

## **Aplicações de Equações Diferenciais: As Falsificações de Arte de Van Meegeren**

Antonio Carlos Evangelista<sup>1</sup>

### **Resumo**

Esse trabalho visa integrar matemática e alguns conhecimentos químicos para datação de obras de arte. Para tanto, faz-se uso da modelagem matemática através das Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). O caso em análise tem como objeto de estudo o quadro pintado por Meegeren em meados da década de 30, “Cristo e os discípulos em Emaús”, que fora atribuído originalmente como uma autêntica obra de Vermeer - um consagrado pintor Holandês do século XVII. Por algum tempo, Meegeren conseguiu manter a farsa, convencendo até a crítica de maior prestígio; o que evidencia o seu talento artístico. Com essa habilidade Meegeren enriqueceu. Durante a ocupação holandesa acabou fazendo negócios com os nazistas; após o fim da guerra foi acusado de traidor da pátria por enriquecimento ilícito e negócios com os invasores. Para escapar dessas acusações, Meegeren, cuja pena para crime de traição era a morte, assumiu que era um falsário e dessa forma fizesa sua fortuna por meio da venda de quadros falsificados "legítimos" no intuito de escapar da acusação maior de traidor. Porém, nem todos se convenceram de sua alegação principalmente aqueles que validaram suas falsificações e as compraram como autênticas, por vultosas quantias de dinheiro. Essa farsa perdurou até 1967 quando cientistas da Carnegie Mellon University provaram, com artifícios de datação de obras antigas, através de análise de decaimento radioativo, que a obra em questão não podia ser do século XVII. Por fim, o trabalho analisa relações provenientes de dados laboratoriais e análises de amostras de  $Pb^{210}$  e  $Ra^{226}$  para o julgamento sobre a veracidade ou não da obra com base na mineralogia da série de decaimento do  $U^{238}$ . Por tudo isso, esse trabalho científico é providencial para elucidar como que a matemática abraçada com outras áreas do conhecimento natural serve de ferramenta para entender e manipular o mundo ao redor de maneira eficiente e racional. Nesse sentido, foram observados os aspectos qualitativos e quantitativos de determinado fenômeno natural, em uma linguagem matemática que estima alcançar o público de estudantes tanto da graduação quanto do ensino médio.

**Palavras Chaves:** Modelagem matemática, equações diferenciais ordinárias, datação química, decaimento radioativo.

## **Abstract**

This essay intends integrate mathematics with some chemistries issues for dating of art's paintings. For that, the mathematics modeling through Ordinary Differential Equations (ODEs) was used. The case under consideration has tableau painted by Meegeren, in the mid-30<sup>th</sup>, "Christ and the Disciples at Emaús", that firstly was attributed to Vermeer, an eminent Dutch painter for eighteenth century. During some period of time, Meegeren could keep the farce, convincing even the most prestigious art critics; thereby demonstrating their artistic talents. With this skill Meegeren made himself a wealthy person, ended up selling some to Nazis. After the end of Second World War he was accused of national traitor for being involved with illegal moneymaking and business with invaders. In case of trying to escape from this accusation whose sentence was death, he admitted that he was an art forger and so that made up his wealth. However, not everyone was convinced at his claims mainly those that bought some paints as true ones. This farce lasted until 196, when Carnegie Mellon University's scientists have proven, with artifacts dating from ancient works, through analysis of radioactive decay, which uses applications of differential equations; thereby the painting in question could not be of the eighteenth century. This work was conducted under the methodology of analysis of common separable and linear equations (for radioactive decay); thereafter modeling of  $Pb^{210}$  concentration through some chemical testing laboratory sources, and finally the trial on the truth or otherwise of the art painting based on mineralogy of the decay chain of  $U^{238}$ . For all that, this scientific work was essential to elucidate how the mathematics, together with other areas of knowledge, serves as a natural tool to understand and manipulate the world around efficiently, and technique, observing the qualitative and quantitative aspects of a particular natural phenomena in language that desire to reach the public of both undergraduate students and the high school ones.

**Keywords:** mathematics modeling, ordinary differential equations, chemistry dating, radioactivity decay

## **Introdução**

Muitas áreas da matemática são conhecidas como árduas e sem aplicações. Em geral, as aplicações se encontram após um profundo estudo, tornando difícil a compreensão de quem está no começo de uma longa caminhada.

Para aplicar a matemática ao cotidiano utiliza-se da modelagem matemática. O ramo da matemática que estuda essa área é denominada: matemática aplicada. Em contrapartida tem-se a matemática pura e estatística; a pura não é foco nesse trabalho e estatística aparecerá de maneira indireta.

Previsões matemáticas envolvem sentenças numéricas, cálculo e funções. Um modelo é uma descrição matemática (frequentemente, por meio de uma função ou de uma equação) de um fenômeno do mundo real. Por exemplo, o tamanho de uma população, a demanda de um produto, a velocidade de um objeto caindo, a concentração de um produto em uma reação química, o decaimento radioativo, a expectativa de vida de uma pessoa ao nascer ou o custo para recuperação de poluentes. O propósito do modelo é entender o fenômeno e talvez fazer predições sobre um comportamento futuro. (Stewart, 2008)

A Figura 1 ilustra o processo de modelagem matemática. A partir de um problema do mundo real, o primeiro passo é formular um modelo matemático por meio das especificações das variáveis dependentes e independentes e da realização de hipóteses que simplifiquem o fenômeno o suficiente para torná-lo matematicamente tratável.

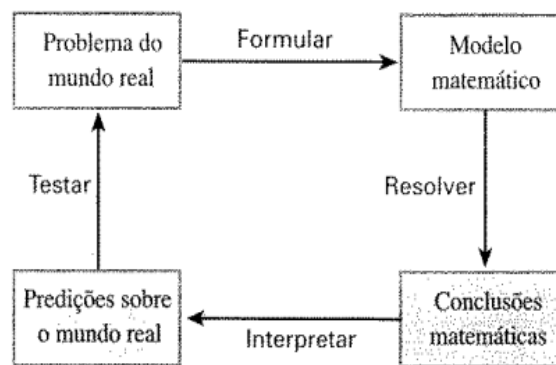
A respeito do tema “simplificações necessárias” para tornar o fenômeno real palatável, um solução realista e bem-sucedida em um problema matemático, por vezes de engenharia, geralmente começa com um modelo preciso do problema e o entendimento das hipóteses usadas.

