

TÉCNICAS HEURÍSTICAS DE OTIMIZAÇÃO APLICADAS EM ENGENHARIA

SIMONE PEREIRA SARAMAGO¹, VALDER STEFFEN JR.²

Resumo: O objetivo deste trabalho é apresentar um estudo sobre os métodos de otimização e aplicá-los na solução de problemas de engenharia. São consideradas as técnicas heurísticas de otimização, que operam de maneira “aleatória orientada”. Três métodos específicos, inspirados em fenômenos da natureza, são considerados: Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing e Otimização por Colônia de Partículas. Este trabalho tem por objetivo, também, definir problemas inversos e apresentar alguns conceitos introdutórios a respeito de sua classificação e dos métodos desenvolvidos para a formulação e solução dos mesmos. As técnicas de otimização estudadas são aplicadas na solução de um modelo físico simplificado do comportamento elástico de duas molas (problema direto) e na determinação dos parâmetros correspondentes à variação da rigidez de um prédio de três andares submetido a carregamentos externos (problema inverso). Os resultados obtidos pelos três métodos são comparados. No caso do problema direto, estes resultados também são comparados com os da literatura.

Palavras-chave: otimização, métodos heurísticos, problema direto, problema inverso.

Abstract: The objective of this work is to present a study of optimization methods and applying them to solve engineering problems. The heuristic methods, which are pseudo-random methods, will be taken into account. Three specific methods, based on phenomena of nature, are focused: Genetic Algorithms, Simulated Annealing and Particle Swarm Optimization. This work also aims to define inverse problems and to present some introductory concepts concerning its classification and the methods developed for the formulation and solution of them. The studied techniques of optimization are applied in the solution of a simplified physical model of the elastic behavior of two springs (direct problem) and in the determination of the parameters corresponding to the variation of the stiffness of a three-level building subjected to external loads (inverse problem). The results obtained by these three methods are compared. In the case of the direct problem, these results are also compared with the literature.

Keywords: Optimization, heuristic methods, direct problem, inverse problem

¹Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU, e-mail: simone@mec.ufu.br

²Faculdade de Engenharia Mecânica, UFU, e-mail: vsteffen@mecanica.ufu.br

Av. João Naves de Ávila, 2160, Santa Mônica, Uberlândia, MG, CEP: 38400-902, Brasil.

1. INTRODUÇÃO

O problema de achar o valor ótimo (máximo e/ou mínimo) de uma função ou conjunto de funções, possivelmente sujeito a um conjunto de restrições, é conhecido como problema de otimização. Dependendo do problema e do número de funções que se deseja otimizar, pode-se encontrar uma única solução, um conjunto de soluções ou ainda não haver solução que satisfaça todas as funções.

À medida que o número de funções e o número de variáveis aumentam as dificuldades em se determinar o conjunto de soluções ótimas também aumentam. É neste contexto que surge a necessidade de desenvolver técnicas matemáticas e computacionais que refinem o processo de otimização, dado que este é amplamente utilizado para resolver problemas de engenharia.

Engenheiros e cientistas estão constantemente procurando por técnicas que permitam encontrar soluções ótimas para os mais diversos problemas. De forma geral, a tarefa de otimização envolve vários componentes: o espaço de projeto (ou de busca) onde são consideradas todas as possibilidades de solução de um determinado problema; a função objetivo (também chamada de função custo, função de avaliação ou

critério de desempenho) que representa uma maneira de avaliar os elementos do espaço de projeto; as restrições que delimitam o espaço de projeto e demarcam a área onde a busca pode ocorrer e quais as limitações e penalidades a função objetivo sofrerá; e o otimizador, ou seja, o algoritmo que irá fornecer a resposta ao problema de otimização. Com frequência uma das chaves para resolver com sucesso o problema de otimização está na escolha do método que melhor irá se adequar à solução do problema.

Quanto à relação entre as variáveis de decisão na função objetivo e nas restrições, tais métodos podem ser classificados em métodos de programação linear e de programação não-linear.

Há uma grande variedade de métodos na literatura, sendo que os não-lineares podem ser divididos em dois grandes grupos: métodos determinísticos e estocásticos:

- *Determinísticos*: são métodos baseados no cálculo de derivadas ou em aproximações destas, necessitando de informações do vetor gradiente, seja procurando o ponto onde ele se anula ou usando a direção para a qual aponta. Esses métodos produzem melhores resultados para funções contínuas, convexas e unimodais (funções que possuem apenas um ponto de mínimo ou de máximo). Dentre estes métodos se podem citar: Máxima Descida, Método de Newton,

Quase-Newton, Gradiente Conjugado, Método de Levenberg-Marquadt, Método Simplex.

- *Estocásticos*: são métodos que trabalham de maneira “aleatória orientada”, dentre os quais temos: Simulated Annealing (SA), Algoritmos Genéticos (AG), Busca Tabu. Estes métodos são conhecidos também como métodos heurísticos de otimização.

Métodos determinísticos possuem uma grande vantagem, qual seja o baixo número de avaliações da função objetivo, o que faz com que tenham convergência rápida. Contudo, estes métodos têm uma inabilidade em lidar com mínimos locais. Como estes trabalham com um único ponto do espaço de projeto e com informações sobre os gradientes, ao se depararem com mínimos locais os mesmos não conseguem avançar na busca, convergindo prematuramente, sem encontrar o mínimo global.

Nos métodos heurísticos, a função objetivo é avaliada várias vezes, sendo possível trabalhar com vários pontos ao mesmo tempo em uma iteração, o que eleva o custo computacional destes métodos. Entretanto, isto é compensado pela menor chance que estes métodos têm de se deixarem prender em mínimos locais. Há claramente uma relação de compromisso estabelecida.

É possível definir, ainda, um terceiro grupo denominado *Métodos híbridos*: combinam a estratégia de busca global dos métodos estocásticos com busca local dos métodos deterministas (GAPlex, SAPlex).

2. MÉTODOS HEURÍSTICOS DE OTIMIZAÇÃO

O termo “heurístico” tem origem na palavra grega *heuriskein*, que significa “encontrar/descobrir”. Os métodos heurísticos utilizam apenas as informações da função a ser otimizada, que pode ser de difícil representação, não-linear, descontínua, não diferenciável, multimodal. Estes métodos buscam a solução ótima através de regras de probabilidade operando de maneira “aleatória orientada”. Estas técnicas requerem um número elevado de avaliações do problema. Isto é necessário para que se dê chance ao método de explorar devidamente toda a região do espaço de busca em que está contida a solução ótima, resultando em um grande número de avaliações da função necessárias para encontrar a solução.

Alguns exemplos de métodos heurísticos são os métodos de ordem zero e os métodos naturais, tais como: a Busca Tabu, o

Recozimento Simulado (Simulated Annealing) e os métodos baseados em população.

Os métodos naturais são procedimentos iterativos que tentam simular os processos usados na natureza para resolver problemas difíceis. Essas técnicas baseiam-se em princípios como: física – método do Simulated Annealing que se utiliza de conceitos da termodinâmica e mecânica quântica; química – a Computação Molecular; e biologia – a Inteligência Coletiva, a Computação Evolucionária e a Vida Artificial.

Entre as técnicas mais conhecidas pode-se citar Simulated Annealing e um grupo de métodos baseados em população. Neste último grupo, destacam-se os Algoritmos Evolutivos ou Evolucionários (Algoritmos Genéticos, Estratégias de Evolução, Evolução Diferencial, etc.) e os algoritmos baseados na inteligência coletiva (Otimização por Colônia de Partículas -PSO, Otimização por Colônias de Formigas, etc.). Estes algoritmos se baseiam em população de indivíduos, onde cada indivíduo representa um ponto de busca no espaço de soluções potenciais de um dado problema e imitam os princípios da natureza para criar procedimentos de otimização.

3. ALGORITMOS GENÉTICOS

A fundamentação dos Algoritmos Genéticos (AG) é baseada na genética natural, sendo comum o uso dos termos: indivíduos de uma população, cromossomos, genes e alelos. Nos Algoritmos Genéticos, a população de indivíduos é um conjunto de pontos do domínio da função a ser maximizada ou minimizada. A quantidade de pontos depende do número de variáveis de projeto do problema em questão. Algoritmos Genéticos são algoritmos iterativos, em que a cada iteração a população é modificada, usando as melhores características dos elementos da geração anterior e submetendo-as aos três tipos básicos de operadores genéticos - reprodução, cruzamento e mutação - para produzir melhores resultados (Goldberg, 1989), acompanhando o princípio Darwiniano da luta pela vida.

De modo geral, considere que se deseja otimizar uma função f qualquer de n variáveis, conforme abaixo:

$$\begin{aligned} & \text{Maximizar } f(X) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) & (1) \\ & \text{sujeita a } x_i^l < x_i < x_i^u & i = 1, 2, \dots, n \end{aligned}$$

Cada seqüência de n variáveis é denominada de cromossomo ou indivíduo (Haupt & Haupt, 2004) e cada uma das n

variáveis é um gene. Cada gene é representado no sistema binário e os bits 0 e 1 são denominados alelos. O comprimento de cada gene depende da precisão requerida para o problema e da amplitude do intervalo em que ele está definido.

O procedimento consiste em criar, aleatoriamente, uma população inicial de indivíduos. Em seguida, todos os indivíduos dessa população são modificados, submetendo-os aos operadores genéticos acima mencionados. Segue uma conceituação básica destes operadores:

Reprodução: é um processo no qual cada cadeia é copiada levando em conta os valores da função de adaptação f . A função de adaptação de cada indivíduo é um valor que representa o grau de adaptabilidade deste no contexto em que se encontra, ou seja, o quão próximo o indivíduo está da solução do problema em relação aos indivíduos da população.

