todos os ensaios para estimá-la com um maior número de graus de liberdade.

Em um caso geral, onde cada ensaio for repetido n_i vezes e houver m ensaios diferentes, a estimativa conjunta da variância experimental será dada por

$$s^2 = \frac{v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 + \dots + v_m s_m^2}{v_1 + v_2 + \dots + v_m} \quad (6)$$

onde $v_i = n_i - 1$ é o número de graus de liberdade de s_i^2 , que é a estimativa da variância do i -ésimo ensaio.

Para variáveis independentemente distribuídas, a variância da combinação linear é dada por:

$$\sigma_y^2 = \sum_i a_i^2 \sigma_i^2 \quad (7)$$

onde a_i é o coeficiente da combinação linear de i valores e σ_i^2 é a variância.

Para um caso mais simples, por exemplo, em que cada ensaio foi feito duas vezes, terá sido feita a média de duas observações independentes e, portanto, pode-se fazer $\sigma_i^2 = \frac{\sigma^2}{2}$, onde σ^2 é a variância de uma observação individual. Usando a estimativa s^2 no lugar de σ^2 , obtém-se finalmente uma estimativa, com m graus de liberdade, do erro padrão de um efeito:

$$s(\text{efeito}) = \left(\frac{s^2}{2} \right)^{1/2} \quad (8)$$

3. SUPERFÍCIE DE RESPOSTA

Em um determinado sistema, podem ser escolhidas várias variáveis e estudadas a sua influência no resultado final. Estas variáveis podem interagir entre si ou podem ter efeitos independentes. Este estudo é chamado ajuste de curvas.

Para selecionar o melhor ajuste, precisa-se eleger qual técnica a ser utilizada. Um método bastante comum é conhecido como Método dos Quadrados Mínimos (MQM), que consiste em minimizar o quadrado do erro da aproximação em cada ponto onde foram coletados os dados. Ou seja:

$$\min S_r = \min \sum_{i=1}^n e_i^2 = \min \sum_{i=1}^n (y_i - \varphi(x_i))^2 \quad (9)$$

onde:

$$\varphi(x_i) = \alpha_0 g_0(x_i) + \alpha_1 g_1(x_i) + \dots + \alpha_n g_n(x_i) \quad (10)$$

sendo n o número de pontos onde foram coletados os dados, y_i o valor obtido experimentalmente, x_i o valor da variável que tem o seu efeito estudado e $\varphi(x_i)$ o modelo escolhido para o ajuste. Desenvolvendo o somatório, tem-se:

$$\min F(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) = \sum_{i=1}^n d_i^2 = \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_0 g_0(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_n g_n(x_i)]^2 \quad (11)$$

Para encontrar os parâmetros α_j que minimizem a função apresentada em (11), deve-se anular o gradiente desta função encontrando, então, o ponto crítico de $F(\alpha)$.

$$\left. \frac{\partial F}{\partial \alpha_j} \right|_{(\alpha_0, \dots, \alpha_n)} = 0 \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (12)$$

Desta forma, tem-se:

$$2 \sum_{i=1}^n [y_i - \alpha_0 g_0(x_i) - \alpha_1 g_1(x_i) - \dots - \alpha_n g_n(x_i)] (-g_j(x_i)) = 0 \quad (13)$$

Assim, obtém-se um sistema onde a solução são os pontos críticos da função a ser minimizada. A equação anterior pode ser reescrita na forma matricial:

$$\begin{aligned} \left[\sum_{i=1}^m g_0(x_i) g_0(x_i) \right] \alpha_0 + \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i) g_0(x_i) \right] \alpha_1 + \dots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i) g_0(x_i) \right] \alpha_n &= \sum_{i=1}^m y_i g_0(x_i) \\ \left[\sum_{i=1}^m g_0(x_i) g_1(x_i) \right] \alpha_0 + \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i) g_1(x_i) \right] \alpha_1 + \dots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i) g_1(x_i) \right] \alpha_n &= \sum_{i=1}^m y_i g_1(x_i) \\ \vdots \\ \left[\sum_{i=1}^m g_0(x_i) g_n(x_i) \right] \alpha_0 + \left[\sum_{i=1}^m g_1(x_i) g_n(x_i) \right] \alpha_1 + \dots + \left[\sum_{i=1}^m g_n(x_i) g_n(x_i) \right] \alpha_n &= \sum_{i=1}^m y_i g_n(x_i) \end{aligned} \quad (14)$$

E simplificada:

$$A \alpha = b$$

$$\alpha = A^{-1} b \quad (15)$$

onde b depende dos resultados obtidos em cada experimento e a matriz A é a matriz Hessiana de $F(\alpha)$. Considerando $\varphi(x)$ uma aproximação polinomial de grau n , o sistema de equações lineares pode ser escrito como:

$$\begin{cases} \alpha_0 \sum x_i^0 + \alpha_1 \sum x_i + \alpha_2 \sum x_i^2 + \dots + \alpha_n \sum x_i^n = \sum y_i \\ \alpha_0 \sum x_i + \alpha_1 \sum x_i^2 + \alpha_2 \sum x_i^3 + \dots + \alpha_n \sum x_i^{n+1} = \sum x_i y_i \\ \vdots \\ \alpha_0 \sum x_i^n + \alpha_1 \sum x_i^{n+1} + \alpha_2 \sum x_i^{n+2} + \dots + \alpha_n \sum x_i^{2n} = \sum x_i^n y_i \end{cases} \quad (16)$$

O ponto de mínimo é obtido solucionando o sistema acima. Observe que a matriz dos coeficientes possui o determinante diferente de zero e assim esse sistema possui uma única solução. Para provar que essa solução é o mínimo da função, deve-se analisar o sinal dos autovalores da matriz Hessiana. Pode-se provar que A é positiva definida e, portanto, garante-se que o ponto crítico é ponto de mínimo. Uma maneira prática de obter a forma matricial das equações normais é considerar a matriz de Vandermonde:

$$X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \quad (17)$$

$$A = X^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}$$

$$A = X^T X = \begin{bmatrix} n & \sum x_i & \sum x_i^2 & \dots & \sum x_i^m \\ \sum x_i & \sum x_i^2 & \sum x_i^3 & \dots & \sum x_i^{m+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum x_i^m & \sum x_i^{m+1} & \sum x_i^{m+2} & \dots & \sum x_i^{2m} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$b = X^T y = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ x_1^2 & x_2^2 & \dots & x_n^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_1^m & x_2^m & \dots & x_n^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum y_i \\ \sum x_i y_i \\ \sum x_i^2 y_i \\ \vdots \\ \sum x_i^m y_i \end{bmatrix} \quad (19)$$