Em resumo, se tentarmos incluir todos os efeitos em nossa análise, o problema se torna extremamente complexo. Então, o que fazemos? Simplificamos o problema de forma que nos possibilite obter uma aproximação suficientemente precisa para solução do problema real. (Borelli & Schmit, 2003)

Na luta com objeto, o pesquisador, sujeito, faz uso do conhecimento da situação física e da destreza matemática de sua época. Desse raciocínio, em termos gerais, nota-se a importância e as mais variadas conseqüências do advento do cálculo a partir de Newton e Leibniz que na falta de uma matemática suficientemente adequada para sua época ajudou desenvolvê-la.

Esse aprimoramento propiciou grandes desenvolvimentos nas mais diversas áreas do conhecimento humano, desde pesquisas sociais até engenharia aeroespacial pesada, passando por áreas desde biológicas, médicas a economia e engenharia e outras mais.

Uma das consequências do tratamento do problema em foco e do levantamento de hipóteses é a ocorrência de situações em que não há uma lei física clara e totalmente satisfatória para a solução do problema em questão. Nesse momento, é necessária a coleta de dados, primeiramente por meio de uma revisão bibliográfica da literatura impressa ou digital e posteriormente através da condução de ensaios experimentais. Em um segundo momento ocorre a análise dos dados obtidos empiricamente em forma de gráficos e tabelas a fim de perceber padrões. A partir dessa representação gráfica, portanto, pode até sugerir uma fórmula algébrica, por exemplo.



**Figura 1** - Processo de modelagem. Fonte: Stewart, 2008

Em um terceiro momento utiliza-se da aplicação das habilidades matemáticas, ou seja, habilidade de abstração em relação à quantidade e a tamanhos, para possíveis interpretações e conclusões a cerca do problema formulado. É a partir desse ponto que se faz previsões sobre o comportamento do objeto real, já com alguma nova informação adicionada ao processo de investigação científica. Nesse sentido, a etapa final do processo científico é testar se o modelo se adéqua ao mundo real. Assim, julga-se a necessidade de refinar o modelo, formular um novo modelo ou começar novamente o ciclo.

Um modelo matemático nunca é uma representação completamente precisa de uma situação física – é uma idealização. Um bom modelo simplifica a realidade o bastante para permitir cálculos matemáticos, mantendo, porém, uma precisão suficiente para conclusões apreciáveis. É importante entender as limitações do modelo. A palavra final está com a Mãe Natureza. (Boresi & Schmit, 2003)

De maneira específica esse trabalho visa à investigação, em caráter matemático diferencial, do decaimento radioativo de núcleos de átomos para esclarecimento de um intrigante caso de falsificação de artes datado do pós-guerra, final da década de 40.

Com o advento do cálculo, originaram vertiginosos avanços a partir do século XVIII, tem-se a possibilidade de cientistas sociais, físicos, entre outros analisarem, de modo geral, uma equação diferencial surgida no processo de modelagem de algum fenômeno que eles estão estudando. Nesse sentido, talvez a aplicação mais importante do cálculo seja as equações diferenciais. Nesse trabalho usa-se uma solução explícita de uma equação diferencial. Porém, em inúmeras outras equações diferenciais há a forte dependência de aproximações gráficas e numéricas da para coleta de informações necessárias, que seria o âmbito cálculo numérico.

Quando se fala em equações matemáticas, na geometria ou na álgebra, um bom tempo é gasto na resolução de equações do tipo:

$$x^2 + 4x + 5 = 0 \quad (1)$$

para a incógnita  $x$ , essencialmente representa um número. Em se tratando de equações diferenciais a tarefa é resolver:

$$y'' + 2y' + y = 0 \quad (2)$$

para função incógnita  $\vartheta(x)$ , que representa uma lei matemática relacional (função) de pelo menos uma variável dependente a uma ou mais variável independente:

$$y = \vartheta(x) \quad (3)$$

Nessa análise a equação diferencial é uma equação que contém uma função desconhecida e podem-se conhecer apenas algumas de suas derivadas (taxas de variação de uma função). Assim, as predileções sobre o comportamento futuro de determinado fenômeno investigado são baseadas na maneira de como os valores em tempo presentes variam. O que é intuitivamente razoável e muito comum em investigações científicas.

De forma a contextualizar o a modelagem em questão lembra-se o pintor holandês Henricus Antonius (Han) Van Meegeren que nasceu em Deventer, 1899. Sua história é intrigante. Meegeren fez fortuna ao especializar-se em imitar um mestre clássico do século XVI Holandês: Jan Vermeer (1632 – 1635). Esse pintor clássico é notório por pintar a “Monalisa holandesa” e “A Dama com brinco de Pérolas”, Figura 2a, dentre outras. É importante

ressaltar que Vermeer produziu pouco em sua vida, eram conhecidas apenas cerca de 30 de suas telas. Isso, porém, até surgir Meegeren na década de 30 (Goodley, 1990), que aumentou seu repertório de obras por meio de introdução de falsificações.

A especialidade de Meegeren não era copiar os quadros de Vermeer, pois sua obra era conhecida. Nesse sentido, ele pintava seus próprios quadros copiando com propriedade o estilo do pintor clássico. Em seguida assinava suas falsificações como Vermeer. Assim, ele dizia ter “encontrado” um autêntico Vermeer e o vendia por preços exorbitantes, o fato sempre era comemorado pelos críticos. Obviamente que Meegeren no início de carreira fora um pintor original até de alguma expressão com próprios trabalhos; porém, sua personalidade conturbada e as tendências vanguardistas da época impediram maiores sucessos de seus trabalhos que eram de cunho mais conservador (Goodley, 1990).

