CONSTRUÇÃO E ESTUDO DAS MEDIDAS DE LEBESGUE E HAUSDORFF NO ESPAÇO EUCLIDIANO

ENIO MARQUES MUNIZ JUNIOR[1]; JOÃO CARLOS MOREIRA[2]

RESUMO

A teoria da medida é uma área da Análise Matemática que estuda o conceito matemático de medida e suas propriedades. A medida *comprimento de um intervalo*, que nos é tão intuitiva, pode não ser muito útil ou até mesmo perder o sentido quando tentamos utilizá-la em outros subconjuntos dos reais que não sejam intervalos. A fim de resolver esse problema, foi elaborada a medida de Lebesgue, que é definida em $\mathbb{R}$ e pode ser estendida para $\mathbb{R}^n$. Por sua vez, temos a medida de Hausdorff, uma medida mais geral que a medida de Lebesgue, que é utilizada para medir conjuntos com perímetro finito que não poderíamos medir com a medida de Lebesgue. Tal medida pode ser definida até mesmo em espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho, tratamos de um contexto geral de medida e abordamos algumas características e propriedades específicas das medidas de Lebesgue e Hausdorff.

PALAVRAS-CHAVE: teoria da medida, medida de Lebesgue, medida de Hausdorff

1. Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, Universidade Federal de Uberlândia, Rua 20, nº 1600, Ituiutaba-MG, CEP: 38304-402, enio@mat.pontal.ufu.br
2. Faculdade de Ciências Integradas do Pontal, Universidade Federal de Uberlândia, Rua 20, nº 1600, Ituiutaba-MG, CEP: 38304-402, joao@pontal.ufu.br

ABSTRACT

The measure theory is a field of Mathematics that studies the mathematical concept of measurement and their properties. The measured *length of an interval*, which is so intuitive, it may not be very useful or even lose their sense when we try to use it in other subsets of real numbers which are not intervals. In order to solve this problem, was developed a Lebesgue measure, which is defined in $\mathbb{R}$ and can be extended to $\mathbb{R}^n$. In turn, there is the Hausdorff measure, a measure more general than the Lebesgue measure that is used to measure sets with finite perimeter which cannot be measured with the Lebesgue measure. Such a measure can be defined even in the more general spaces than the set $\mathbb{R}^n$. In this paper, we deal with a general background of the measure and discuss some specific characteristics and properties of the Lebesgue and Hausdorff measures.

KEYWORDS: measure theory, Lebesgue measure, Hausdorff measure

1. INTRODUÇÃO

O ato de medir, tanto no nosso dia a dia quanto na Ciência, é algo tão natural e corriqueiro que por muitas vezes o fazemos sem se pensar muito a respeito, isto é, estamos tão acostumados a utilizar as medidas-padrão que não imaginamos que possa existir (ou ser criada) uma forma alternativa de mensuração que seja mais eficiente ou mais fácil de trabalhar. Pelo menos no ambiente abstrato da Matemática, este questionamento é levado em consideração e nos leva a criar formas diferenciadas de se medir que sejam mais adequadas aos ambientes que estamos estudando. Em outros casos, na tentativa de generalizar resultados, as medidas usuais podem até mesmo perder o sentido, forçando-nos então à elaboração de uma nova maneira de se medir.

Para ilustrar essa ideia, consideremos a *medida de comprimento* em $\mathbb{R}$. Dado um intervalo real $[a,b]$ definimos seu comprimento como sendo o número $|b-a|$. Essa medida é suficiente e satisfatória em muitos casos, e também é muito utilizada, pois, por exemplo, a utilizamos implicitamente toda vez que resolvemos uma integral. Agora suponhamos que queiramos considerar não apenas intervalos, mas uma classe mais ampla de conjuntos de números reais. Por exemplo, consideremos o intervalo $[0,2]$ e retiremos dele o número 1. Retirar apenas um número de um intervalo altera o seu comprimento? E se ao invés de retirar apenas o 1 também retirássemos todos os racionais do intervalo? É fato que ainda restariam infinitos números neste intervalo, os irracionais, então, neste caso, seria conveniente considerar esse novo conjunto como tendo *comprimento zero*? E que comprimento poderíamos atribuir para o conjunto dos números naturais? Essas são algumas complicações que podem surgir quando queremos utilizar esta medida em classes mais gerais de conjuntos.