Assim, os coeficientes da função aproximante são calculados por:

$$\alpha = A^{-1}b = (X^T X)^{-1} X^T y \quad (20)$$

O mesmo procedimento pode ser adotado para se ajustar superfícies de resposta de graus diferentes e com mais variáveis independentes. Considere, por exemplo, uma superfície quadrática com m variáveis independentes, da forma:

$$y_r = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_m x_m + b_1 x_1^2 + b_2 x_2^2 + \dots + b_m x_m^2 + c_{12} x_1 x_2 + \dots + c_{1m} x_1 x_m + c_{23} x_2 x_3 + \dots + c_{2m} x_2 x_m + \dots + c_{m-1m} x_{m-1} x_m \quad (21)$$

Pode-se ajustar essa curva da mesma maneira como foi exemplificado anteriormente, porém, para resolver o sistema equivalente à Eq.(20), torna-se necessário inverter a matriz de Vandermond gerada por essa curva. Essa operação pode exigir um alto custo computacional, de forma que se torna necessário superar essa dificuldade. Para tanto, define-se a matriz normal V , que apresenta a seguinte estrutura:

$$V = \begin{bmatrix} 1 & x_{11} & \dots & x_{m1} & x_{11}^2 & \dots & x_{m1}^2 & x_{11}x_{21} & \dots & x_{11}x_{m1} & \dots & x_{(m-1)1}x_{m1} \\ 1 & x_{12} & \dots & x_{m2} & x_{12}^2 & \dots & x_{m2}^2 & x_{12}x_{22} & \dots & x_{12}x_{m2} & \dots & x_{(m-1)2}x_{m2} \\ \vdots & \ddots & & & & & & & & & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{1n} & \dots & x_{mn} & x_{1n}^2 & \dots & x_{mn}^2 & x_{1n}x_{2n} & \dots & x_{1n}x_{mn} & \dots & x_{(m-1)n}x_{mn} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Sendo assim, a matriz de Vandermond e o vetor das aproximações y_r podem ser escritos como:

$$\begin{aligned} X &= V^T V \\ y_r &= V^T y \end{aligned} \quad (23)$$

sendo que o vetor coluna y é formado pelo resultado obtido em cada experimento.

4. PLANEJAMENTO EXPERIMENTAL

Após identificar as variáveis mais importantes, avalia-se quantitativamente sua influência sobre a resposta de interesse, bem com suas possíveis interações. Para fazer isso com o mínimo possível de experimentos, utilizam-se os planejamentos fatoriais. Em um processo

industrial, têm-se vários fatores que podem alterar os resultados desejados. Estudar detalhadamente cada um desses fatores é muito caro, afinal, para saber o efeito de um determinado fator torna-se necessário fixar todos os outros fatores, variando-o isoladamente. Nem sempre tal procedimento é viável. Desta forma, para evitar custos desnecessários, torna-se importante saber quais dos fatores têm maior influência no resultado final (Myers, 1976)

4.1 Planejamento Fatorial 2^k

Uma das formas de se selecionar quais fatores serão estudados mais profundamente é realizar um planejamento fatorial 2^k . Neste procedimento, são definidos dois níveis para cada fator que será analisado, e depois é estudado como cada fator altera o resultado e como cada um se relaciona com os demais. Obviamente, com apenas dois pontos de cada fator, a precisão da aproximação será muito limitada, mas já é possível perceber quais os fatores são mais determinantes, e quais podem ser retirados completamente do estudo para diminuir os custos da obtenção dos dados. Ou seja: utiliza-se o planejamento fatorial 2^k apenas para feitos de comparação, quando o experimento ainda está sendo definido.

Para entender como esse método funciona, considere o seguinte exercício, adaptado do livro de Barros Neto et al (1995): deseja-se definir quais os fatores que mais influenciam uma reação química. Em uma primeira abordagem, utilizou-se um planejamento fatorial 2^2 para ver a influência do tempo e da temperatura sobre a eficiência da reação. Foram definidos dois níveis de cada fator: será utilizada a temperatura de 130 °C e de 160°C, e o tempo será 24h e 48h. Para efeitos de notação, definiu-se que 160°C será o nível "+" e 130°C o nível "-" para a temperatura. E para o tempo, 24h será o nível "-" e 48h o "+". Essas definições são arbitrárias, e são realizadas apenas para ter maior facilidade ao manusear os dados obtidos. Qualquer alteração nessa notação não produz diferenças no resultado final. Após os primeiros experimentos, os resultados registrados podem ser observados conforme mostra a Tab. 1.

Tabela 1 - Dados do experimento do planejamento fatorial 2^2 .

Ensaio	Tempo (h)	Temperatura (°C)	Eficiência (%)
1	-	-	0.52
2	+	-	0.57
3	-	+	0.55
4	+	+	0.58

Para calcular o efeito isolado da temperatura, basta fazer a diferença da média dos dois níveis do tempo. Assim, tem-se:

$$H = \frac{(y_2 + y_4)}{2} - \frac{(y_1 + y_3)}{2} = 0.04 \quad (24)$$

Da mesma forma, define-se o efeito do tempo:

$$T = \frac{(y_3 + y_4)}{2} - \frac{(y_1 + y_2)}{2} = 0.02 \quad (25)$$

Trabalhando com o fatorial 2^2 , é possível inclusive definir uma interpretação gráfica dos resultados. Por exemplo, o T encontrado pode ser representado conforme Fig. 2.