Cruzamento: é um processo no qual a combinação de partes de cada um de dois cromossomos gera um novo descendente.

Mutação: é a modificação aleatória ocasional (de baixa probabilidade) do valor de um alelo da cadeia.

Para maiores informações a respeito deste método, sugere-se consultar Saramago e Steffen Jr. (2008).

4. SIMULATED ANNEALING

Simulated Annealing (SA) pertence à mesma classe dos métodos das Redes Neurais e Algoritmos Genéticos, no sentido que simulam métodos naturais. O algoritmo Simulated Annealing permite uma útil conexão entre a mecânica estatística (comportamento de um sistema de vários graus de liberdade em equilíbrio térmico a uma temperatura finita) e a otimização combinatória (encontrar um mínimo de uma dada função dependendo de vários parâmetros). Alguns resultados publicados utilizando Simulated Annealing, em particular devido aos esquemas de resfriamento rápido (Masters, 1993), têm merecido a atenção de físicos e engenheiros.

Este método de otimização faz uma analogia com o processo de recozimento (annealing) da metalurgia. Sabe-se da Metalurgia que, se o metal é resfriado em condições apropriadas, o cristal simples pode ser obtido (Kirkpatrick, 1983). No recozimento o metal é aquecido a altas temperaturas, causando um choque violento nos átomos, conforme representado na Figura 1. Se o metal for resfriado de forma brusca, a microestrutura tende a um estado randomicamente instável, porém, se o metal

é resfriado de forma suficientemente lenta, o sistema procurará um ponto de equilíbrio caracterizado por uma microestrutura ordenada e estável.

As variáveis de projeto são perturbadas randomicamente e armazena-se o melhor valor da função objetivo a cada perturbação. A temperatura é então reduzida (annealing) e novas tentativas executadas. Este procedimento continua até escaparmos de um mínimo local. Ao final do processo é possível que se obtenha um mínimo global.

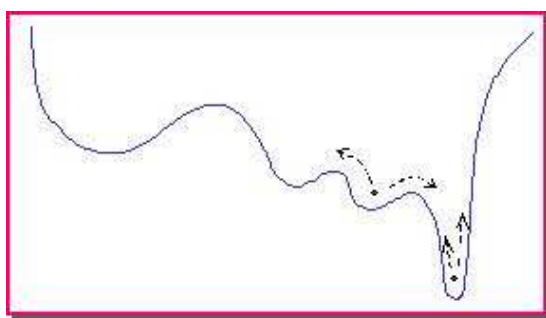


Figura 1 - Analogia entre o processo de otimização e o recozimento simulado.

Metropolis et al (1953) introduziram um método numérico simples que representa o estado de equilíbrio de um conjunto de átomos a uma dada temperatura. A analogia com o processo de otimização pode ser feita analisando a figura abaixo:

Seja ΔE a energia de um sistema de átomos a uma temperatura T . Em cada passo

do algoritmo, é dado um deslocamento aleatório a um átomo, o que implica uma nova energia do sistema ΔE . Se esta nova energia ΔE é menor ou igual a zero ($\Delta E \leq 0$), o deslocamento é aceito, caso contrário ($\Delta E > 0$), a probabilidade da configuração ser aceita será dada pela equação:

$$P(\Delta E) = e^{\left(\frac{-\Delta E}{K_b T}\right)} \quad (2)$$

sendo, K_b a constante de Boltzmann.

Um número randômico r , uniformemente distribuído, deve ser gerado no intervalo $[0, 1]$. Se $r \leq P(\Delta E)$ a nova configuração é aceita. Se $r > P(\Delta E)$ a configuração anterior é utilizada para iniciar um novo passo.

A escolha da função de probabilidade $P(\Delta E)$, conforme acima descrito, se deve ao fato de que o sistema evolui segundo uma distribuição de Boltzmann.

Os parâmetros do algoritmo são: a função custo, que representa a energia do sistema; as variáveis de projeto, que descrevem sua configuração e a temperatura, que é um parâmetro de controle (Corona et al, 1987).

4.1. Implementação do Método

Na otimização via Simulated Annealing considera-se:

- A perturbação randômica das variáveis de projeto,
- A manutenção do melhor valor da função objetivo.

Após algumas tentativas o melhor valor da função é chamado de centro, em torno do qual ocorreram as perturbações na próxima temperatura.

A temperatura é então reduzida (annealing) e novas tentativas executadas. Este procedimento continua até escaparmos de um mínimo local. Ao final do processo é possível que se obtenha um mínimo global.

Os parâmetros de controle para iniciar o procedimento são:

- a função objetivo $F(X)$, as variáveis de projeto iniciais (X), o número de variáveis de projeto ($nvars$), a temperatura inicial T_i , a temperatura final T_f , o número de iterações para cada temperatura ($niters$), o número de temperaturas ($ntemps$), o número de avaliações da função objetivo ($maxcalls$) e o critério de parada.

A configuração inicial das variáveis de decisão é adotada como centro. O valor inicial da função objetivo adotado como o melhor valor (best function value).

No próximo passo, o número randômico r é gerado e as variáveis são modificadas (“shake”):

$$r = r_1 + r_2 - r_3 - r_4 \quad (3)$$

$$x = center + T * r \quad (4)$$

Na Equação (3) observa-se que quatro valores randômicos são gerados, de forma que a variável r seja adotada como média zero (Masters, 1993). Assim, uma nova configuração é obtida pela Equação (4) e um novo valor da função objetivo pode ser calculado.

Se T tiver magnitude muito superior ao desvio padrão da função no intervalo, quase todos os pontos são aceitos. Ao passo que se T for igual a zero, o método se torna uma busca aleatória do mínimo. Assim, é usual adotar T_i como a média aritmética das variáveis de projeto X e T_f com a ordem de grandeza desejada para a precisão do ponto ótimo.

O esquema inicia-se com uma temperatura alta, que é reduzida discretamente (usando o fator r_t , $0 < r_t < 1$) até que o sistema “resfrie”, conforme as expressões abaixo:

$$r_t = e^{\frac{\ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right)}{n_{temp} - 1}} \quad (5)$$

$$T = T * r_t$$

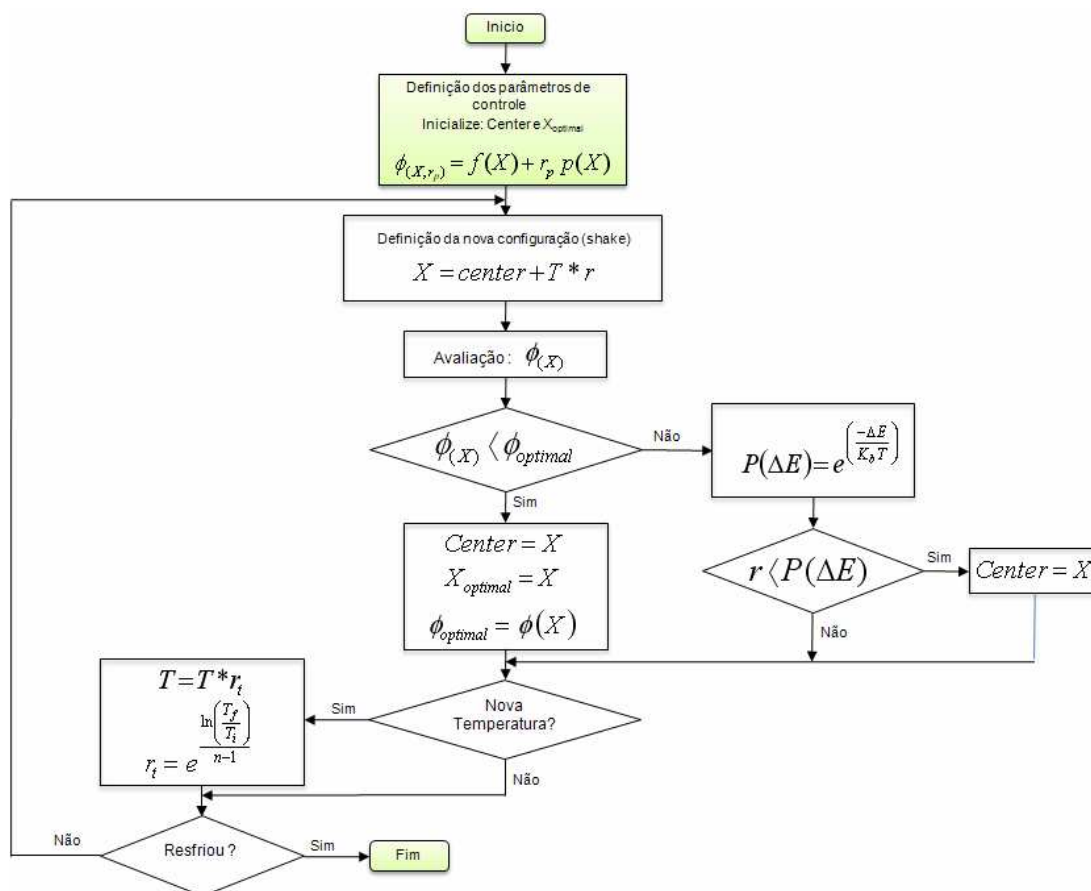


Figura 2 - Algoritmo do Simulated Annealing.