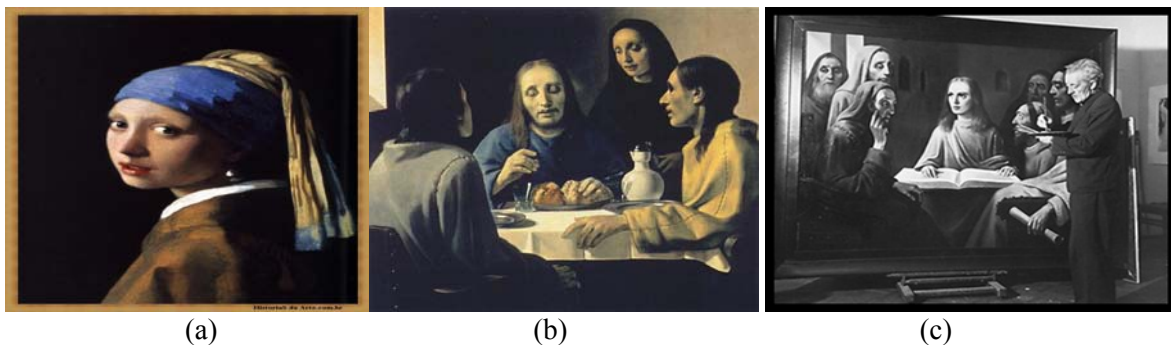
Em 1937, Meegeren terminou seu mais célebre “Veermers”, “Cristo e os discípulos em Emaus”, Figura 2b. Meegeren teve o cuidado em produzir uma obra que não era muito o estilo de Vermeer, só se conhecia até então uma tela religiosa de Vermeer, “Cristo na casa de Marta e Maria”. Essa tela havia sido descoberta em 1901, por um crítico holandês prestigiado, Abraham Bredius, em uma galeria em Londres. Bredius concluiu que a tela deveria ter sido pintada por Vermeer no início de sua carreira e vaticinou que outros quadros dessa época deveriam existir e poderiam aparecer a qualquer momento.

“É um momento maravilhoso na vida de um amante da arte quando se encontra confrontado com uma pintura desconhecida de um grande mestre, intocada, na lona original, e sem nenhuma restauração, exatamente como deixou o estúdio do pintor! Temos aqui – sou inclinado a dizer – a obra-prima de Jan Vermeer.” A. Bredius (Goodley, 1990)

Com a chegada da Segunda Guerra Mundial, Meegeren envolveu-se em negócios com Goering (chefe nazista), enquanto a Alemanha dominava a região. O pintor vendia para ele quadros tradicionais da cultura holandesa, inclusive alguns Vermeer falsificados. Com o fim da guerra, as autoridades holandesas novamente no comando trataram de investigar os antigos colaboradores com os nazistas. Percebeu-se, portanto, Meegeren com uma fortuna inexplicável, acusaram-no de traição a pátria, crime de pena de morte à época. Para escapar das acusações, Meegeren assumiu que falsificara alguns quadros que eram considerados autênticos Vermeers. Ele justificara tal atitude como uma espécie de vingança contra a crítica artística que não aclamara seu trabalho no início de sua carreira. Durante seu julgamento

chegou a começar reproduzir outro Vermeer à sua moda para convencer o júri, Figura 2c, com o irônico título “Cristo entre os doutores”. Entretanto, não terminara completamente a pintura, pois, com a saúde debilitada, logo veio a óbito por um ataque cardíaco.

Passada essa etapa, algumas pessoas não acreditaram na história de Meegeren, principalmente aquelas que gastaram um bom dinheiro comprando os “autênticos” Veermers. Alegavam que pelo menos “Cristo e os discípulos em Emaús” não poderia ser uma falsificação de Meegeren, sob argumentação de que era de qualidade muito superior ao que ele tentara fazer na prisão para provar sua inocência (Goodley, 1990).



**Figura 2 - (a)** Autêntico Vermeer, “A Dama do Brinco de Pérola”. **(b)** Falsificação célebre de Meegeren, “Cristo e os discípulos em Emús”. **(c)** Pintura irônica em cárcere por Meegeren, “Cristo entre os doutores”  
Fonte: Goodley, 1990

Toda essa polêmica perdurou até 1967 quando cientistas da *Carnegie Mellon University* por meio de uma comissão internacional de químicos, físicos, matemáticos e historiadores provaram, com artifícios de datação de obras antigas, através de análise de decaimento radioativo, o qual usa aplicações de equações diferenciais, que a obra em questão não podia ser do século XVIII. Abaixo está uma síntese dos procedimentos usados pela Universidade americana que provam a falsificação. O escopo desse trabalho de iniciação científica reside na análise dessas equações.

## **Materiais e Métodos**

Para entender como a dúvida a respeito da idade dos quadros pintado à semelhança do estilo de Vermeer foi solucionada devem-se compreender alguns conceitos químicos e matemáticos. Esse é também uma bela exemplificação de modelagem matemática diferencial. Na parte química, vale ressaltar que a chave para datação de pinturas e outros materiais como rochas e fósseis apóia-se no fenômeno da radioatividade descoberta na virada do século XIX.

Após a descoberta que existem átomos com o mesmo número atômico, mas com massas atômicas diferentes (elementos isótopos), os cientistas começaram a observar que algumas dessas espécies atômicas tinham a característica de emitir radiações. Os trabalhos desses fenômenos, realizados pela equipe de Rutherford e também pelo casal Marie e Pierre Curie com isótopos de Urânio, Polônio e Rádio, deram origem ao estudo da radioatividade.

O célebre físico Ernest Rutherford (1871-1937) e seus colegas mostraram que o átomo de certo elementos “radioativos” são instáveis e em determinados períodos de tempo transmutam-se, de maneira espontânea, a formarem átomos de um novo elemento. Cientificamente, radioatividade passava a ser uma propriedade do átomo. O trabalho dessa equipe de físicos mostrou que a radioatividade de uma substância é diretamente proporcional ao número de átomos da substância no tempo presente, nesse ponto observa-se um caso de aplicação diferencial, no qual não se conhece a sentença matemática da função, mas sabe como ela varia ao longo do tempo. (Braun, 1993).

Nesse sentido, para o manuseio desse modelo teórico químico faz-se necessário à aplicação da modelagem matemática. Para melhor compreensão e extração de novos dados a cerca radioatividade química, especificamente datação química, utiliza-se uma aplicação de equações diferenciais ordinárias.

A definição de equação diferencial é baseada em uma equação que contem derivadas (ou diferenciais) de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma ou mais variáveis independentes. Outra classificação pertinente é quanto ao tipo, que pode ser ordinária ou parcial. Se uma equação contiver somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes em relação a uma única variável independente, ela será chamada de equação diferencial ordinária (EDO), por exemplo:

$$\frac{dy}{dx} + 5y = e^x \quad . \quad (4)$$

Em contraposição, uma equação que envolve as derivadas parciais (cálculo envolvendo funções de duas variáveis), com uma ou mais variáveis dependentes relacionadas com duas ou mais variáveis independentes é chamada de equação diferencial parcial (EDP) (ZILL, 2001), por exemplo:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad . \quad (5)$$



A modelagem em estudo, em conformidade com as pesquisas de Rutherford, tratou primeiramente de equações separáveis, e em um segundo momento de sua solução por meio da técnica do fator integrante.