No problema acima, uma das alternativas encontradas, tanto para o caso real quanto o caso $\mathbb{R}^n$, foi a elaboração da *medida de Lebesgue*, que permite medir uma classe mais ampla de subconjuntos dos reais do que apenas os intervalos. A medida de Lebesgue, assim como outras medidas, suas características e propriedades, formam o objeto de estudo da *teoria da medida*. O objetivo deste trabalho é estudar os fundamentos dessa teoria, isto é, estudar as primeiras propriedades das medidas em um contexto geral e prosseguir um estudo mais específico de características de duas das mais importantes medidas: a *medida de Lebesgue* e a *medida de Hausdorff*.

Assim como a medida de Lebesgue vem generalizar a medida usual de comprimento de intervalo, podemos encarar a medida de Hausdorff como sendo uma generalização da medida de Lebesgue, pois, como iremos ver, essas medidas coincidem em determinada situação. A medida de Hausdorff também está definida para o $\mathbb{R}^n$, mas também possui versões para outros espaços, constituindo-se de uma medida mais geral que a de Lebesgue. Além desse fato, mesmo em $\mathbb{R}^n$ esta medida possui propriedades interessantes, já que a partir da mesma contruímos naturalmente uma noção de *dimensão de Hausdorff* que, ao contrário de nossa experiência usual, admite dimensões que não sejam números inteiros.

Desenvolveremos esse estudo da seguinte forma: na seção 2, abordaremos o conceito matemático de medida, dando sua definição e estudando as principais propriedades que qualquer medida possui. Na seção 3 partiremos do contexto geral da seção anterior para abordarmos especificamente a medida de Lebesgue. Serão desenvolvidos durante toda a seção os conceitos necessários para definir tal medida em $\mathbb{R}$, em um processo que se dará em duas etapas: a construção de uma medida, a *medida exterior*, e a construção de um conjunto, a $\sigma -$ *álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue*. Na seção 4, definiremos a medida de Hausdorff em $\mathbb{R}^n$, discutiremos algumas de suas propriedades e a compararemos com a medida de Lebesgue. Na seção 5, a título de exemplo de aplicação da medida de Hausdorff, desenvolveremos o conceito de densidade, que permitirá relacionar a medida de Hausdorff a outras medidas.

Antes de iniciar a apresentação teórica, gostaríamos de fazer algumas observações. Salientamos que a maioria dos resultados a serem enunciados não serão demonstrados, pois algumas dessas demonstrações são avançadas para um aluno de graduação e o objetivo deste projeto, desde a sua concepção, foi alcançar a compreensão dos conceitos envolvidos e, consequentemente, das aplicações e da utilidade da teoria da medida no âmbito da Matemática. Por fim, ressaltamos que estamos considerando como *Espaços Euclidianos* os espaços $\mathbb{R}^n$, com $n \in \mathbb{N}$.

2. MATERIAIS E MÉTODOS

2.1 NOÇÕES BÁSICAS DE MEDIDA

O conceito matemático de medida é uma proposta de se definir as mínimas propriedades que uma forma de mensuração precisa possuir para poder ser satisfatoriamente tratada matematicamente. Consiste do objeto de estudo principal da teoria da medida. Antes de a definirmos, fixamos primeiro algumas notações que serão utilizadas em todo este trabalho.

Sejam $A_1, \dots, A_n, \dots, n \in \Lambda$, uma coleção de conjuntos quaisquer. Se tais conjuntos forem dois a dois disjuntos, a união dos mesmos será dita *disjunta*, e denotá-la-emos desta forma $\sum_{n\in\Lambda} A_n$. Ainda, dado um conjunto X qualquer, adotaremos a notação $\mathbb{P}(X)$ para o seu conjunto das partes.

Definição 1: Uma função $\mu: \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty]$ será dita uma *medida em X* se

i. $\mu(\emptyset) = 0$; e
ii. se $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ então $\mu(A) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$.

Exemplo 1: Dado um conjunto X, a *medida de contagem em* X é a medida $\mu: \mathbb{P}(X) \to [0, +\infty]$ tal que, para todo $E \subset X$,

$$\mu(E) = \begin{cases} \infty, & \text{se } E \text{ tem infinitos elementos} \\ n, & \text{se } E \text{ tem } n \text{ elementos} \end{cases}.$$

Verifiquemos que μ é realmente uma medida. Primeiramente, como $\emptyset$ não contém elementos, $\mu(\emptyset) = 0$. Agora, sejam $A, A_1, \dots, A_k, \dots \subset \mathbb{P}(X)$ tais que $A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Temos duas possibilidades para A:

(a) se A é finito e possui n elementos, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ não pode ter menos que n elementos, pois caso contrário $A \not\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Assim ou $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = m$, com $m \geq n$, ou $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k = \infty$. Em ambos os casos teremos $\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

(b) se A é infinito, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ não pode ser finito, pois caso contrário, $A \not\subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Assim, $\mu(A) = \infty \leq \infty = \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$.