A temperatura é então reduzida e novas tentativas são executadas. Este procedimento continua até escapar de um mínimo local. Ao final do processo é possível que se obtenha um mínimo global. Se T tiver magnitude muito superior ao desvio padrão da função no intervalo, quase todos os pontos são aceitos. Ao passo que se T for igual a zero, o método se torna uma busca aleatória do mínimo. Assim, é usual adotar a temperatura inicial como a média aritmética das variáveis de projeto e a temperatura final com a ordem de grandeza desejada para a precisão do

ponto ótimo. O algoritmo do método, desenvolvido por Saramago *et al.* (1999), pode ser acompanhado através da Figura 2.

5. OTIMIZAÇÃO POR COLÔNIA DE PARTÍCULAS

O algoritmo conhecido como Colônia de Partículas (Particle Swarm Optimization-PSO) é um método baseado no comportamento social de aves. A busca por alimento ou pelo ninho e a interação entre os pássaros ao longo do vôo são modelados

como um mecanismo de otimização. Fazendo uma analogia, a área sobrevoada é equivalente ao espaço de projeto e encontrar o local com comida ou o ninho corresponde a encontrar o ótimo. O algoritmo é baseado em um modelo simplificado da teoria de enxames (swarm theory), através da qual os pássaros ou partículas fazem uso de suas experiências e da experiência do próprio bando para encontrarem o ninho ou alimento.

Otimização por Colônia de Partículas (PSO) é uma técnica de otimização desenvolvida na década de 90, mais precisamente em 1995, por James Kennedy e Russel Eberhart. Neste modelo são analisados algoritmos que modelam o “comportamento social” visto em várias espécies de pássaros.

Dentre vários modelos será estudada a técnica desenvolvida pelo biólogo Frank Heppener que é baseada no seguinte comportamento: pássaros estão dispostos aleatoriamente e estes estão à procura por alimento e um local para construir o seu ninho, eles não sabem onde está esse lugar e este é único. A indagação é qual o melhor comportamento que os pássaros terão que realizar para conseguir alcançar seu objetivo, parece mais evidente que eles sigam o pássaro que estiver mais próximo do

alimento ou do ninho. Inicialmente os pássaros voam sem nenhuma orientação prévia, eles se aglomeram em bandos, até que um consegue encontrar o ninho e atrai os que estiverem mais próximos.

Pelo fato de um pássaro encontrar o ninho a chance de os outros pássaros também encontrarem aumenta consideravelmente, isto se deve ao fato de a inteligência ser social, ou seja, o indivíduo aprende com o acerto do outro.

5.1. O algoritmo Particle Swarm Optimization

O algoritmo Particle Swarm Optimization (PSO) foi introduzido por James Kennedy e Russell Elberhart em 1995 e emergiu de experiências com algoritmos que modelam o “comportamento social” observado em muitas espécies de pássaros (Pomeroy, 2003). Os pássaros são chamados de partículas e durante a busca por alimento ou ninho usam de suas experiências e da experiência do bando. O PSO é um algoritmo que possui um vetor de velocidades e outro de posição, a posição de cada partícula é atualizada de acordo com a velocidade atual, o saber adquirido pela partícula e o saber adquirido pelo bando. O

fluxograma mostrado na Figura 3 representa um esboço do algoritmo (Rojas et al, 2004).

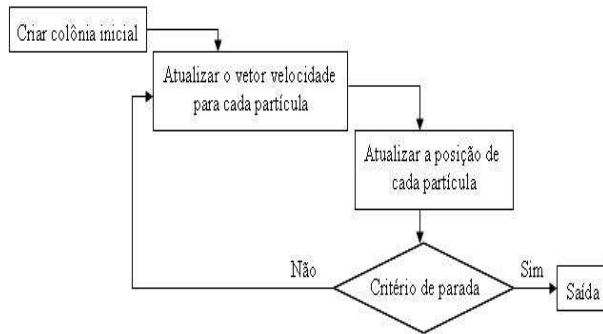


Figura 3 – Fluxograma para o algoritmo PSO básico.

A posição das partículas é calculada segundo a equação:

$$x_{k+1}^i = x_k^i + v_{k+1}^i \Delta t \quad (6)$$

Em que: x_{k+1}^i é a posição de cada partícula i na iteração $k+1$; v_{k+1}^i é o vetor de velocidade desta partícula; Δt equivale ao espaço de tempo considerado.

O vetor de velocidade é atualizado conforme a equação:

$$v_{k+1}^i = wv_k^i + c_1 r_1 \frac{(p^i - x_k^i)}{\Delta t} + c_2 r_2 \frac{(p_k^s - x_k^i)}{\Delta t} \quad (7)$$

Considerando que: v_k^i é a velocidade atual da partícula; r_1 , r_2 são números

aleatórios entre 0 e 1; p^i é a melhor posição encontrada pela partícula i e p_k^s é a melhor posição do bando na iteração k .

O cálculo da velocidade necessita, ainda, de alguns parâmetros dependentes do problema, que são:

- a inércia da partícula (w), que controla a capacidade de exploração do algoritmo, ou seja, um valor alto facilita um comportamento mais global, enquanto um valor baixo facilita um comportamento mais local (Venter & Sobieszczanski-Sobieski, 2002),

- os dois parâmetros de confiança c_1 e c_2 que indicam o quanto uma partícula confia em si (c_1) e no bando (c_2).

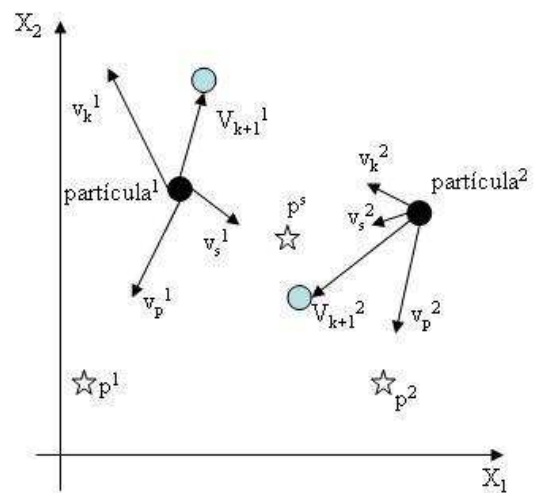


Figura 4 - Vetor de velocidades em ação.

A Figura 4 mostra a aplicação da equação anterior, considerando duas partículas se

deslocando em um espaço de projeto bidimensional. Deve-se considerar: v_s^i – velocidade próxima ao ótimo da colônia; v_p^i – velocidade próxima ao ótimo da partícula; p^s – colônia ótima; p^i – partícula ótima

● - posição atual

○ - posição próxima

Os parâmetros de confiança e de inércia devem ser ajustados de acordo com o problema, pois são utilizados para a atualização do vetor velocidade. Alguns autores propõem que sejam adotados $c_1 = c_2 = 2$ e $0,7 < w < 1,4$. Sugere-se, também, a adoção de valores diferentes para c_1 e c_2 desde que satisfaçam $c_1 + c_2 = 4$.

A inércia pode ser atualizada de forma iterativa pela expressão:

$$w_{new} = f_w w_{old} \quad (8)$$

Considerando o fator de redução, f_w uma constante entre 0 e 1.

5.2. Colônia Inicial

A inicialização da população de colônia normalmente é obtida com as partículas dispostas aleatoriamente sobre o espaço de projeto, cada uma possui um vetor de velocidade aleatório inicial. As equações a

seguir mostram como são obtidos a posição e o vetor de velocidades iniciais.

$$x_0^i = x_{min} + r_1 (x_{max} - x_{min}) \quad (9)$$

$$v_0^i = \frac{x_{min} + r_2 (x_{max} - x_{min})}{\Delta t} \quad (10)$$

Em que: r_1 e r_2 são números aleatórios entre 0 e 1; x_{min} é o limite inferior das restrições laterais para as variáveis de projeto; x_{max} é o limite superior das restrições laterais para as variáveis de projeto.

6. PROBLEMAS INVERSOS

A expressão *problema inverso* (PI) é creditada ao astrofísico georgiano Viktor Amazaspovich Ambartsumian. Porém, no livro de Engl *et al.* (1996), é apresentada uma definição bastante abrangente: “*Resolver um problema inverso é determinar causas desconhecidas a partir de efeitos desejados ou observados*”. Note-se que a área de projeto ótimo ou projeto inverso também está incluída nesta definição. Em geral, as observações são imprecisas (dados contaminados com ruídos ou erros experimentais) e incompletas. Por outro

lado, problemas diretos requerem um conhecimento completo e preciso das causas para a determinação dos efeitos.

A Figura 5 mostra de maneira pictórica a relação entre problema direto e inverso. Causas, num modelo matemático, são as condições iniciais e de contorno, os termos de fontes/sumidouro e as propriedades do sistema (material). Efeitos são as propriedades calculadas a partir de um modelo direto, como o campo de temperatura, concentração de partículas, corrente elétrica, deslocamentos, etc.

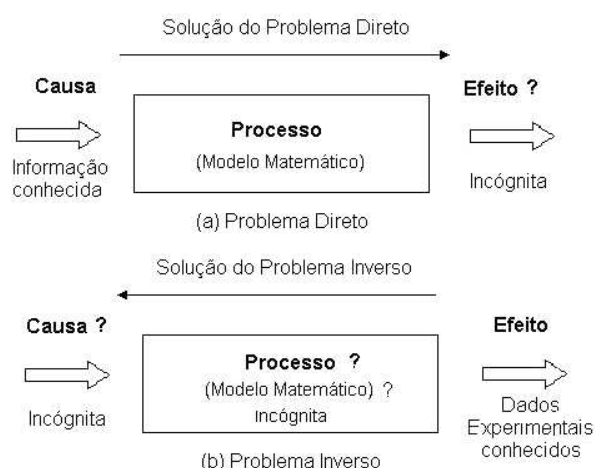


Figura 5 - Representação esquemática de problemas direto (a) e inverso (b).