Na resolução de equações diferenciais, frequentemente tem-se à necessidade de resolver integrais (que em linhas gerais seria o limite de um soma infinita, “inverso das derivadas”). No caso do decaimento radioativo, vê-se um exemplo de variáveis separáveis, a solução é por integração.

Assim,  $N(t)$  denota o número de átomos presentes na amostra no tempo  $t$ ,  $dN/dt$  denota a taxa de desintegração de átomos da amostra por unidade de tempo.

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N \quad (6)$$

$$\frac{1}{N} dN = -\lambda dt$$

$$\int \frac{1}{N} dN = - \int \lambda dt$$

$$\ln N = -\lambda t + C \quad (7).$$

cujo problema de valor inicial é  $N(t_0) = N_0$ , tem-se:

$$C = \ln N_0 + \lambda t_0 \quad (8)$$

$$\ln \frac{N_0}{N} = -\lambda(t - t_0)$$

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda \int_{t_0}^t ds} \quad (9)$$

nessa análise se,  $N/N_0 = 1/2$ , então:

$$(t - t_0) = \frac{\ln(2)}{\lambda} = 0.6931/\lambda \quad (10)$$

Com isso nota-se que a meia vida de uma substância é calculada por  $\ln(2)$  dividido pela constante de decaimento da mesma. Em todos os casos a constante  $\lambda$  é medida no recíproco da medida de tempo (Silva, 2011).

A partir dessa função (9), proveniente de uma solução analítica da equação diferencial, a datação radioativa seria possível, se fosse mensurável ou conhecido o valor  $N_0$ .  $N$  também seria avaliável, na maioria das vezes, fazendo uma análise da substância atual;  $\lambda$  é conhecido para maioria das substâncias ou pode ser computado. No entanto, há impossibilidade se da ao

achar  $N_0$  que geralmente não se pode precisar, pois quase sempre não se conhece as substâncias no início da fabricação das pigmentações, no caso das pinturas, teve-se acesso somente ao quadro já pintado. Indiretamente, entretanto, haveria a possibilidade de uma faixa com possíveis valores para  $N_0$  que deram pistas sobre a idade da pintura, proveniente de investigações geológicas.

Devido às limitações físicas de coletas de amostras nas pinturas investigadas, um pouco dos conceitos de química elementar foi usado para conseguir adaptar essa modelagem as condições reais existentes.

Para o caso das pinturas de Meegeren, e todos os outros pintores observou-se que desde mais de dois mil anos sempre se usa tintas com pequenas quantidades da substância química chumbo 210 ( $Pb^{210}$ ), e ainda menores de rádio 226 ( $Ra^{226}$ ).

Para chegar-se no raciocínio do decaimento radioativo do  $Pb^{210}$  deve-se atentar para o fato de que a maioria das rochas da crosta Terrestre contém Urânio. Esse elemento decai para outros elementos através de três séries radioativas principais de decaimento; a analisada em questão termina em um elemento não radioativo, no caso  $Pb^{206}$ , Figura 3. Isso explica a razão dos pigmentos de tintas (por exemplo, o alvaiade, branco de chumbo, ou chumbo branco) conterem uma pequena concentração de  $Pb^{210}$  (radioativo) e uma parte menor ainda de  $Ra^{226}$ , já que são feitos a partir de minérios que originalmente continham essa série de decaimento radioativo. (Keish, 1987)

O branco de chumbo, portanto, contém quantidades de substância radioativas e é usado para produção de colorações. A meia vida do  $Pb^{210}$  é de 22 anos. Manufaturada de rochas que contém também o  $Ra^{226}$  cuja meia vida é 1600 anos e decai para  $Pb^{210}$ . Na rocha matriz o  $Pb^{210}$  e o  $Ra^{226}$  estão em “equilíbrio radioativo”, isso significa que o total de rádio que decai para chumbo é igual ao total de chumbo desintegrando por unidade de tempo.

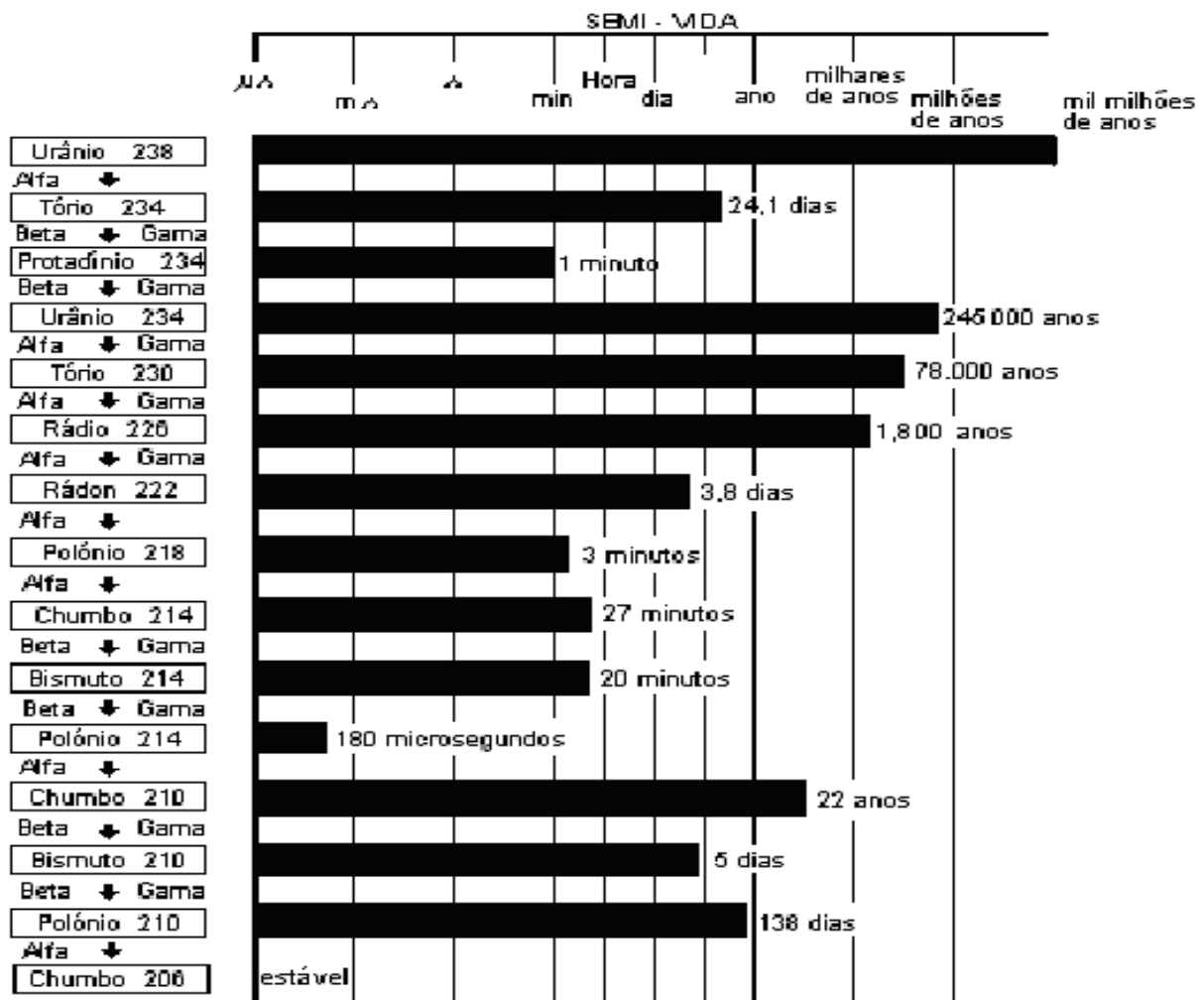
Uma propriedade para equilíbrio radioativo é que esse ocorre quando as taxas das atividades nucleares se igualam em todas as etapas de uma série de desintegrações. Em (6)  $\lambda N = cte$  (Rezende, 2010).