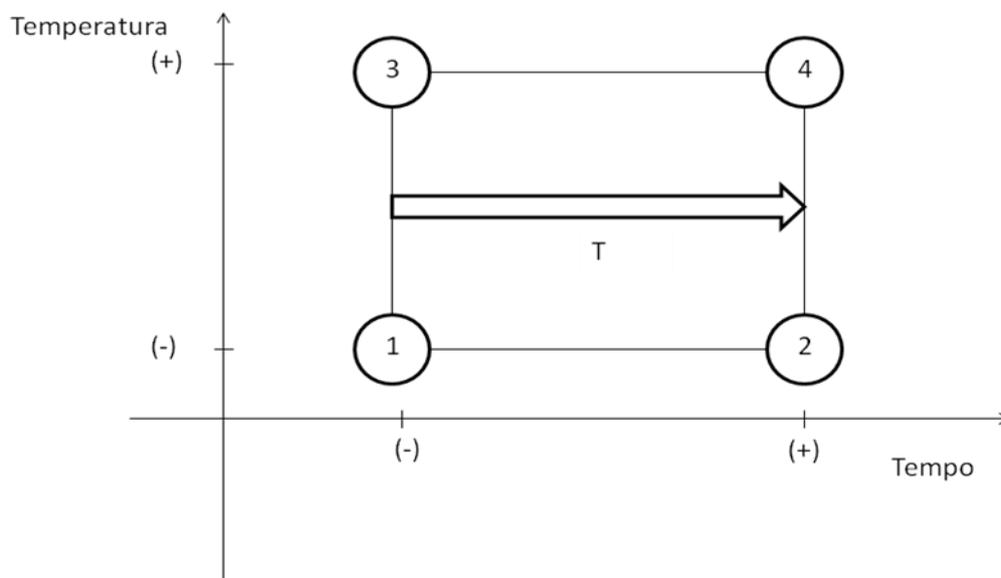


Figura 2 - Representação gráfica do coeficiente independente no planejamento 2^2

Mas sabe-se que esses efeitos não se apresentam sozinhos, eles interagem entre si. Define-se o efeito de interação como sendo a metade da diferença entre as diagonais, ou seja:

$$TH = \frac{(y_1 + y_4)}{2} - \frac{(y_2 + y_3)}{2} = -0.01 \quad (26)$$

A interpretação geométrica pode ser visualizada na Fig. 3.

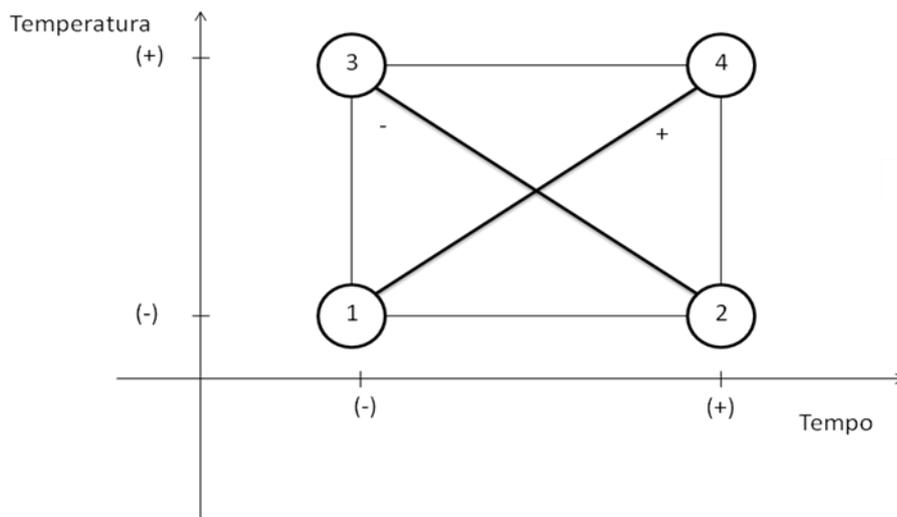


Figura 3 - Representação gráfica do coeficiente de interação no planejamento 2^2

Mantendo a mesma linha de raciocínio, para preparar um planejamento fatorial 2^3 , serão definidos três efeitos independentes, três interações 2 a 2, e uma interação entre os três fatores. Na representação gráfica, os experimentos formam um cubo, os efeitos independentes são normais a cada face, a diferença entre as diagonais de cada face são as interações 2 a 2, e a diferença entre as diagonais do cubo é a interação dos três fatores simultaneamente. Para exemplificar, considere novamente o exemplo apresentado, acrescentando um novo fator: a presença de um catalisador. Os resultados da Eq. 1 foram obtidos na presença do catalisador A, e este será adotado como o nível "-", os resultados obtidos usando o catalisador B são apresentados na Tab. 2, e este nível será o "+".

Tabela 2 - Dados do experimento do planejamento fatorial 2^3 .

Ensaio	Tempo(h)	Temperatura (°C)	Catalisador	Eficiência (%)
1	-	-	-	0.52
2	+	-	-	0.57
3	-	+	-	0.55
4	+	+	-	0.58
5	-	-	+	0.47
6	+	-	+	0.53
7	-	+	+	0.52
8	+	+	+	0.54

A Fig. 4 apresenta a representação gráfica do planejamento fatorial 2^3 .

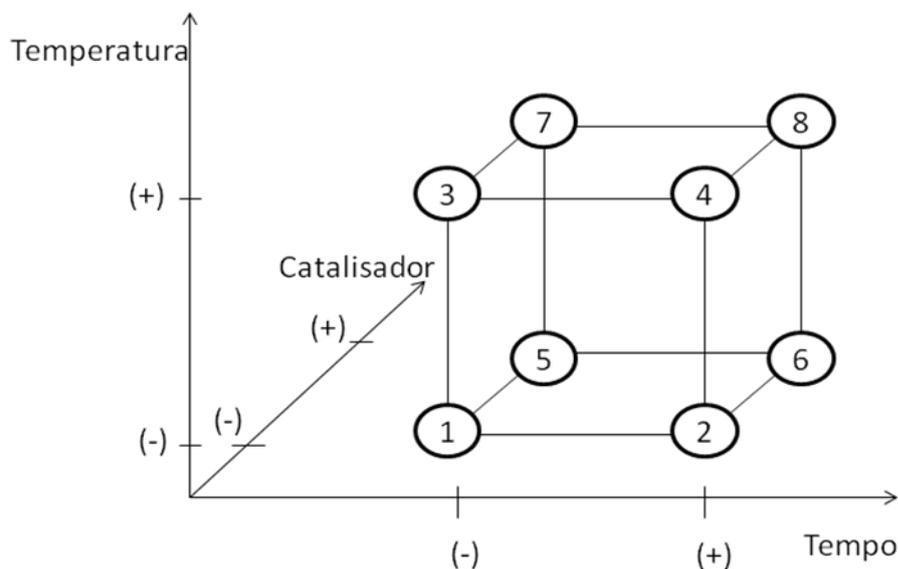


Figura 4 - Representação gráfica do planejamento fatorial 2^3

Agora, para definir o efeito de cada fator individualmente, calcula-se a média das diferenças provocadas pela mudança do nível "-" para o nível "+". Assim, obtém-se que:

$$H = \frac{(y_{h+} - y_{h-})}{4} = \frac{(y_2 + y_4 + y_6 + y_8)}{4} - \frac{(y_1 + y_3 + y_5 + y_7)}{4} = 0.04 \quad (27)$$

$$T = \frac{(y_{t+} - y_{t-})}{4} = \frac{(y_3 + y_4 + y_7 + y_8)}{4} - \frac{(y_1 + y_2 + y_5 + y_6)}{4} = 0.025 \quad (28)$$

$$C = \frac{(y_{c+} - y_{c-})}{4} = \frac{(y_5 + y_6 + y_7 + y_8)}{4} - \frac{(y_1 + y_2 + y_3 + y_4)}{4} = -0.04 \quad (29)$$