O tipo de “causa” a ser determinada, pode ser usado para classificar os problemas inversos. Contudo, outras classificações são possíveis:

1. Quanto à natureza matemática do método: explícito (inversão direta) ou implícito.
2. Quanto à natureza estatística do método: determinístico ou estocástico.
3. Quanto à natureza da propriedade estimada: condição inicial, condição de contorno, termo de fonte/sumidouro, propriedades do sistema.
4. Quanto à natureza da solução (Beck *et al.*, 1985): estimativa de parâmetros ou estimativa de função.
5. Silva Neto & Moura Neto (2000): Tipo-1 (PD-f e PI-f), Tipo-2 (PD-8 e PI-f) ou Tipo-3 (PD-8 e PI-8).

Nota-se que a classificação dos itens 1 e 2 estão ligadas aos métodos de solução do PI; a do item 3, como já falado, tipifica o problema inverso pela *causa* a ser determinada. A classificação do item 4 foi formulada pelo Prof. J. V. Beck e divide os problemas inversos em dois grupos: estimativa de parâmetros e estimativa de funções. Esta classificação é baseada na dimensão do objeto matemático a ser estimado, isto é, uma constante (dimensão finita), ou uma função (dimensão infinita). A classificação mostrada no item 5 foi proposta no ano 2000 e está baseada na dimensão do modelo do fenômeno físico (problema direto – PD) e na dimensão da quantidade a ser

estimada (problema inverso – PI) se finita (f) ou infinita (∞). Problemas inversos do tipo reconstrução de imagens são exemplos de PI do Tipo-1, estimação de parâmetros pode ser classificada como do Tipo-2 ou Tipo-3, enquanto que estimação de função contínua é sempre um problema do Tipo-3.

Existem diversos métodos que visam a solução de PIs, dentre os quais se pode citar: Inversão direta; Decomposição em valores singulares; Mínimos quadrados e variantes (mínimos quadrados ponderados); Métodos de regularização; Métodos variacionais; Outros (métodos bayesianos, filtros digitais, redes neurais, etc).

Considerando os métodos desenvolvidos para a formulação e solução de problemas inversos, Dulikravich *et al.* (2001) indicam que estes podem ser agrupados basicamente de acordo com duas abordagens: métodos inversos puros e métodos baseados em otimização. É possível também fazer referência às formulações explícitas e implícitas para os problemas inversos, de modo que tal classificação se apresente de acordo com aquela de Dulikravich e colaboradores.

Na formulação explícita as equações usadas na modelagem do problema direto são manipuladas, obtendo-se uma expressão

onde as incógnitas a serem determinadas aparecem explicitamente.

A formulação implícita, por sua vez, representa uma abordagem muito usual empregada na solução de problemas inversos e será aplicada neste trabalho. Ela consiste na minimização de uma função objetivo, também denominada função custo, como, por exemplo, aquela dada pela soma dos resíduos quadrados entre os valores calculados com o modelo e os valores medidos experimentalmente para um determinado sistema. Esta formulação para o problema inverso é denominada de formulação implícita porque as incógnitas do problema não aparecem explicitamente na formulação. Elas estão embutidas na formulação dos problemas diretos correspondentes, e os seus efeitos para os problemas inversos são percebidos quando os problemas diretos são resolvidos e participam então da composição da função objetivo. O ponto focal da busca da solução do problema inverso passa então a ser o emprego de métodos determinísticos, métodos estocásticos e/ou métodos híbridos para a minimização da função objetivo.

Dados Experimentais:

Para a solução de problemas inversos deve-se sempre buscar o uso de dados

experimentais reais porque desta forma pode ser verificado se o modelo matemático empregado representa adequadamente os fenômenos envolvidos no processo sob análise. Porém, nem sempre se tem acesso a estes dados, e, além disso, uma etapa importante no desenvolvimento de uma metodologia para a formulação e solução de problemas inversos consiste na avaliação do desempenho do método desenvolvido. É uma prática usual, portanto, a geração de dados experimentais sintéticos através da adição de ruídos pseudo-aleatórios aos valores calculados com o modelo ao empregar os valores exatos das incógnitas que se deseja determinar, ou seja:

$$R_i^{\text{exp}} = F_i(X_{\text{exato}}) + \lambda_i \sigma \quad (11)$$

Em que R_i^{exp} corresponde ao valor do dado experimental sintético, F_i é a função que representa o modelo, X é o vetor das variáveis de decisão do problema, λ_i é um número aleatório gerado no intervalo $[-1, 1]$ e σ simula o desvio padrão dos erros experimentais.

Esta abordagem, que emprega o mesmo modelo matemático para gerar os dados experimentais sintéticos e depois para resolver o problema inverso, é denominada

crime inverso (*inverse crime*). Porém, apesar de não permitir a avaliação do modelo matemático do problema direto quanto à representação dos fenômenos envolvidos no processo sob análise, esta abordagem permite uma boa avaliação do método desenvolvido para o problema inverso, porque se tem o conhecimento prévio da solução que se deseja obter, X_{exato} , e é também exercido o controle do nível de ruído presente no dado experimental.

7. PROBLEMA DE OTIMIZAÇÃO MULTI-OBJETIVO

Um problema de otimização multi-objetivo é definido quando se deseja minimizar ou maximizar várias funções objetivo simultaneamente, sendo que, em vários casos, uma função está em conflito com outra (Eschenauer *et al.*, 1990). Este problema pode estar sujeito a restrições e todas as funções envolvidas podem ser não-lineares.

O problema de otimização multi-objetivo é formulado como se segue:

Minimizar ou maximizar:

$$f(X) = [f_1(X) f_2(X) \dots f_k(X)]^T \quad (12)$$

$$i = 1, 2, \dots, k$$

Sujeita a:

$$\begin{aligned} x_j^{\min} &\leq x_j \leq x_j^{\max}, \quad j = 1, 2, \dots, n \\ g_\lambda(X) &\leq 0, \quad \lambda = 1, 2, \dots, L \\ h_m(X) &= 0, \quad m = 1, 2, \dots, M \end{aligned} \quad (13)$$

Em que X é um vetor de variáveis de decisão, $f(X)$ é um vetor da função objetivo, $g_\lambda(X)$, $h_m(X)$ são restrições de desigualdade e de igualdade, respectivamente.

Várias técnicas estão disponíveis e podem ser consideradas para resolver este complexo problema de otimização. Alguns métodos clássicos são baseados em escalonar as funções, sendo que o vetor função objetivo é transformado em uma função escalar, enquanto que outros métodos tratam as funções objetivo como restrições adicionais.

Este trabalho utiliza o método da ponderação dos objetivos na solução de problemas de otimização multi-objetivo. Neste método, os problemas de otimização multi-objetivo são substituídos por um problema de otimização escalar. Isso ocorre, por exemplo, através da criação de uma função da forma:

$$f(X) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(X), \quad \sum_{i=1}^k w_i = 1 \quad (14)$$

Na qual $w_i \geq 0$ são os coeficientes de ponderação.

Outras funções podem ser criadas a fim de transformar um problema multi-objetivo em um problema de otimização escalar.

8. APLICAÇÕES

Na resolução dos exemplos seguintes serão utilizados os seguintes códigos computacionais do Matlab® (Grace, 1992):

- Código computacional AG, desenvolvido por Viana *et al.* (2004), para aplicação de Algoritmos Genéticos.

Nas aplicações do método de Algoritmos Genéticos será utilizada uma população de 100 indivíduos e 200 gerações, sendo executadas 30 iterações do método, escolhendo-se o melhor valor.

- Código computacional SA, desenvolvido por Saramago *et al.* (1999), para aplicação de Simulated Annealing.

Nas aplicações do método de Simulated Annealing, serão utilizados os seguintes parâmetros:

temperatura inicial $T_i =$ média aritmética simples das variáveis de projeto, $T_f = 10^{-5}$; $niters = 300$; $ntemps = 15$; $maxcalls = 10000$; A variável de projeto inicial $X_0 =$ valor médio do intervalo considerado

• Código computacional PSO, desenvolvido por Viana *et al.* (2004), para aplicação de Otimização por Colônia de Partículas. Foram utilizados um número de partículas igual 20, a inércia constante $w_0 = 0,729$, $c_1 = 1,25$, $c_2 = 2,75$ e $\Delta t = 1$, sendo executadas 30 iterações do método, escolhendo-se o melhor valor.

8.1. Otimização aplicada a um Problema Direto de Engenharia:

Determinação da Posição de Equilíbrio Estático de Duas Molas.

Determinar a posição de equilíbrio estático de um sistema constituído de 2 molas (K_1 e K_2) solicitado por duas forças constantes (P_1 e P_2), de forma a minimizar sua energia potencial (veja Figura 6):

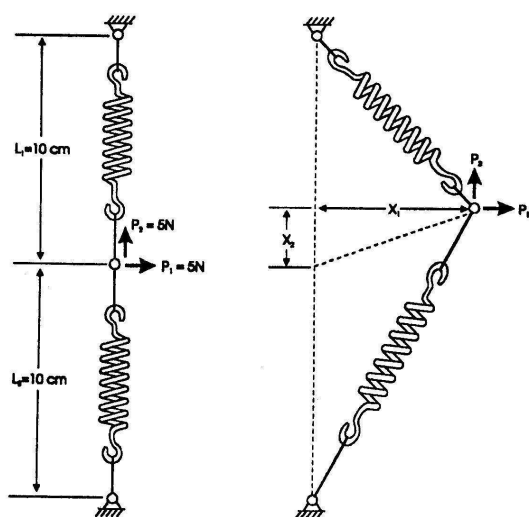


Figura 6 – Representação esquemática do problema de equilíbrio estático de 2 molas.

$$\begin{aligned} \min E_p = & 0,5 K_1 \left[\sqrt{x_1^2 + (l_1 - x_2)^2} - l_1 \right]^2 + \\ & + 0,5 K_2 \left[\sqrt{x_1^2 + (l_2 + x_2)^2} - l_2 \right]^2 - \\ & - P_1 x_1 - P_2 x_2 \end{aligned} \quad (15)$$

Dados: $P_1 = P_2 = 5 \text{ N}$; $l_1 = l_2 = 10 \text{ cm}$;

$K_1 = 8 \text{ N/cm}$; $K_2 = 1 \text{ N/cm}$.