$$\lambda t_{1/2} = \ln 2$$

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$$

$$\frac{N}{t_{1/2}} = cte$$

Na manufatura desse pigmento, a maioria do radio é removido como escória de minério. Nesse momento a concentração  $Pb^{210}$  no pigmento recém fabricado decai expressivamente até que um novo equilíbrio com a pequena quantidade de  $Ra^{226}$ , que não fora completamente removida no processo de fabricação, seja restabelecido.



**Figura 3** - Decaimento radioativo do Urânio-238.  
 Fonte: <http://www.cienciaviva.pt/oficinaweb/>

As outras séries (famílias) radioativas que existem são devido à nuclídeos que se desintegram a outros nuclídeos.

Observe as famílias:

- a) família do Urânio: terminam no  $Pb^{206}$  e ocorrem sempre que o número de massa do elemento for da forma  $4n+2$ ;
- b) família do Actínio: terminam no  $Pb^{207}$  e ocorrem sempre que o número de massa do elemento for da forma  $4n+3$ ;

- c) família do Tório: terminam no  $\text{Pb}^{208}$  e ocorrem sempre que o número de massa do elemento for da forma  $4n$ ;
- d) família do Netúnio (artificial): terminam no  $\text{Bi}^{209}$  e ocorrem sempre que o número de massa do elemento é da forma  $4n+1$ .

Outro entendimento que pode ser feito sobre datação radioativa concerne na consideração de um radionuclídeo I que decai em um produto final F com uma meia-vida conhecida  $t_{1/2}$ . Em um instante de tempo particular  $t=0$ , começa-se com  $N_0$  núcleos iniciais e nenhum dos núcleos do produto final. Em um instante posterior  $t$ , observa-se que permanecem  $N_I$  núcleos iniciais, enquanto aparecem  $N_F (= N_0 - N_I)$  núcleos do produto. Os núcleos iniciais decaem de acordo com a equação (9).

$$N(t) = N_0 e^{-\lambda t},$$

e, assim,

$$t = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{N_0}{N_I} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \frac{N_0}{N_I}$$

que pode ser substituído  $N_I + N_F = N_0$ ,

$$t = \frac{t_{1/2}}{\ln 2} \ln \left( 1 + \frac{N_F}{N_I} \right) \quad (11)$$

Essa equação denota uma medição da razão entre os núcleos do produto e os núcleos originais que determinará a idade de uma amostra. Esse cálculo é baseado na hipótese de que nenhum dos núcleos do produto existia em  $t=0$ . Essa consideração pode nem sempre ser válida, mas existem técnicas para datação radioativa que podem ser utilizadas para efetuar correções, de modo a considerar-se a presença desses núcleos originais no produto.

Esse método também pode ser utilizado para determinar o tempo decorrido desde a formação do sistema solar; um exemplo inclui as razões entre o  $\text{U}^{238}$  e o  $\text{Pb}^{210}$ . Rochas da Terra, rochas da Lua e meteoritos analisados através desses métodos indicam idades comuns de aproximadamente  $4,5 \times 10^9$  anos (Vanpamel, 2010), que se toma como sendo a idade do sistema solar.

Para melhor compreensão do que foi dito acima, mostra-se o cálculo de uma amostra de rocha, determina-se laboratorialmente a razão entre  $Pb^{210}$  e o  $U^{238}$  igual a 0,65. A partir desses dados iniciais é visto que, a partir da equação (11):

dado:

- $t_{\frac{1}{2}}^{U^{238}} = 4,1 \cdot 10^9$  anos (tempo de meia vida do  $U^{238}$ );

$$t = \frac{4,1 \cdot 10^9}{0,693} \ln(1 + 0,65) = 3,0 \cdot 10^9 \text{ anos.}$$

Assim, essa rocha é um pouco mais nova do que a idade máxima de  $4,5 \times 10^9$  anos que se determina para rochas do sistema solar, o que pode ser um indicativo que a rocha não tinha se solidificado até  $3,0 \times 10^9$  anos atrás. O  $Pb^{210}$  que decaiu do  $U^{238}$  antes desse período provavelmente “evaporou-se” da rocha ainda em estado líquido de formação. Somente após a solidificação da rocha é que o  $Pb^{210}$  começou a acumular.

Todas essas considerações são particularmente convenientes para se determinar a idade de uma pintura baseada no decaimento do chumbo radioativo como será pormenorizado nesse trabalho.

Agora, a análise será feita a partir das informações descritas nos parágrafos precedentes e da série de decaimento radioativo do  $Pb^{210}$ . O cálculo do total de  $Pb^{210}$  presente em uma amostra de pintura do quadro é feito em termos do total originalmente presente no tempo da manufatura. Assim,  $y(t)$  é a quantidade  $Pb^{210}$ , (em gramas), presente no chumbo branco no tempo  $t$ , e  $y_0$  a quantidade de  $Pb^{210}$  (gramas) no pigmento no tempo quando fabricado  $t_0$ ; e  $r(t)$  o número de desintegração do  $Ra^{226}$  por minuto por grama do pigmento no tempo  $t$ .  $\lambda$  denota a constante de decaimento do  $Pb^{210}$ . Assim tem-se:

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y + r(t). \quad (12)$$

com problema de valor de inicial:

$$y(t_0) = y_0. \quad (13)$$

Nessa análise em questão considera-se a meia vida do rádio constante em relação ao Chumbo, já que o primeiro é de 1600 anos e a outro de 22 anos. Para solução dessa equação

diferencial de primeira ordem (12), de maneira analítica é preciso algumas definições matemáticas.