As interações entre dois elementos por vez é definida novamente como a diferença entre as diagonais das faces, logo:

$$HT = \frac{(y_1 + y_4 + y_5 + y_8)}{4} - \frac{(y_2 + y_3 + y_6 + y_7)}{4} = -0.015 \quad (30)$$

$$HC = \frac{(y_1 + y_3 + y_6 + y_8)}{4} - \frac{(y_2 + y_4 + y_5 + y_7)}{4} = 0 \quad (31)$$

$$TC = \frac{(y_1 + y_2 + y_7 + y_8)}{4} - \frac{(y_1 + y_4 + y_5 + y_7)}{4} = 0.005 \quad (32)$$

Como já apresentado anteriormente, a interação entre os três elementos é definida geometricamente como a diferença entre as diagonais do cubo, ou seja:

$$HTC = \frac{(y_2 + y_3 + y_5 + y_8)}{4} - \frac{(y_1 + y_4 + y_6 + y_7)}{4} = -0.005 \quad (33)$$

Percebe-se que no cálculo de cada um dos efeitos, todas as medidas foram utilizadas, variando apenas o sinal de cada resultado. Em planejamentos maiores, a representação gráfica não é possível, mas podem-se determinar os fatores positivos e negativos de cada expressão utilizando a seguinte estratégia: para os coeficientes independentes, pela sua própria definição, os coeficientes do nível "+" daquele fator são positivos, e os coeficientes do nível "-" são negativos. Para as interações entre elementos, basta "multiplicar" termo a termo as colunas dos níveis dos fatores envolvidos.

4.2 Planejamento estrela

A partir dos resultados encontrados nos experimentos, deseja-se propor um modelo de superfície que represente com alguma eficiência o sistema estudado. O modelo mais simples que pode ser adotado é o modelo linear, afinal, só precisamos de dois pontos de cada fator. É possível até mesmo propor uma superfície linear para os dados ao se trabalhar com o planejamento 2^k , criando um sistema cartesiano onde os níveis "+" seriam representados na escala "1" do eixo correspondente, e os níveis "-" estariam no valor "-1" do eixo. Além disso, usando apenas dois níveis para cada variável, não é possível saber quão próximo da realidade o modelo está. Assim, adicionando um ponto médio, a origem do nosso sistema, cria-se um terceiro nível, e dessa forma pode-se avaliar se a resposta linear é satisfatória para o sistema estudado. É importante lembrar que para variáveis discretas, como catalisadores, é impossível se determinar esse ponto médio.

Sabe-se que um modelo linear pode não representar bem o sistema. No entanto, para obter um modelo quadrático de duas variáveis necessita-se de seis coeficientes, e até agora só foram definidas cinco combinações diferentes entre os dois fatores. Dessa forma, é impossível determinar um sistema quadrático sem aumentar o número de experimentos. Uma possível solução é desenvolver um planejamento em estrela, que propõem mais quatro experimentos,

de tal forma que quando estes novos experimentos são representados no plano cartesiano, eles também formem um quadrado, só que esse segundo quadrado está rotacionado 45° em relação ao primeiro, conforme representação gráfica apresentada na Fig. 5.

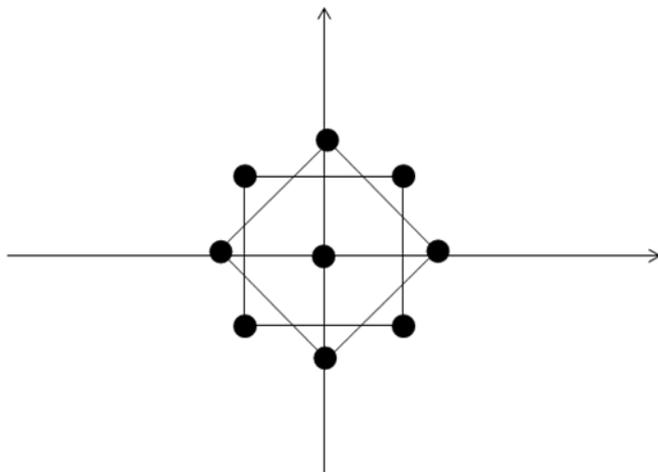


Figura 5 - Representação gráfica do planejamento estrela.

Com essa estrutura, pode-se aplicar o Método dos Quadrados Mínimos para encontrar a superfície quadrática que melhor se ajusta aos resultados obtidos nos experimentos.

Para demonstrar a utilização desta técnica, considere o desenvolvimento de modelo para uma curva já conhecida:

$$F(x, \theta) = \sqrt{x(1 - \text{sen}\theta)} \quad (34)$$

Sejam os dois níveis originais para x como: $x = 4$ e $x = 10$, e para θ : $\theta = 20^\circ$ e $\theta = 40^\circ$. Utilizando os maiores valores de cada variável como sendo os níveis positivos e a escala proposta, já tem definido quatro experimentos, que formarão os vértices do quadrado original. O ponto central terá $x = 7$ e $\theta = 30^\circ$. O próximo passo é rotacionar o quadrado, definindo assim dois novos níveis para cada variável. Como nesta escala o lado do quadrado vale 2, a metade da sua diagonal vale $\sqrt{2}$. Assim, pode-se perceber através da representação gráfica do método que cada novo ponto estará a uma distância de $\sqrt{2}$ do ponto central, e estará sobre os eixos originais. Por exemplo, um dos pontos será $(7-3\sqrt{2}, 30)$. A partir desses pontos, é construída a Tab. 3 com os respectivos resultados.