Restrições laterais: $X_i \in [0, 10]$

Na Tabela 1 são apresentados os resultados encontrados na literatura (Vanderplaats, 1999) para comparar com os obtidos através da aplicação das técnicas estudadas para a resolução do problema do sistema de duas molas.

Tabela 1 – Comparação dos resultados obtidos.

	$x_{1\min}$ (cm)	$x_{2\min}$ (cm)	E_{\min} (N.cm)	Tempo (s)
Vanderplaats (1999)	8,631	4,5330	-41,8100	-
A.G.	8,6323	4,5323	-41,8082	13,484
S.A.	8,6321	4,5319	-41,8082	0,316
P.S.O.	8,6283	4,5288	-41,8082	2,138

Os resultados obtidos com as três técnicas estudadas ficaram muito semelhantes aos do livro de Vanderplaats (1999), conseguindo-se um resultado um pouco melhor, mas devido à precisão, pode se considerar a posição de equilíbrio como sendo a mesma:

$$x_{1\min} = 8,63 \text{ cm} ; \quad x_{2\min} = 4,53 \text{ cm} \quad \text{e}$$

$$Ep_{\min} = -41,81 \text{ N.cm}$$

Analisando a Tabela 1, nota-se, ainda, que o método de Simulated Annealing gastou menos tempo que os demais.

A Figura 7 ilustra a variação da Energia Potencial do sistema de 2 molas de acordo com as variações de x_1 e x_2 , conforme a equação da energia dada pela Eq. (15).

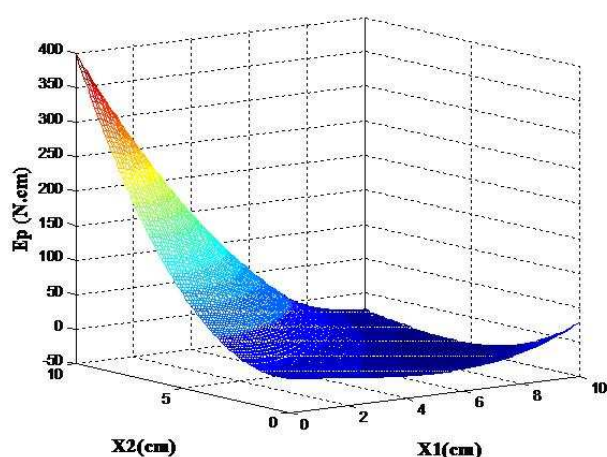


Figura 7 – Gráfico da Energia Potencial (Ep) em função das variáveis (x_1 e x_2).

8.2. Otimização aplicada a um Problema inverso de Engenharia:

Estimação de parâmetros correspondentes à variação de rigidez em um prédio de 3 andares submetido a carregamentos externos.

Um prédio de três andares é mostrado na Figura 8. As massas correspondentes às lajes dos pisos - m_1 , m_2 , m_3 , e as constantes de rigidez - k_1 , k_2 e k_3 - estão conforme indicado. No primeiro andar, existe um motor de combustão interna girando a 1500 rpm, o qual é responsável por aplicar, neste andar, forças horizontais equivalentes a $150 \cos \omega t$, $250 \cos 2\omega t$ e $80 \cos 4\omega t$, sendo ω a velocidade angular do motor.

Os valores numéricos das massas e constantes de rigidez são: $m_1 = 10\,000$ kg, $m_2 = 8000$ kg, $m_3 = 7000$ kg, $k_1 = k_2 = k_3 = 2 \times 10^6$ N/m.

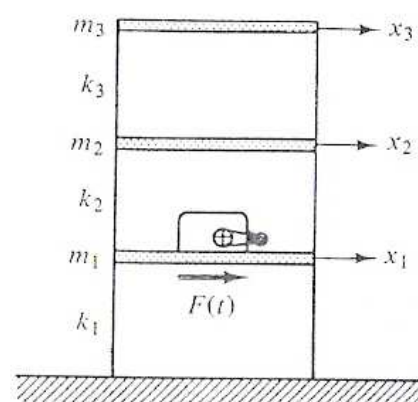


Figura 8. Representação esquemática de um prédio de três andares submetido a carregamentos externos.

A partir das variáveis massa, rigidez e forças aplicadas no prédio, é possível escrever um modelo matemático para calcular o deslocamento em cada andar e os modos de vibrar do prédio.

A resposta do prédio é, então, considerada como sendo a composição de seu deslocamento em cada andar, em um intervalo de tempo conhecido, e de seus modos de vibrar, caracterizados pelos valores de suas frequências naturais e de seus vetores modais.

Serão alterados os valores das constantes de rigidez do prédio, de forma que sua resposta também seja alterada. Em um primeiro momento, não se conhece de quanto foi essa alteração na rigidez, mas é possível, através de experimentos utilizando sensores e analisador de sinais, determinar o deslocamento, as frequências naturais e os vetores modais do prédio. Deseja-se, então, conhecendo-se as respostas experimentais do prédio relacionadas com esses novos valores de rigidez, estimar de quanto é a variação da rigidez com relação ao seu valor inicial. Este problema caracteriza, assim, um problema inverso de engenharia, uma vez que a resposta do sistema é conhecida e utilizada para estimar parâmetros do mesmo, no caso, estes parâmetros correspondem à variação da rigidez.

Entretanto, para resolução deste problema inverso, ao invés de realizar experimentos para determinação da resposta experimental do prédio, se fará uso da técnica de geração de dados experimentais sintéticos. Tal

procedimento, explicado anteriormente no tópico 6, é representado pela Equação (11). Na resolução deste exemplo, o desvio padrão dos erros experimentais será desconsiderado.

Para a solução deste problema, será utilizada a formulação implícita, conforme já mencionado anteriormente, no tópico 6. A função objetivo corresponderá à soma dos resíduos quadrados entre os valores calculados com o modelo e os valores dos dados experimentais sintéticos. Serão utilizados os métodos de otimização para minimizar esta função, de forma que, ao se minimizar os erros entre a resposta teórica e experimental do prédio, deseja-se encontrar parâmetros, correspondentes à variação de rigidez, que sejam equivalentes ou muito próximos àqueles utilizados na geração dos dados experimentais sintéticos.

O objetivo deste exemplo é, pois, encontrar, através da utilização dos métodos de otimização estudados, os valores da variação de rigidez que foram adotados para geração dos dados experimentais sintéticos.

Modelo Matemático:

O modelo matemático permite calcular os deslocamentos e modos de vibrar do prédio.

O sistema é composto por um prédio de 3 andares, como mostrado na Figura 8, com 3

graus de liberdade. A aplicação da Lei de Newton na direção horizontal resulta:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= F(t) \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (16)$$

Sendo $F(t) = F_1 \cos \omega t + F_2 \cos 2\omega t + F_3 \cos 4\omega t$.

Os deslocamentos $x_1(t)$, $x_2(t)$ e $x_3(t)$ são dados por um somatório de respostas harmônicas correspondentes às componentes harmônicas da força, de forma que resultam em:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= A_1^1 \cos \omega t + A_1^2 \cos 2\omega t + A_1^3 \cos 4\omega t \\ x_2(t) &= A_2^1 \cos \omega t + A_2^2 \cos 2\omega t + A_2^3 \cos 4\omega t \\ x_3(t) &= A_3^1 \cos \omega t + A_3^2 \cos 2\omega t + A_3^3 \cos 4\omega t \end{aligned} \quad (17)$$

- Primeiro Harmônico da Resposta: as amplitudes de vibração são A_1 , A_2 , A_3 para $x_j = A_j \cos \omega t$ são as soluções de:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) A_1 - k_2 A_2 &= F_1 \\ -k_2 A_1 + (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) A_2 - k_3 A_3 &= 0 \\ -k_3 A_2 + (k_3 - m_3 \omega^2) A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (18)$$

Dadas por:

$$A_1^1 = \frac{\begin{vmatrix} F_1 & 0 & 0 \\ 0 & (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 - m_3 \omega^2) \end{vmatrix}}{D} \quad (19)$$

$$A_2^1 = \frac{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & F_1 & 0 \\ -k_2 & 0 & -k_3 \\ 0 & 0 & (k_3 - m_3 \omega^2) \end{vmatrix}}{D} \quad (20)$$

$$A_3^1 = \frac{\begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & -k_2 & F_1 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) & 0 \\ 0 & -k_3 & 0 \end{vmatrix}}{D} \quad (21)$$

Sendo ω dado em rad/s e D é descrita pela seguinte expressão:

$$D = \begin{vmatrix} (k_1 + k_2 - m_1 \omega^2) & -k_2 & 0 \\ -k_2 & (k_2 + k_3 - m_2 \omega^2) & -k_3 \\ 0 & -k_3 & (k_3 - m_3 \omega^2) \end{vmatrix} \quad (22)$$

- Segundo Harmônico da Resposta: as amplitudes de vibração são A_1 , A_2 , A_3 para $x_j = A_j \cos 2\omega t$ são as soluções de:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 4\omega^2) A_1 - k_2 A_2 &= F_2 \\ -k_2 A_1 + (k_2 + k_3 - m_2 4\omega^2) A_2 - k_3 A_3 &= 0 \\ -k_3 A_2 + (k_3 - m_3 4\omega^2) A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (23)$$

As amplitudes A_1^2 , A_2^2 e A_3^2 são calculadas de forma análoga ao primeiro harmônico da resposta.