Equação Diferencial Linear de Primeira Ordem. Uma equação diferencial é linear quando é de primeiro grau na variável dependente e em todas as suas derivadas se apresentando na forma:

$$a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_0(x)y = g(x) \quad (14)$$

quando  $g(x)=0$ , a equação linear é chamada de homogênea; do contrário, é não homogênea.

O primeiro passo da solução analítica de uma equação como essa é colocá-la na forma padrão. Divide-se, portanto, ambos os lados de (14) pelo coeficiente dominante  $a_1(x)$  a fim de se obter uma solução mais conveniente, a forma padrão, uma equação linear:

$$\frac{dy}{dx} + P(x)y = f(x) \quad (15)$$

O procedimento necessário para essa solução particular de (15) é conhecido com método de variação de parâmetros, comumente conhecidos e que será omitida sua demonstração nesse trabalho.

Voltando agora em na equação original (12) e (13), vê-se agora:

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dt} &= -\lambda y + r(t), \\ y(t_0) &= y_0 \end{aligned}$$

Para resolução dessa equação diferencial temos método de fatores integrantes:

- i. observar a forma:  $y' + p(x)y = q(x)$  (forma padrão);
- ii.  $u = e^{\int p(x)dx}$  (fator integrante);
- iii.  $uy = \int uq(x)dx$ ;  $u = e^{\int \lambda dt}$  (multiplicação da forma padrão pelo fator integrante);
- iv. (integração de ambos os lados);

$$\begin{aligned} u &= e^{\lambda t} \\ y &= \frac{1}{u} \int uq(x) dx \\ y &= \frac{1}{e^{\lambda t}} \int e^{\lambda t} r dt \end{aligned}$$

logo:

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (16)$$

A partir da solução (16) da equação diferencial (12),  $y(t)$  pode ser facilmente medido a partir apenas a informação de  $y_0$ . Pois, conhecendo-se a quantidade de  $Pb^{210}$  inicialmente na mistura a equação (16) seria usada para o cálculo do  $\Delta t$  ( $t-t_0$ ), e conseqüentemente determina-se a idade da pintura. Mas o fato é que não se pode medir diretamente a quantidade de  $y_0$  na mistura, como já observado. Nesse caso uma saída alternativa seria estimar possíveis valores para  $y_0$  a partir de informações de quantidade de minerais dessa série de decaimento radioativo nas rochas terrestres. Esse raciocínio é corroborado pelo fato de que originalmente a quantidade de  $Pb^{210}$  nas rochas da crosta terrestre está em equilíbrio radioativo com sua série de decaimento – a quantidade de radio que decai para  $Pb^{210}$  é a mesma quantidade de  $Pb^{210}$  que decai por unidade de tempo.

Por conseguinte, foram avaliadas algumas amostras de rochas da crosta terrestre e analisadas sua taxa de decaimento de rádio (Braun, 1993), os dados estão resumidos na Tabela 1. Percebeu-se que essa variação ocorre de 0.18 a 140 (número de átomos em desintegração por gramas por minutos). Por conseguinte, o número átomos em desintegrações de  $Pb^{210}$  por minuto por grama, no tempo da manufatura, variará de 0.18 a 140 também. Essa informação impossibilitou que se calculasse nem mesmo uma aproximação razoável para  $y_0$ . A implicação desse fato é, portanto, um demasiado intervalo de valores para  $y_0$  e  $y(t)$ , já que o número de desintegrações de  $Pb^{210}$  no momento da manufatura é proporcional a quantidade no tempo presente. Nesse sentido, a equação (16) não consegue fornecer nem mesmo uma aproximação grosseira para idade da pintura, baseando-se em análise e estimativas coletadas de rochas Terrestres.

**Tabela 1:** Rochas e concentração de amostras. (Número de desintegrações de átomos por grama por minuto)

<b>Descrição e Localização</b>	<b>Desintegração por minuto de Ra<sup>226</sup></b>
Concentração na rocha (Oklahoma-Kansas)	4.5
Minério bruto (S.E. Missouri)	2.4
Concentração na rocha (S.E. Missouri)	0.7
Concentração na rocha (Idaho)	2.2
Concentração na rocha (Idaho)	0.18
Concentração na rocha (Washington)	140.0
Concentração na rocha (Canadá)	1.9

Concentração na rocha (Canadá)	0.4
Concentração na rocha (Bolívia)	1.6
Concentração na rocha (Austrália)	1.1

Fonte: Braun, 1993

Outro método de datação radioativa é referente ao isótopo radioativo do  $C^{14}$  presente na atmosfera; cerca de 1 átomo de carbono em  $10^{12}$  é o radioativo  $C^{14}$ . Segundo análises cada grama de carbono radioativo tem uma atividade de cerca de 12 decaimentos por minuto devido ao  $C^{14}$ . Nesse sentido, organismos vivos podem absorver esta atividade pela aspiração de  $CO_2$  ou ingerindo plantas que tenham feito isso. Quando os organismos morrem, eles param de absorver o  $C^{14}$ , e a concentração desse elemento presente no instante de sua morte começa decair. Esse método de datação por radio carbono (desenvolvida em 1947 por Willard Libby, que foi laureado com o Nobel de química em 1960 por esse trabalho) é útil para amostras orgânicas (Adam, 2005). Por exemplo, se uma amostra examinada apresenta 6 decaimentos por minuto por grama de carbono, sabe-se que a atividade original foi reduzida pela metade, e a amostra deve ter a idade correspondente a uma meia-vida do  $C^{14}$  (conhecida de aproximadamente 5730 anos).

Em se tratando de pinturas, um dado curioso é que desde meados do século XIX teste envolvendo armas nucleares aumentou significativamente a concentração radioativa de carbono na atmosfera terrestre. Desse modo, ironicamente esses indesejáveis testes proporcionaram mais um método para verificação de falsificações de obras de arte. Ora, muitos materiais, como óleos de linhaça usados por pintores na tinta, contém esse tipo de carbono 14, portanto pinturas feitas após esses testes nucleares conterão muito mais  $C^{14}$  do que pinturas anteriores a esse período (Magill, 2005). Entretanto, essa técnica não foi utilizada para esse quadro em questão, no qual se investigava falsificação proveniente da década de 30 do século XIX. De qualquer modo, essa técnica configura-se também como uma importante ferramenta de datação de pinturas.