Tabela 3 – Dados do exemplo de Planejamento Estrela

Ensaio	x	Θ	F(x, θ)
1	4	20°	1.6223
2	10	20°	2.5651
3	4	40°	1.1953
4	10	40°	1.8900
5	7	30°	1.8708
6	11.24	30°	2.3707
7	2.75	30°	1.1726
8	7	15°52'	2.2554
9	7	44°08'	1.4581

Aplicando o Método dos Quadrados Mínimos, o modelo está definido:

$$M(x, \theta) = -0.0054x^2 - 0.2038\theta^2 - 0.1185x\theta + 0.2759x - 0.5546\theta + 0.9828 \quad (35)$$

4.3 Planejamento Composto Central

Tratando de um modo geral, um planejamento composto central (PCC) com k fatores é formado em três partes. A Fig. 6 mostra um caso simples com dois fatores, explicando cada uma das partes. Os pontos do diagrama representam as opções de ensaios a serem realizados.

Sendo assim, para fazer o PCC precisa-se definir quantos e quais serão cada um dos pontos fatoriais, que são idênticos aos de um planejamento fatorial 2^k ; qual o valor de α , que costuma ficar entre 1 e \sqrt{k} ; e quantas repetições ocorrerão no ponto central (0, 0), cujas finalidades são fornecer uma medida do erro puro e estabilizar a variância da resposta prevista. O planejamento em estrela, já citado, é um exemplo de planejamento composto central.

Os extremos dos pontos axiais representam situações diferentes. Quando $\alpha = \sqrt{k}$, os pontos fatoriais e os pontos axiais ficam sobre a superfície de uma circunferência ou (hiper)esfera (o prefixo *hiper* indica uma figura geométrica em mais de três dimensões). Por outro lado, quando $\alpha = 1$, os pontos axiais se localizam na parte central das faces do quadrado ou (hiper)cubo.

Há ainda, porém, outro critério para definir o valor de α . Em um planejamento onde a porção cúbica seja um fatorial completo ou um fatorial fracionário, pode-se demonstrar que a rotabilidade é obtida fazendo-se:

$$\alpha = \sqrt[4]{n_{fat}} \quad (36)$$

A escolha do valor de α irá depender do interesse que se tem no experimento. Por exemplo, para o caso em que é necessário analisar uma região mais próxima das faces do quadrado ou (hiper)cubo, é melhor escolher um valor de α menor que o definido pela expressão (36).

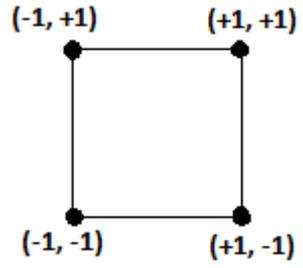
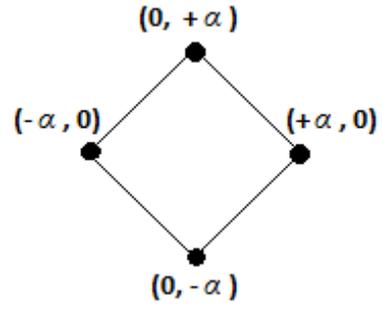
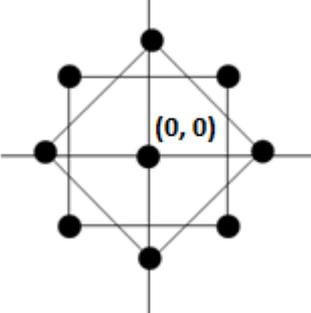
Pontos Fatoriais	Pontos Axiais	Pontos Centrais
		
<p>Ponto fatorial (cúbica), com um total de n_{fat} pontos de coordenadas (-1 ou +1);</p>	<p>Ponto axial (em estrela), com $n_{ax} = 2k$ pontos com todas as coordenadas nulas exceto uma, que é igual a um determinado valor α (ou $-\alpha$);</p>	<p>Ponto central, onde é realizado um total de n_{cent}. Aqui, os pontos fatoriais e axiais, assim como o central, são mostrados. O ponto central está em (0, 0).</p>

Figura 6 - Representação gráfica de um planejamento composto central

A principal vantagem do planejamento composto central é que ele pode ser feito em três partes distintas, podendo ser construídas – ou não – de acordo com a necessidade.

5. MÉTODOS DE OTIMIZAÇÃO

Conhecendo como a função se comporta, o objetivo passa a ser encontrar o ponto que melhor atende aos objetivos do estudo (Arora, 1989). Para encontrar essa solução ótima, serão utilizados métodos de otimização. Existem diversos métodos, cada um com uma combinação

de características que fazem com que não exista um método ideal, em cada situação, um método pode ser melhor ou não (Brandão, 2010). Por definição, esses métodos sempre buscam pontos extremos (mínimos ou máximos).

5.1 Funções de mais de uma variável sem restrições

Para se obter os mínimos locais de uma função de uma única variável, é necessário apenas igualar sua derivada a zero, e verificar o sinal da sua segunda derivada neste ponto. Para funções com mais variáveis, o raciocínio é similar à obtenção de soluções ótimas com funções de uma única variável. Por se tratar de uma função com várias variáveis, as primeiras derivadas são dadas pelo vetor gradiente e as segundas derivadas pela matriz Hessiana. Dessa forma, para se avaliar o sinal da segunda derivada, calculam-se os autovalores da matriz Hessiana, e a partir desse resultado avalia-se a se o ponto é de máximo local, mínimo local, ou de inflexão. Definindo X como o vetor com as variáveis da função $F(X)$, e I como a matriz identidade, tem-se:

$$\nabla F(X_c) = 0, \text{ onde } X_c \text{ são os pontos críticos da função } F(X) \quad (37)$$

$$\det(H(X_c) - \lambda I) = 0, \text{ onde } \lambda \text{ são os autovalores de } H(X_c)$$

Se todos os autovalores de $H(X_c)$ são positivos, o $F(X_c)$ é um ponto de mínimo local. Se todos são negativos, $F(X_c)$ é um máximo local. E se existirem $\lambda_i < 0$ e $\lambda_i > 0$, $F(X_c)$ é um ponto de inflexão.

5.2 Método de primeira ordem

O método de primeira ordem tenta aproximar a função $F(X)$ através da série de Taylor, mas usando só o primeiro termo.