- Terceiro Harmônico da Resposta: as amplitudes de vibração são A_1 , A_2 , A_3 para $x_j = A_j \cos 4\omega t$ são as soluções de:

$$\begin{aligned} (k_1 + k_2 - m_1 16\omega^2)A_1 - k_2 A_2 &= F_3 \\ -k_2 A_1 + (k_2 + k_3 - m_2 16\omega^2)A_2 - k_3 A_3 &= 0 \\ -k_3 A_2 + (k_3 - m_3 16\omega^2)A_3 &= 0 \end{aligned} \quad (24)$$

As amplitudes A_1^3 , A_2^3 e A_3^3 são calculadas de forma análoga aos outros harmônicos da resposta.

Uma vez calculadas as amplitudes A_1 , A_2 e A_3 para os três harmônicos e conhecendo-se a velocidade angular ω é possível então encontrar os valores de x_1 , x_2 e x_3 , para um intervalo de tempo desejado, a partir da Equação 17.

Para cálculo dos modos de vibração, caracterizados pelas frequências naturais e vetores modais, deve-se encontrar a solução homogênea da Equação (16):

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 + k_1 x_1 - k_2 (x_2 - x_1) &= 0 \\ m_2 \ddot{x}_2 + k_2 (x_2 - x_1) - k_3 (x_3 - x_2) &= 0 \\ m_3 \ddot{x}_3 + k_3 (x_3 - x_2) &= 0 \end{aligned} \quad (25)$$

A equação acima pode ser escrita na forma matricial como:

$$\begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \\ \ddot{x}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (26)$$

Ou ainda:

$$[M]\{\ddot{x}\} + [K]\{x\} = \{0\} \quad (27)$$

$[M]$ é a matriz de massa do sistema estrutural; $[K]$ é a matriz de rigidez; $\{x\}$ é o vetor de deslocamentos.

Por analogia com o caso de vibração livre com um grau de liberdade, assume-se uma solução harmônica na forma $x_j = X_j \cos \omega t$, ou ainda, $\{x\} = \{X\} \cos \omega t$.

Substituindo a solução suposta na equação do movimento:

$$\{[K] - \omega^2 [M]\}\{X\} = \{0\} \quad (28)$$

$$([K][M]^{-1})\{X\} = \omega^2 \{X\} \quad (29)$$

$$[D]\{\phi\} = \lambda \{\phi\} \quad (30)$$

A Equação (30) representa um problema de autovalor e autovetor, em que: $[D]$ é a matriz dinâmica; $\{\phi\}$ é o autovetor do problema de valores característicos (vetores modais de vibração); $\lambda = \omega^2$ é o autovalor do problema de valores característicos (frequências naturais).

Obtenção das frequências naturais e vetores modais:

A Equação (30) pode ser escrita do seguinte modo:

$$([D] - \lambda[I_n])\{\phi\} = \{0\} \quad (31)$$

A equação acima pode ser colocada na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} (D_{11} - \lambda) & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & (D_{22} - \lambda) & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & (D_{33} - \lambda) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Para que o autovetor não seja nulo, isto é, para que a solução trivial não seja a única solução do sistema de equações lineares, deve-se garantir que:

$$\begin{vmatrix} (D_{11} - \lambda) & D_{12} & D_{13} \\ D_{21} & (D_{22} - \lambda) & D_{23} \\ D_{31} & D_{32} & (D_{33} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (33)$$

A equação acima (polinômio característico) implica na resolução de uma equação polinomial de grau n , com n soluções, em que n é o número de graus de liberdade da estrutura:

$$c_1\lambda^n + c_2\lambda^{n-1} + \Lambda + c_n\lambda + c_n = 0 \quad (34)$$

Substituindo, no sistema de equações (32), os autovalores λ , obtidos por meio da

resolução do polinômio característico, determina-se os autovetores correspondentes a cada autovalor.

No caso do prédio que possui três graus de liberdade, será três a quantidade de modos de vibrar e de frequências naturais, pois existirão três autovalores $\lambda = \omega^2$ e três vetores modais $\{\phi\}$, sendo que cada vetor modal corresponderá a uma frequência natural.

Função Objetivo:

O modelo matemático permite calcular as respostas do prédio (deslocamentos e modos de vibrar), sendo conhecidas as propriedades do mesmo (massa e rigidez) e os carregamentos a que o mesmo está submetido. Uma vez definido este modelo, torna-se possível, então, escrever a função objetivo. Esta função, conforme já mencionado anteriormente, corresponde ao somatório dos resíduos quadrados entre os valores da resposta teórica (calculada com o modelo) e experimental do prédio.

Este exemplo, na verdade, representa um problema multi-objetivo, que será substituído por um problema de otimização escalar, através da criação de uma função da forma:

$$f(X) = \sum_{i=1}^k w_i f_i(X), \quad w_i = 1 \quad (35)$$

Em que X é o vetor que contém as variáveis do projeto; w_i são os coeficientes de ponderação e k é o número de funções objetivo.

A função objetivo geral corresponde, então, a um somatório de todas as funções objetivo, sendo que essas possuem coeficientes de ponderação iguais e cada uma corresponde a um tipo de erro relacionado às respostas do sistema.

No caso do prédio serão três funções objetivo a serem consideradas:

- Erro proveniente das diferenças entre os deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 das respostas teóricas e experimentais:

$$f_1(P_1, P_2, P_3) = \sum_{i=1}^N \left(x_{1i}^{\text{exp}} - x_{1i}^{\text{teor}} \right)^2 + \left(x_{2i}^{\text{exp}} - x_{2i}^{\text{teor}} \right)^2 + \left(x_{3i}^{\text{exp}} - x_{3i}^{\text{teor}} \right)^2 \quad (36)$$

sendo que N corresponde ao tempo discretizado em que os deslocamentos foram medidos. No caso deste exemplo, considerou-se um intervalo de tempo igual a 10 vezes o período da frequência de giro do motor.

- P_1 , P_2 e P_3 são as variáveis do projeto relacionadas com a variação das rigidezes

K_1 , K_2 e K_3 com relação às dadas no início do problema, de forma que:

$$\begin{aligned} K_1^{\text{mod}} &= P_1 * K_1^{\text{dado}} \\ K_2^{\text{mod}} &= P_2 * K_2^{\text{dado}} ; P_1, P_2, P_3 \in \Re^+ \quad (37) \\ K_3^{\text{mod}} &= P_3 * K_3^{\text{dado}} \end{aligned}$$

▪ Erro proveniente das diferenças entre as frequências naturais ω_1 , ω_2 e ω_3 das respostas teóricas e experimentais:

$$f_2(P_1, P_2, P_3) = \sum_{i=1}^k \left(\omega_i^{\text{exp}} - \omega_i^{\text{teor}} \right)^2 \quad (38)$$

Sendo k o número de frequências naturais, neste caso, $k=3$.

▪ Erro proveniente das diferenças entre as relações modais dos vetores modais ϕ_1 , ϕ_2 e ϕ_3 das respostas teóricas e experimentais:

$$f_3(P_1, P_2, P_3) = \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(R_{ji}^{\text{exp}} - R_{ji}^{\text{teor}} \right)^2 \quad (39)$$

Consideram-se as relações modais com o objetivo de normalizar os vetores modais e permitir a comparação entre eles. A matriz que contém as relações modais é escrita conforme se segue:

$$R = \begin{bmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{23} \\ \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{21} & \phi_{22} & \phi_{23} \\ \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \\ \phi_{31} & \phi_{32} & \phi_{33} \\ \phi_{11} & \phi_{12} & \phi_{13} \end{bmatrix} \quad (40)$$

É possível então a partir das Equações (35), (36), (38) e (39), escrever a função objetivo do problema inverso conforme se segue:

$$\begin{aligned} F(P_1, P_2, P_3) = & \sum_{i=1}^N \left(x_{1i}^{\text{exp}} - x_{1i}^{\text{teor}} \right)^2 + \\ & + \left(x_{2i}^{\text{exp}} - x_{2i}^{\text{teor}} \right)^2 + \\ & + \left(x_{3i}^{\text{exp}} - x_{3i}^{\text{teor}} \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^k \left(\omega_i^{\text{exp}} - \omega_i^{\text{teor}} \right)^2 + \\ & + \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^k \left(R_{ji}^{\text{exp}} - R_{ji}^{\text{teor}} \right)^2 \quad (41) \end{aligned}$$

Simulação Numérica:

Inicialmente são adotados os parâmetros correspondentes à variação da rigidez do prédio, permitindo, assim, calcular os dados experimentais sintéticos.

Tendo sido gerados estes dados, utilizam-se os métodos de otimização para minimizar a função objetivo, definida pela Eq. (41), buscando, dessa forma, atingir o objetivo do exemplo, que é encontrar os valores da

variação de rigidez que foram adotados para geração dos dados experimentais sintéticos. Para minimização da função objetivo são utilizados os métodos numéricos estudados:

Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing e Otimização por Colônia de Partículas. Estes métodos, conforme já mencionado neste artigo, foram implementados por meio de códigos computacionais do Matlab[®]. Ressalta-se, ainda, que o cálculo dos modos de vibração do prédio (problema de valores característicos) foi realizado utilizando a subrotina EIG do Matlab[®].