### **Resultados e Discussões**

Outra solução para o problema é proveniente do raciocínio, não de amostra e estimativas de intervalo baseado na análise direta de rochas terrestres, mas sim de uma constatação de que se podem distinguir intervalos de 300 anos (autêntico Vermeer do século XVI) de pinturas de 30 anos (intervalo de uma falsificação moderna para a data de investigação da *Carnegie*



*Mellon University*). A base para essa aceção é a observação de que se a tinta é muito antiga (300 anos), comparada aos 22 anos de meia-vida do chumbo, a quantidade de chumbo radioativo será aproximadamente à de radio cuja meia vida é 1600 anos. Em um período de 300 anos a quantidade de radio permanece praticamente constante e a quantidade de chumbo já teria decaído bastante; pois, 300 anos possibilitam mais de 10 intervalos de meia-vida do chumbo. Caso a tinta fosse recente, cerca de 20, 30 anos, a quantidade de chumbo radioativo presente será bem superior à do rádio. Tudo isso, refere-se ao fenômeno de equilíbrio de decaimento radioativo entre as substâncias de uma mesma série e as exorbitantes diferenças naturais da meia vida do rádio e chumbo radioativo, fundamenta o raciocínio descrito acima.

A precisão desse argumento é matematicamente transcrito da seguinte maneira. Considera-se inicialmente que tinta tenha 300 anos. Nesse caminho faz-se o sentido inverso para resolução do problema; ao invés de se entrar com hipóteses iniciais de concentrações, devido às discrepâncias nas amostragens, já se entrou com o dado que se procura determinar,  $\Delta t$  na fórmula (16), e verificou-se, a partir dessa hipótese da idade, se as concentrações iniciais são razoáveis para a situação em análise:

$$y(t) = \frac{r}{\lambda} (1 - e^{-\lambda(t-t_0)}) + y_0 e^{-\lambda(t-t_0)} \quad (17)$$

$$\lambda y_0 = y(t) e^{300\lambda} - r(e^{300\lambda} - 1) \quad (18)$$

Nesse ponto da análise fez-se necessário compreender que existem valores absurdamente grandes para  $\lambda y_0$ . Para determinar o que é uma seria uma taxa de decaimento incoerentemente grande fazem-se necessárias algumas considerações prévias sobre a série de decaimento radioativo em questão. Para compreensão desse raciocínio é preciso o cálculo avaliativo da taxa de desintegração do Urânio (topo da série de decaimento) a partir das concentrações iniciais ( $y_0$ ) de  $Pb^{210}$  no momento da manufatura da tinta ( $t_0$ ). Depois desse momento é que se fez a avaliação de coerência desse valor encontrado ( $\lambda y_0$ , que será descrito a seguir) com os valores encontrados na equação (18).

Experimentalmente, por meio da análise de amostras de rochas, sabe-se que a quantidade de  $Pb^{210}$  está balanceada com a quantidade de radio na rocha origem que será matéria-prima para confecção do pigmento. Assim,  $\lambda y_0 = R$ , no qual  $R$  representa o número de desintegração de  $Pb^{210}$  por minuto por grama.

Outro fato a se considerar é a cerca das concentrações médias de Urânio nas rochas terrestres que não passam de 2.7 ppm (0,00027%). Em contrapartida, apenas haveria algumas raras

rochas que conteriam de 2 a 3%. Para se chegar nesses dados pode-se calcular a concentração de Urânio a partir da taxa de decaimento do  $Pb^{210}$  no momento da manufatura ( $y_0$ ).

Se for considerar que no momento da manufatura das tintas a taxa de decaimento do  $Pb^{210}$  é de 100 desintegrações por minuto por grama. A seguir serão detalhados esses cálculos.

Nesse momento será ilustrado como se obter a concentração de Urânio<sup>238</sup> na rocha do minério a partir da taxa do decaimento do chumbo-210(dpm|g).

Dados:

- $t_{\frac{1}{2}}^{U^{238}} = 4,1 \cdot 10^9$  anos (tempo de meia vida do  $U^{238}$ )
- o  $Pb^{210}$  está em equilíbrio radioativo com o  $U^{238}$  no minério:

$$\frac{dN}{dt} = -\lambda N = -100 \text{ dpm|g}$$

- 1ano = 525.600 min.
- a massa de urânio permanece praticamente constante em um período de 300 anos.

a. cálculo da constante de decaimento do Urânio, tendo sua meia-vida:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{4,515,25 \cdot 10^{14}} = 0,029 \cdot 10^{-14}$$

b. cálculo do número de átomos de  $U^{238}$  no minério no instante  $t_0$

$$N = \frac{100}{\lambda}$$

$$N = \frac{100}{0,029 \cdot 10^{-14}} = 3,42 \cdot 10^{17}$$

assim tem-se  $3,42 \cdot 10^{17}$  átomos de urânio no instante  $t_0$  para uma taxa de -100dpm|g de  $Pb^{210}$ .

c. cálculo da concentração de  $U^{238}$  no minério.

1mol de urânio \_\_\_\_\_ 238g \_\_\_\_\_  $6,02 \cdot 10^{23}$  átomos de urânio por mol

$$X \quad \underline{\quad 3,42 \cdot 10^{17} \quad}$$

$$x = 0,0135\%$$

Finalmente, obteve-se a concentração de urânio a partir da taxa de decaimento inicial de chumbo de 100 desintegrações por minuto por grama. Desses cálculos depreendeu-se que a rocha continha cerca 0,014% de Urânio aproximadamente. Se for considerada uma hipótese raríssima de rochedo cuja quantidade de Urânio é de 3% a taxa de desintegração  $\lambda y_0$  é 30.000

desintegração por minuto por grama. Sendo assim, é intolerável algo maior que isso (Braun, 1993).

Continuando a análise da equação (16), faz-se uso da Tabela 2; pois, precisa-se da quantidade em tempo presente na pintura de desintegrações de  $Pb^{210}$ . Para consegui-la é mais apropriado usar os dados de polônio ( $Po^{210}$ ), em substituição ao  $Pb^{210}$ , já que as taxas de decaimento do polônio são equivalentes e a meia vida do chumbo depois de alguns anos. Nesse sentido é mais fácil medir a taxa do polônio já que é da ordem de frações de segundos enquanto a do chumbo é de 22 anos, o que dificulta os trabalhos químicos, conforme a Figura 3, anteriormente citada.