Dessa forma, os métodos sequenciais de primeira ordem são dados por:

$$X^{q+1} = X^q + \alpha^* S^q, \text{ dado uma aproximação inicial } X^0 \quad (38)$$

$$S = -\nabla F(X^q)$$

sendo X^{q+1} o próximo ponto a se avaliar e X^q o ponto atual. Interpretando essa equação, percebemos que S é a direção em que o valor da função $F(X)$ tem o menor crescimento. Por

esse motivo, esse método também é chamado de descida máxima. O tamanho do passo na direção S é dado por α^* . Este valor é dado por uma busca unidimensional.

5.3 Método da seção áurea

Para um determinado valor de X^q e S^q , o método da razão áurea propõe a seguinte solução:

$$\phi(\alpha) = X^q + \alpha S^q \quad (39)$$

dado um intervalo $[a_0, b_0]$, assumindo que a função ϕ seja unimodal, dessa forma pode-se afirmar que existirá um valor α^* tal que para qualquer valor $[a_0, \alpha^*]$ a função será decrescente, e para os demais valores em $[a_0, b_0]$, a função será crescente. Definindo mais dois pontos dentro desse intervalo $[a_0, b_0]$, c_0 e d_0 , sendo $c_0 < d_0$, ao se avaliar a função em cada um

desses pontos, pode-se encontrar três situações diferentes, conforme mostram as Fig. 7, 8 e 9.

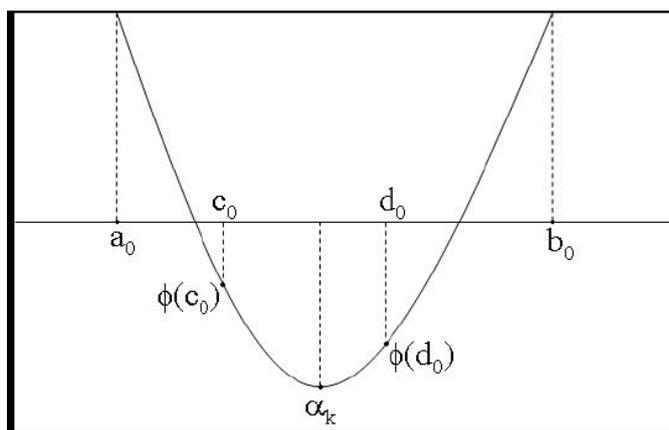


Figura 7 - Primeiro caso do método da descida máxima

Observando a Fig. 7, verifica-se que $\phi(c_0) > \phi(d_0)$, logo $\alpha^* \in [c_0, b_0]$ e este será o próximo intervalo a ser estudado.

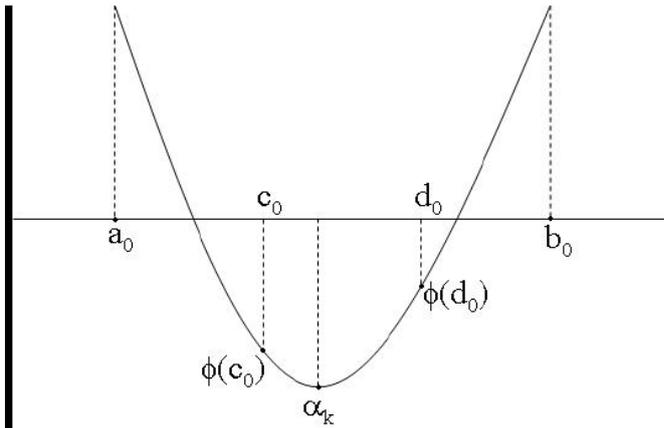


Figura 8 - Segundo caso do método da descida máxima

Neste caso, conforme pode ser visto na Fig. 8, $\phi(c_0) < \phi(d_0)$, logo $\alpha^* \in [a_0, d_0]$ e, portanto este será o novo intervalo a ser analisado. E por último, pode-se ter a situação apresentada na Fig. 9, onde $\phi(c_0) = \phi(d_0)$.

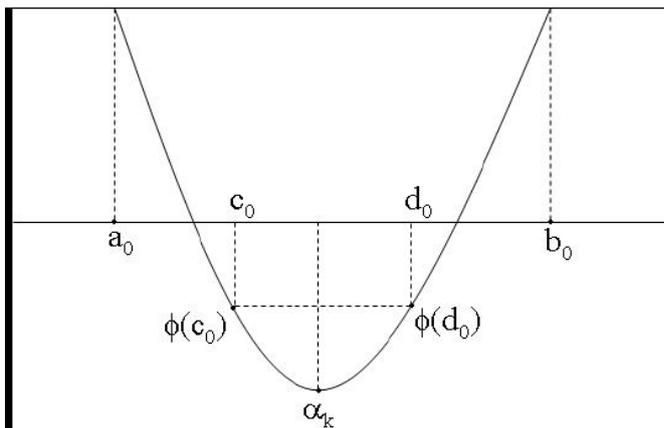


Figura 9 - Terceiro caso do método da descida máxima

Quando os valores da função são iguais, então $\alpha^* \in [c_0, d_0]$ e neste caso, para simplificar o método, não há diferença entre adotar o intervalo $[a_0, d_0]$ ou o intervalo $[c_0, b_0]$ para a próxima iteração. Para se definir os pontos c_0 e d_0 , as relações entre os comprimentos utilizados são estudadas, podendo provar que:

$$d_0 - a_0 = b_0 - c_0 = 0.618034(b_0 - a_0) \quad (40)$$

Este procedimento é repetido até que o intervalo $[a_i, b_i]$ fique suficientemente pequeno, obedecendo a uma previsão pré-estabelecida. Ao atingir esse objetivo, pode-se traçar um polinômio de terceiro grau e aproximar o mínimo da função neste intervalo, ou pode-se

simplesmente adotar o menor valor entre os pontos a_i , b_i , c_i e d_i , já que esse intervalo pode ser tão pequeno quanto se determine.

5.4 Métodos de Segunda Ordem

Os métodos de segunda ordem, ou métodos de Newton, propõem um modelo que utiliza a série de Taylor até o termo de segunda ordem. Dessa forma, sua forma geral é dada por:

$$F(X) \cong F(X^0) + \nabla F(X^0)\partial X + \frac{1}{2}\partial X^T H(X^0)\partial X \quad (41)$$

Diferenciando em relação a X :

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} \cong \nabla F(X^0) + H(X^0)\partial X \quad (42)$$

No ponto de mínimo:

$$\frac{\partial F(X)}{\partial X} = 0 \quad (43)$$

$$H(X^0)\partial X = -\nabla F(X^0) \quad (44)$$

$$\partial X = -H(X^0)^{-1}\nabla F(X^0) \quad (45)$$

Fazendo $\partial X = X - X^0$, encontra-se:

$$X = X^0 - H(X^0)^{-1}\nabla F(X^0) \quad (46)$$

Como este modelo utiliza mais termos da série de Taylor, ele apresenta uma precisão maior. Porém, numericamente, o método apresenta dificuldades para encontrar a Hessiana, e depois a sua inversa.