Nas tabelas seguintes, são fornecidos os parâmetros utilizados para geração dos dados experimentais sintéticos e os valores encontrados para tais parâmetros pelos métodos de otimização. São apresentados, também, o tempo gasto por cada método e o valor da função objetivo encontrada para o ponto de mínimo.

Nos gráficos, que são apresentados após as tabelas, é possível visualizar os deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 do prédio, calculados com os valores de rigidez obtidos por meio dos métodos de otimização e com aqueles utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos. Conforme será visto, os métodos AG e SA encontram valores idênticos ao da resposta

experimental, de modo que seus deslocamentos também sejam coincidentes, sendo que apenas as respostas com os valores encontrados pelo PSO apresentarão alguma variação. Também será apresentado

um gráfico que contém os 3 deslocamentos, referentes aos dados experimentais sintéticos, a fim de comparar a dimensão das amplitudes desses deslocamentos.

Tabela 2 – Parâmetros utilizados para geração dos dados: $P_1=0,98$; $P_2=0,8$; $P_3=0,7$.

Método	Parâmetros estimados			F_{min}	Tempo (s)
	P_1	P_2	P_3		
A.G.	0,98	0,8	0,7	$5,8168 \cdot 10^{-10}$	66,721
S.A.	0,98	0,8	0,7	$1,2412 \cdot 10^{-9}$	9,528
P.S.O.	0,9709	0,7604	0,7375	$6,9118 \cdot 10^{-2}$	51,186

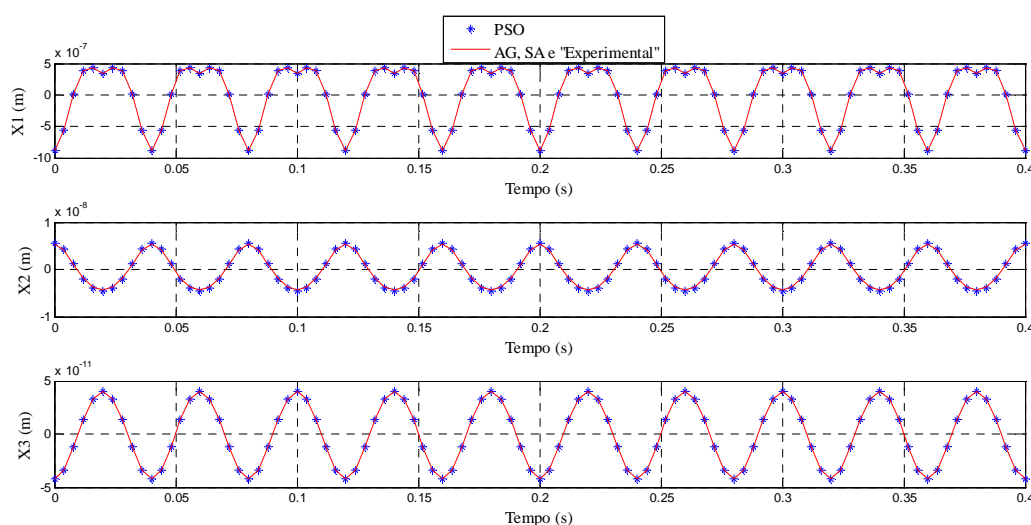


Figura 9 - Deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 calculados com valores de rigidez obtidos por meio dos métodos de otimização e com aqueles utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos.

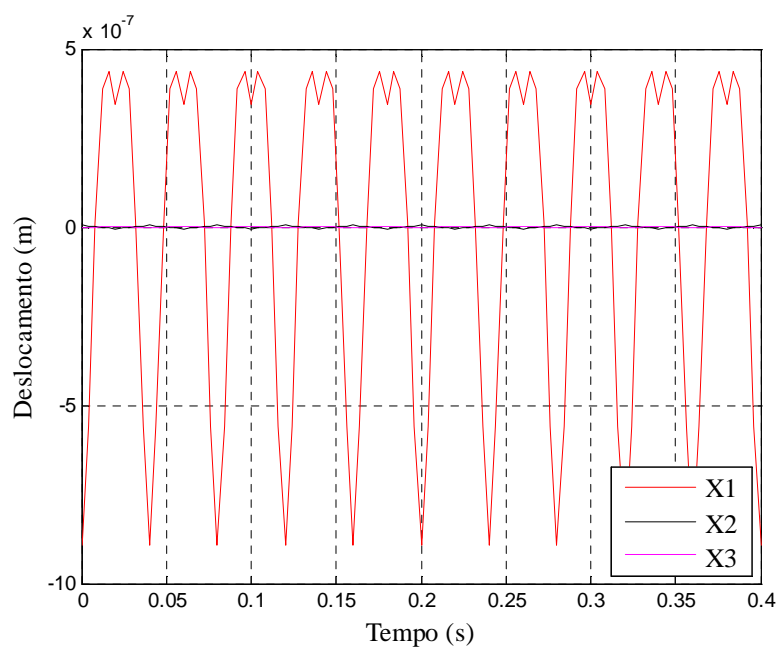


Figura 10 - Comparação entre os 3 deslocamentos calculados com os valores de rigidez utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos.

Tabela 3 – Parâmetros utilizados para geração dos dados: $P_1=1,1$; $P_2=0,77$; $P_3=1,13$.

Método	Parâmetros estimados			F_{min}	Tempo (s)
	P_1	P_2	P_3		
A.G.	1,1	0,77	1,13	$4,3959 \times 10^{-10}$	66,905
S.A.	1,1	0,77	1,13	$1,339 \times 10^{-9}$	9,354
P.S.O.	1,0945	0,7906	1,1155	$2,2534 \times 10^{-2}$	54,279

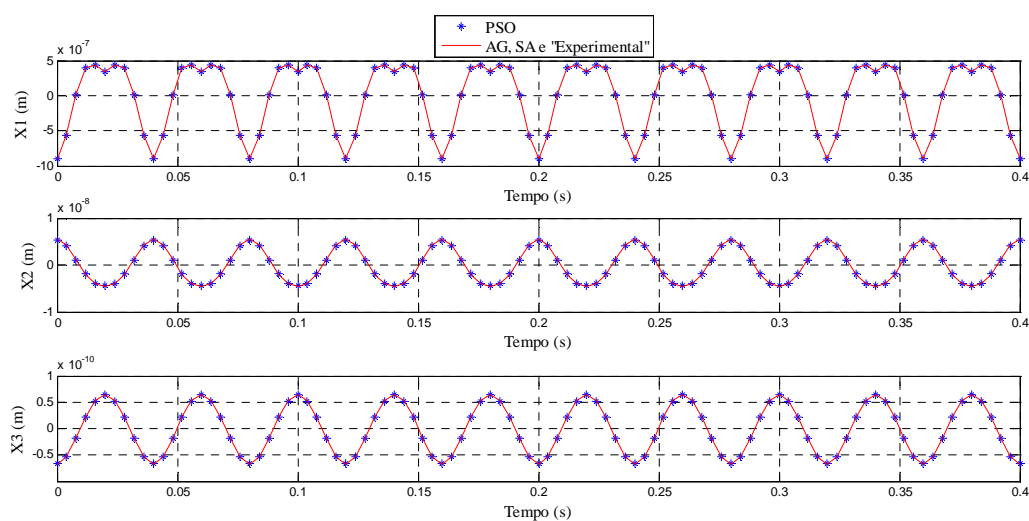


Figura 11 - Deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 calculados com valores de rigidez obtidos por meio dos métodos de otimização e com aqueles utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos.

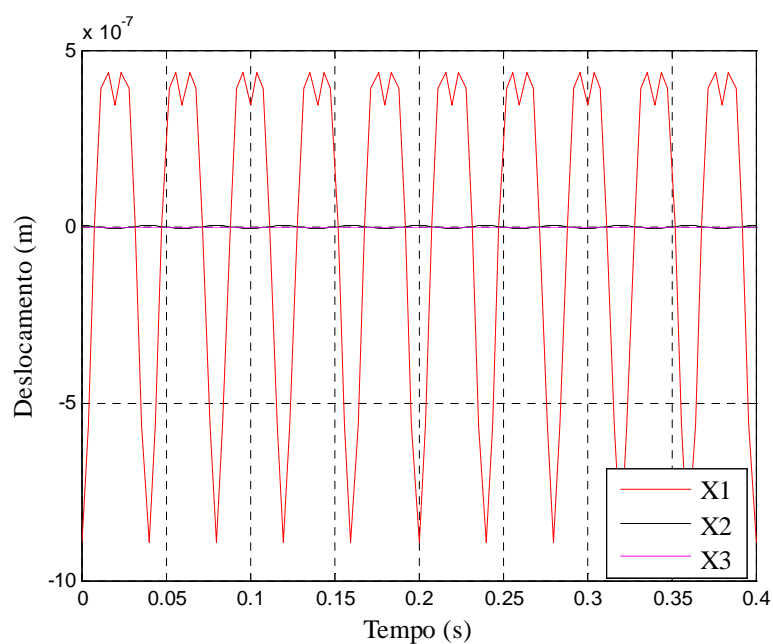


Figura 12 - Comparação entre os 3 deslocamentos calculados com os valores de rigidez utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos.

Tabela 4 – Parâmetros utilizados para geração dos dados: $P_1=1,05$; $P_2=1,17$; $P_3=1,35$.