Nesses cálculos observa-se, da equação de meia vida (10) para o Pb, que:

$$e^{-\lambda t} = e^{-(\ln 2 / 22)t} = 2^{-(t/22)}$$

A taxa de desintegração de  $Po^{210}$  e  $Ra^{226}$  foram medidas para “Discípulos de Emaús” e algumas outras obras avaliadas.

**Tabela 2:** Pinturas de autorias questionadas. (Todas as taxas desintegrações por minuto por grama de minério)

Descrição	$Po^{210}$ desintegrações	$Ra^{226}$ desintegrações
“Discípulos de Emaús”	8.5	0.8
“Lavagem dos pés”	12.6	0.26
“Mulher ouvindo música”	10.3	0.3
“Mulher tocando bandolin”	8.2	0.17
“A rendeira”	1.5	1.4
“Garotas rindo”	5.2	6.0

**Fonte:** Differential equations and their applications: an introduction to applied mathematics. Martin Braun, 1993

Voltando a equação (15), para o caso de “Discípulo de Emaús”:

$$\lambda y_0 = \gamma(t) e^{-\lambda t} - r(e^{-\lambda t} - 1)$$

$$\lambda y_0 = (8,5) 2^{150/11} - 0,8(2^{150/11} - 1)$$

$$\therefore \lambda y_0 = 98,050$$

Lembrando que uma taxa de desintegração de 98.050 é absurdamente alta, pois remeteria a quantidades inimagináveis de Urânios nas rochas.

O mesmo pode ser feito para outros quadros da Tabela 2:

- “Lavagem de pés”:

$$\lambda y_0 = (12,6)2^{150/11} - 0,26(2^{150/11} - 1) = 157134.1;$$

- “Mulher lendo música”:

$$\lambda y_0 = (10,3)2^{150/11} - 0,3(2^{150/11} - 1) = 127337.2;$$

- “Mulher tocando bandolim”:

$$\lambda y_0 = (8,2)2^{150/11} - 0,17(2^{150/11} - 1) = 102251.7;$$

- “A rendeira”:

$$\lambda y_0 = (1,5)2^{150/11} - 1,4(2^{150/11} - 1) = 1274.7;$$

- “Mulher sorridente”

$$\lambda y_0 = (5,2)2^{150/11} - 6(2^{150/11} - 1) = -10181;$$

Finalmente, observou-se que as obras, “Discípulos de Emaús”, “Lavagem de pés”, “Mulher lendo música” e “Mulher tocando bandolim” são falsificações modernas de Veermer; entretanto, as obras, “A rendeira” e “Mulher sorridente” não são falsificações de Veermer, como afirmaram alguns especialistas, pela constatação de que as concentrações de rádio e polônio serem tão discrepantes.

## Conclusão

Com o uso de técnicas para resolução de equações diferenciais, sejam elas separáveis ou através do fator integrante, consegue-se a modelagem do fenômeno de decaimento radioativo e interpretação da idade de uma pintura, ou mesmo, o tempo decorrido da formação desde a formação do sistema solar que usam métodos semelhantes. Sendo assim, por meio da análise do  $Pb^{210}$  pode-se afirmar que o belo quadro “Cristo e os discípulos em Emaus”, que foi comprado pela sociedade Rembrandt da Bélgica por US\$170.000, era uma falsificação moderna, ele certamente não tem 300 anos. Por análises semelhantes mostrou-se também que os quadros “Lavagem dos pés”, “Mulher ouvindo música” e “Mulher tocando bandolim” são indiscutivelmente falsos Vermeers. Por outro lado, os quadros “A rendeira” e “Garotas Rindos”, não podem ser falsificações recentes de Veermer, como dizia alguns peritos, uma vez que para esses dois quadros o  $Po^{210}$  está aproximadamente em equilíbrio radioativo com o  $Ra^{226}$  e tal equilíbrio não foi observado em quaisquer amostras do século XIX ou XX.

Esse caso como que inclui conceitos de diversas áreas serviu também para acalorar a discussão de o significa uma obra de arte autêntica ou não. Se o valor dessas obras reside em sua qualidade técnica ou nos nomes que os assinam; no grau de inovação que essas obras trouxeram ao seu contexto histórico. Essas são discussões secundárias também geradas pelo trabalho.

### **Agradecimentos**

À professora Dr. Sonia Sarita Berrios Yana da Faculdade de Matemática pelo incentivo e orientação nessa pesquisa. Ao Programa de Educação Tutorial de Faculdade de Engenharia Civil pelos estímulos científicos, acadêmicos e financeiros. Enfim, à Universidade Federal de Uberlândia pelo suporte institucional.

### **Referências Bibliográficas**

ADAM, R. Pigments in the battle against forgery. An International Newsletter Monitoring Technical and Commercial Developments in the Pigments Sector. Setembro, 2005. 8p.

BORESI, A. P.; SCHMIDT, R. J. Dinâmica. São Paulo: Pioneira, 2003. 765p

BRAUN, M. Equações Diferenciais e suas Aplicações. Springer, 1993. p. 11-20

CAVALIER, R. Art or Forgery? The Strange Case of Han van Meegeren. 1997. CD-ROM

GOODLEY, J. Master Art Forger - The Story of Han Van Meegeren. New York: 1990. 245p

KEISCH, et al. Dating and authenticating works of art by measurement of natural alpha emitters. Science, 1987

MAGILL, J.; GALY, J. Radioactivity, radionuclides, radiation. Volume 1. Springer, 2005. 259p.

REZENDE, R. Radioatividade. Disponível em: [www.rumoaioita.com.br](http://www.rumoaioita.com.br). Acessado em: 22/10/2010

STEWART, J. Cálculo. São Paulo: Thomson, 2008. Volume 1. 1014p

SILVA, E. C. Equações Diferenciais Ordinárias em Alguns Contextos Históricos e Reais. Trabalho de Conclusão de Curso. Licenciatura em Matemática. UFSCAR . 2011. p. 8-15

VANPAEMEL, G. X-ray and old masters. The art os the scientific conoisseur. Endeavour, Vol. 34, p65-71. 2010.

ZILL, Dennis G.; CULLEN, Michael R. Equações Diferenciais. Volume 1. Tradução Antonio Zumpano, revisão técnica: Antonio Pertence Junior. São Paulo: Pearson Makron Books, 2001.