5.5 Métodos de Quasi-Newton

A partir das dificuldades apresentadas pelos métodos de segunda ordem, foram desenvolvidos métodos que buscam superar esses desafios. A ideia principal é obter uma aproximação numérica para a inversa da matriz Hessiana. Serão apresentados os dois métodos mais usuais: o Método de Davidon-Fletcher-Powell (D.F.P.) e o Método de Broydon-Fletcher-Goldfarb-Shanno (B.F.G.S.). O algoritmo é definido por:

$$X^{q+1} = X^q + \alpha^* S^q \quad (47)$$

$$S^q = -G^q \nabla F(X^q) \quad (48)$$

$$G^0 = I \text{ e } G^q = G^{q-1} + D^q \quad (49)$$

$$D^q = \frac{\sigma + \theta\tau}{\sigma^2} pp^T + \frac{\theta - 1}{\tau} G^{q-1} y(G^{q-1} y)^T - \frac{\theta}{\sigma} [G^{q-1} yp^T + p(G^{q-1} y)^T]. \quad (50)$$

$$p = X^q - X^{q-1} \quad (51)$$

$$y = \nabla F(X^q) - \nabla F(X^{q-1}) \quad (52)$$

$$\sigma = p^T y \quad (53)$$

$$\tau = y^T G^{q-1} y \quad (54)$$

Utilizando $\theta = 0$, tem-se o D.F.P., e utilizando $\theta = 1$, tem-se o B.F.G.S. Além disso, pode-se reparar que esses métodos também se utilizam do método da seção áurea, para se determinar o coeficiente α^* .

6. SIMULAÇÃO NUMÉRICA

Considerando agora um exemplo, onde deseja-se determinar as melhores condições de corte no fresamento de aço – otimizando a velocidade de corte, o avanço por dente e a profundidade do corte – tem-se como objetivo minimizar a formação de rebarbas nas bordas lateral e de saída durante a usinagem do aço utilizando ferramentas de metal duro.

Tabela 4 - Níveis dos parâmetros utilizados nos testes.

Nível dos parâmetros	Vc [m/min]	fz [mm/dente]	doc [mm]
-1.28719	100	0.05	0.3
-1	125.54	0.0723	0.489
0	210	0.015	1.15
+1	295.46	0.228	1.81
+1.28719	320	0.25	0.2

Para isto, são analisados os efeitos dos parâmetros de corte e as estratégias de minimização de rebarba ao longo de uma peça conforme mostra a Fig. 11. Neste caso, foram considerados os seguintes parâmetros: V_c - velocidade de corte; f_z - avanço por dente; doc - profundidade de corte; tendo os níveis representados na Tab. 4.

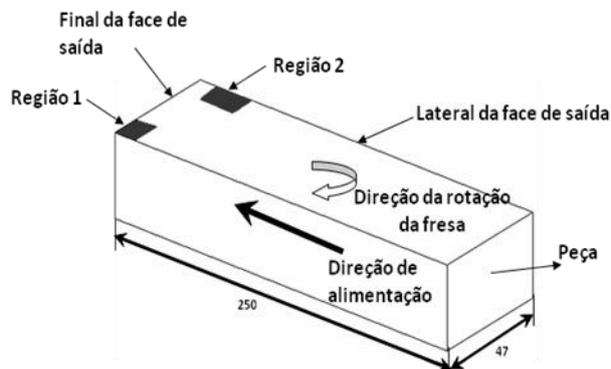


Figura 11 - Partes da peça trabalhada.

Tabela 5 - Níveis dos parâmetros e sequência dos testes

Teste	V_c	f_z	doc	Teste	V_c	f_z	doc
1	-1.000	-1.000	-1.000	17	-1.000	-1.000	-1.000
2	-1.000	-1.000	1.000	18	-1.000	-1.000	1.000
3	-1.000	1.000	-1.000	19	-1.000	1.000	-0.000
4	-1.000	1.000	1.000	20	-1.000	1.000	1.000
5	1.000	-1.000	-1.000	21	1.000	-1.000	-1.000
6	1.000	-1.000	1.000	22	1.000	-1.000	1.000
7	1.000	1.000	-1.000	23	1.000	1.000	-1.000
8	1.000	1.000	1.000	24	1.000	1.000	1.000
9	-1.287	0.000	0.000	25	-1.287	0.000	0.000
10	1.287	0.000	0.000	26	1.287	0.000	0.000
11	0.000	-1.287	0.000	27	0.000	-1.287	0.000
12	0.000	1.287	0.000	28	0.000	1.287	0.000
13	0.000	0.000	-1.287	29	0.000	0.000	-1.287
14	0.000	0.000	1.287	30	0.000	0.000	1.287
15	0.000	0.000	0.000	31	0.000	0.000	0.000
16	0.000	0.000	0.000	32	0.000	0.000	0.000

Sabe-se que os principais parâmetros utilizados para caracterizar uma rebarba são a espessura "e" e sua altura "h" (Silva, JD et al, 2005), sendo que o valor de "h" considerado neste estudo é a média de dez medições efetuadas em pontos distintos da fronteira nas regiões 1 e 2. Essa elevada quantidade de valores considerados deve-se à variação considerável aleatória da altura da rebarba ao longo da borda da peça de trabalho. Assim sendo, tem-se na Tab. 5 os níveis dos parâmetros e a sequência dos testes.

Então, foram feitos os experimentos e obtidas as alturas médias das rebarbas, conforme Tab 6.