Método	Parâmetros estimados			F_{min}	Tempo (s)
	P_1	P_2	P_3		
A.G.	1,05	1,17	1,35	$1.1057 \cdot 10^{-9}$	66,309
S.A.	1,05	1,17	1,35	$1,1513 \cdot 10^{-8}$	9,485
P.S.O.	1,0595	1,1849	1,3513	$1,6581 \cdot 10^{-2}$	53,630

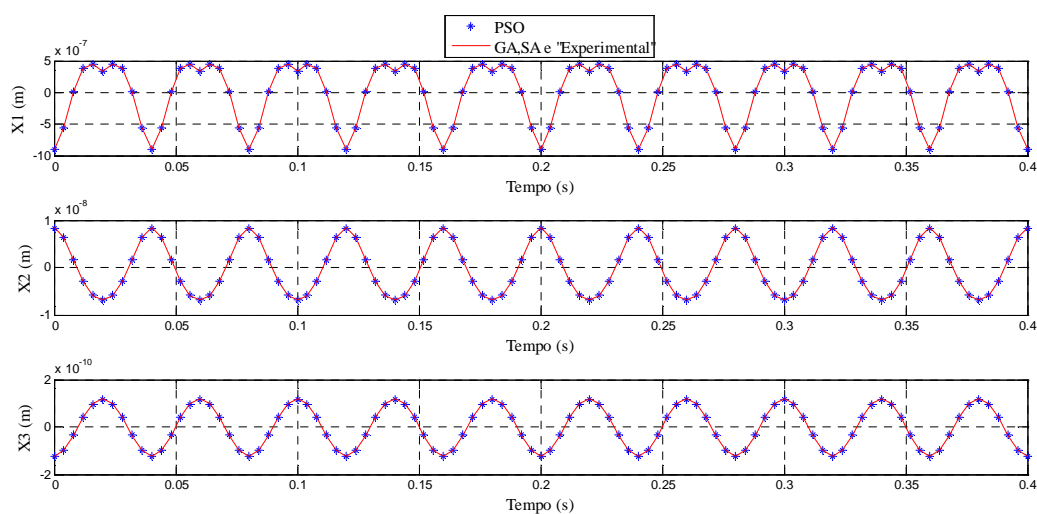
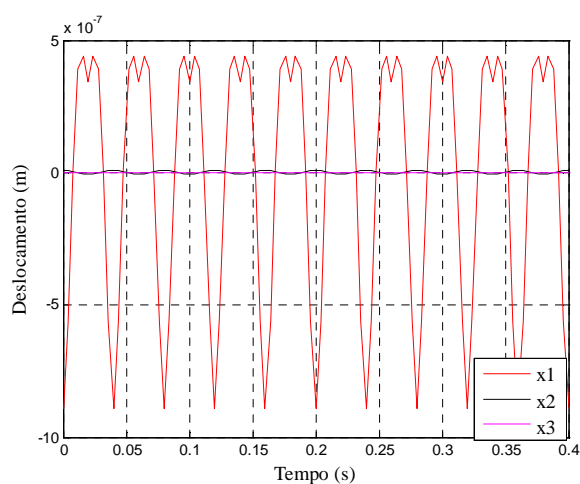
Figura 13 - Deslocamentos x_1 , x_2 e x_3 calculados com valores de rigidez obtidos por meio dos métodos de otimização e com aqueles utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos.

Figura 14. Comparação entre os 3 deslocamentos calculados com os valores de rigidez utilizados para gerar os dados experimentais sintéticos.

De uma forma geral, todos os métodos utilizados encontraram resultados muito próximos ou idênticos aos adotados para gerar a resposta experimental. Analisando os resultados obtidos, observa-se que os métodos de Algoritmos Genéticos (F_{min} da ordem 10^{-10}) e Simulated Annealing (F_{min} da ordem 10^{-9}) mostraram-se um pouco melhores que a técnica de Otimização por Colônia de Partículas (F_{min} da ordem 10^{-2}). No entanto, os métodos S.A. e P.S.O. obtiveram as respostas em um tempo menor que o A.G. Na média S.A. gastou 14% e P.S.O. gastou 80% do tempo necessário para o A.G.

Portanto, para resolução do problema inverso apresentado, a técnica de S.A. foi a mais eficiente, pois apresentou os melhores resultados no menor intervalo de tempo.

9. RESULTADOS E DISCUSSÃO

Este trabalho apresenta um estudo sobre as técnicas heurísticas de otimização, considerando três métodos específicos: Algoritmos Genéticos, Simulated Annealing e Otimização por Colônia de Partículas.

São apresentados, também, uma definição de problemas inversos e alguns conceitos introdutórios a respeito de sua classificação e

dos métodos desenvolvidos para a formulação e solução dos mesmos.

Ademais, é feita uma breve exposição sobre problemas multi-objetivo.

As técnicas estudadas foram aplicadas em problemas de engenharia. Primeiramente, estes métodos foram utilizados na solução de um modelo físico simplificado do comportamento elásticos de duas molas, o qual representa um problema direto. E, em seguida, as técnicas foram aplicadas em um problema inverso, que consistia na determinação dos parâmetros correspondentes à variação da rigidez de um prédio de três andares submetido a carregamentos externos.

A partir da análise da solução dos problemas propostos, observa-se que os três métodos encontram resultados semelhantes, sendo que o método de Simulated Annealing tende a ser o mais rápido e que a técnica de Algoritmos Genéticos a mais lenta. Nas duas aplicações ilustradas, a técnica de Simulated Annealing foi a mais eficiente, pois apresentou os melhores resultados no menor intervalo de tempo.

Os resultados obtidos durante a aplicação das três técnicas demonstram a potencialidade destes métodos, seja na resolução de problemas diretos ou inversos.

De uma forma geral, recomenda-se à utilização de técnicas diversas na solução de problemas de otimização e a comparação dos resultados, pois não é possível escolher a priori o melhor método uma vez que o comportamento depende do problema em estudo.

10. AGRADECIMENTO

Este trabalho teve apoio do PIBIC/CNPq/UFU.

11. REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- BECK, J.V.; BLACKWELL, B.; ST. CLAIR, C. R. Jr. Inverse Heat Conduction: Ill-Posed Problems, John Wiley & Sons, 1985.
- CORANA, A.; MARCHESI, M.; MARTINI, C.; RIDELLA, S. Minimizing multimodal functions of continuous variables with the simulated annealing algorithm, ACM Transactions on Mathematical Software, v. 13, n. 3, p. 262-280, 1987.
- DULIKRAVICH, G.S.; MARTIN, T.J.; DENNIS, B.H. Multidisciplinary inverse design, Proceedings Mini-Symposium on Inverse Problems - State of the Art and Future Trends, Anais do XXIV CNMAC, Belo Horizonte, 24-33, 2001.
- ENGL, H. W.; HANKE, M.; NEUBAUER, A. Regularization of Inverse Problems: Mathematics and its Applications, Kluwer, 1996.
- ESCHENAUER, H.; KOSKI, J.; OSYCZKA, A. Multicriteria Design Optimization. Berlin, Springer-Verlag, 1990.
- GOLDBERG, D.E. Genetic Algorithms in Search, Optimization, and Machine Learning. Reading, MA: Addison-Wesley, 1989.
- GRACE, A. Optimization Toolbox- For use with Matlab. The Math Works Inc., Natick, 1992.
- HAUPT, R.L.; HAUPT, S.E. Practical Genetic Algorithms, Wiley-Interscience Publication, New York, 2004.
- KIRKPATRICK, S.; GELATT JR, C.D.; VECCHI, M.P. Optimization by simulated

annealing, Science, v. 220, n. 4598, p. 671-680, 1983.

MASTERS, T. Practical Neural Network Recipes In C++, Academic Press, pp. 117-134, 1993.

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A.W.; ROSENBLUTH, M.N.; TELLER, A.H. Equations of state calculations by fast computing machines, Journal of Chemical Physics, v. 21, p. 1087-1092, 1953.

POMEROY, P. An Introduction to Particle Swarm Optimization. Disponível: <http://www.adaptiveview.com>. Acesso em: 15 Setembro de 2003.

ROJAS, J. E.; VIANA, F.A.C.; RADE, D. A.; STEFFEN JR, V. Force identification of mechanical systems by using particle swarm optimization. In 10th AIAA/ISSMO Multidisciplinary Analysis and Optimization Conference, Albany, Aug 30-01 Sept 2004.

SARAMAGO, S.F.P.; ASSIS, E.G.; STEFFEN JR., V. Simulated annealing: some applications in mechanical systems optimization, In: XX CILAMCE Computational Methods in Engineering, 1999, São Paulo, CD-ROOM.

SARAMAGO, S.P.; STEFFEN JR., V. Introdução às Técnicas de Otimização em Engenharia, Horizonte Científico, v.1., n.9, 2008.

SILVA NETO, A. J.; MOURA NETO, F. D. Escolha de Modelos – Problemas Inversos em Engenharia – Mini-curso, Congresso Nacional de Matemática Aplicada e Computacional, SBMAC, Santos (SP), Brasil, 2000.

VANDERPLAATS, G. N. Numerical Optimization Techniques for Engineering Design, Colorado Springs, Vanderplaats Research & Development, Inc., 1999. 3. ed.

VENTER, G.; SOBIESZCZANSKI-SOBIESKI, J. Particle Swarm Optimization, Proceedings of the 43rd. AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conference, Denver, CO, Vol. AIAA-2002-1235, April 22-25 2002.

VIANA, F.A.C.; STEFFEN JR., V. Particle Swarm Optimization, 14^o POSMEC – Simpósio do Programa de Pós-Graduação em Engenharia Mecânica, Uberlândia, Brasil, 2004