Tabela 6 – Altura média das rebarbas obtidas nos testes (μm)

Teste	Réplica 1				Teste	Réplica 2			
	Região 1		Região 2			Região 1		Região 2	
	h_{medio} (μm)	Desvio	h_{medio} (μm)	Desvio		h_{medio} (μm)	Desvio	h_{medio} (μm)	Desvio
1	341.9	13.37	434.4	27.73	17	463.7	32.45	506.3	9.00
2	173.7	67.92	133.7	25.85	18	125.1	80.54	1468.7	221.43
3	563.2	41.84	516.8	16.86	19	465.3	49.23	484.6	47.86
4	1741.3	154.14	175.8	35.13	20	1720.9	429.76	1503.9	287.46
5	424.19	123.35	473.5	22.71	21	544.2	43.78	524.7	33.80
6	1649.9	156.86	213.9	25.49	22	1724.5	47.11	1580.9	63.54
7	442.4	45.77	437.4	57.79	23	645.3	203.84	489.7	21.00
8	1954.9	288.44	175.6	16.57	24	1713.8	43.04	1619.3	114.28
9	1010.8	38.86	947.3	112.70	25	1042.1	45.99	1148.8	53.91
10	1016.8	44.36	1055.3	26.92	26	1071.3	67.40	1039.1	47.53
11	1051.8	79.55	911.3	79.99	27	1162.5	35.02	1136.7	32.79
12	1215.2	98.82	1100.1	59.96	28	999.0	21.24	1070.9	22.33
13	331.9	136.36	269.8	28.16	29	301.9	30.24	345.8	27.36
14	1928.0	83.57	1805.5	90.60	30	1923.2	60.28	1865.4	56.84
15	1085.6	28.14	948.4	76.93	31	1089.9	58.67	1088.3	67.13
16	1015.7	21.16	1022.6	46.51	32	1077.5	51.16	1014.7	26.91

Sendo assim, através de métodos computacionais desenvolvidos no software MATLAB[®], fez-se uma Regressão Múltipla Polinomial e encontrou-se inicialmente uma equação adequada ao problema para cada região:

$$F_{\text{região } 1} = 1142.7 + 156.9 x_1 + 167.9 x_2 + 488.6 x_3 - 98.8 x_1^2 - 55.4 x_2^2 - 46.9 x_3^2 \\ - 185.8 x_1 x_2 + 191.3 x_1 x_3 + 194.7 x_2 x_3$$

$$F_{\text{região } 2} = 1188.3 + 12.8 x_1 + 10.0 x_2 + 306.6 x_3 - 161.2 x_1^2 - 156.9 x_2^2 - 146.7 x_3^2 \\ - 13.1 x_1 x_2 + 20.3 x_1 x_3 + 5.5 x_2 x_3$$

Onde: x_1 - velocidade de corte, x_2 - avanço por dente, x_3 - profundidade de corte;

Porém, para uma curva que melhor representa ambas as bordas (lateral e saída), obteve-se uma função geral para a solução do problema:

$$F = 1165.5 + 84.8 x_1 + 88.9 x_2 + 397.6 x_3 - 130.0 x_1^2 - 106.1 x_2^2 - 96.8 x_3^2 - 99.4 x_1 x_2 \\ + 105.8 x_1 x_3 + 100.1 x_2 x_3$$

Conhecendo como a função se comporta, pretende-se então encontrar o ponto que melhor atende aos objetivos do estudo – o de minimizar a altura da rebarba. Para encontrar essa solução ótima, foi utilizado o Toolbox *fmincon* do software MATLAB[®], restringindo os limites inferiores e superiores na escala do planejamento, ou seja, ± 1.287 , encontrando assim os seguintes resultados:

$$X = [-1.287 \quad -1.287 \quad -1.287]$$

$$fval = 55.235$$

onde X é o vetor com as variáveis Vc , fz e doc , respectivamente, porém na escala do planejamento; e $fval$ é a resposta a ser otimizada, ou seja, a altura média da rebarba. Coincidentemente neste exemplo, os valores encontrados foram os limites inferiores de cada parâmetro.

Transformando as variáveis para seu valor real, obtém-se:

$$Vc = 100 \text{ m/min}$$

$$fz = 0.05 \frac{\text{mm}}{\text{dente}}$$

$$doc = 0.3 \text{ mm}$$

e, finalmente:

$$h_{\text{rebarba}} = 55.235 \mu\text{m}$$

Para o experimento proposto, os resultados foram considerados adequados e satisfatórios, mostrando que a modelagem proposta é eficiente para a otimização de sistemas com vários níveis de complexidade, inclusive neste caso, onde as condições de corte do aço foram otimizadas, obtendo-se uma diminuição considerável da altura de rebarba.

7. DISCUSSÃO E CONCLUSÃO

O método de Superfície de Resposta baseia-se em duas etapas: “modelagem”, onde se ajusta modelos polinomiais simples (geralmente lineares ou quadráticos) a resultados experimentais (SR), obtidos a partir dos planejamentos fatoriais; e “deslocamento” sobre a superfície de resposta ajustada para localizar as regiões que satisfaçam condições de interesse, calculando seus pontos extremos. Estes deslocamentos se dão ao longo do caminho de máxima inclinação do modelo, pois é onde a resposta varia de forma mais pronunciada.

No presente trabalho, foram estudados os fundamentos estatísticos, as técnicas de planejamento experimental, modelos para o ajuste de curvas e alguns métodos de otimização. Estes conceitos foram aplicados, com sucesso, em um exemplo de otimização das condições de corte no fresamento de aço.

As equações obtidas usando Superfície de Resposta foram calculadas através de códigos computacionais, usando regressão polinomial múltipla e técnicas sequencias de otimização. Os resultados mostraram-se eficientes e satisfatórios.

8. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arora, J. S., Introduction to Optimum Design, International Edition, Singapore, McGraw-Hill, 1989. 450 - 462p

Barros Neto, B.; Scarminio, I. S.; Bruns, R. E. Planejamento e Otimização de Experimentos. Campinas, SP: Editora Unicamp, 1995. 278p

Barros Neto, B.; Scarminio, I. S. ; Bruns, R. E. Como fazer experimentos: pesquisa e desenvolvimento na ciência e na indústria. V.1, 1.ed. Coleção Livros-Textos, Campinas, SP: Editora Unicamp, 2001. 406p.

Brandão, M. A. L.; Estudo de alguns métodos determinísticos de otimização irrestrita. 101p. Dissertação de Mestrado, Universidade Federal de Uberlândia, 2010.

Morettin, L. G. Estatística Básica. V.1, 7.ed. Brasil: Makron Books, 1999.

Myers, R.H., 1976, "Response Surface Methodology", 1ª edition, 246 p.

Silva, Jefferson Duarte. "Optimization of the Cutting Conditions (V_c , f_z and d_{oc}) for Burr Minimization in Face Milling of Mould Steel." Uberlândia. Universidade Federal de Uberlândia.