Portanto temos para todo caso que $\mu(A) \leq \mu(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$. □

Definição 2: Seja I um intervalo de números reais. Definimos o *comprimento de* I, e denotamos por $\ell(I)$, como sendo o módulo da diferença dos extremos de I, se I é limitado, ou ∞ no caso em que I é ilimitado.

Exemplo 2: Sejam $I = (3, 5]$ e $J = (-\infty, 3]$, então $\ell(I) = 5 - 3 = 2$ e $\ell(J) = \infty$.

Enunciaremos agora algumas propriedades de medida.

Definição 3: Um conjunto $A \subset X$ é dito μ *mensurável* se para todo conjunto $B \subset X$,

$\mu(B) = \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$.

Observemos que um conjunto A é μ −mensurável se, e somente se, $X - A$ também o for. A proposição abaixo nos garante todo conjunto de medida nula é μ −mensurável.

Proposição 1: Seja μ uma medida em X e $A \subset X$. Se $\mu(A) = 0$ então A é μ −mensurável.

Demonstração: Notemos que para todo conjunto $B \subset X$, $B \subset (B \cap A) \cup (B - A)$, logo temos diretamente da definição que $\mu(B) \leq \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$. Logo, para mostrar que A é μ − mensurável basta mostrar que $\mu(B) \geq \mu(B \cap A) + \mu(B - A)$.

De fato, como $A - B \subset A$, $\mu(A - B) \leq \mu(A) = 0$, logo $\mu(A - B) = 0$. Agora, como $A \cap B \subset B$, temos que $\mu(A \cap B) \leq \mu(B) \Rightarrow 0 + \mu(A \cap B) \leq \mu(B) \Rightarrow \mu(A \cap B) + \mu(A - B) \leq \mu(B)$, provando assim o resultado. □

Pela definição de medida, temos que $\mu(\emptyset) = 0$ qualquer que seja a medida adotada, logo pela proposição acima temos que $\emptyset$ é μ − mensurável. Além disso, $\forall B \subset X$ temos que $\mu(B) = \mu(B \cap X) = \mu(B \cap X) + 0 = \mu(B \cap X) + \mu(\emptyset) = \mu(B \cap X) + \mu(B - X)$, e, portanto X também é μ −mensurável. □

Enunciaremos agora algumas propriedades interessantes dos conjuntos mensuráveis, contudo, não a demonstraremos.

Teorema 1: Seja $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ uma sequência de conjuntos μ mensuráveis. Então:

i. Os conjuntos $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ e $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ são mensuráveis.
ii. Se os conjuntos $\{A_k\}_{k=1}^{\infty}$ são disjuntos, temos que

$$\mu\left(\sum_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k).$$

iii. Se $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \dots$, então

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

iv. Se $A_1 \supset \cdots \supset A_k \supset A_{k+1} \dots$ e $\mu(A_1) < \infty$ então

$$\lim_{k\to\infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k\right).$$

A propriedade (ii) do teorema anterior é chamada $\sigma -$ *aditividade*. Toda medida que satisfaz esta propriedade será dita $\sigma -$ *aditiva*.

Definição 4: Uma coleção de subconjuntos $\mathcal{A} \subset X$ é dita uma $\sigma -$ *álgebra* se

i. $\emptyset, X \in \mathcal{A}$;
ii. Se $A \in \mathcal{A}$ então $X - A \in \mathcal{A}$;
iii. Se $A_k \subset \mathcal{A}$ $(k = 1, \dots)$ então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subset \mathcal{A}$.

Note que pelas observações anteriores e pelo item i do Teorema 1 podemos concluir que a coleção de todos os subconjuntos $\mu -$ mensuráveis de X forma uma $\sigma -$ álgebra.

Definiremos a seguir tipos especiais de medidas que possuem propriedades muito úteis. Tais medidas são as mais estudadas na teoria da medida. Para defini-las, precisamos primeiro definir um tipo especial de $\sigma -$ álgebra (a partir de agora estaremos considerando medidas apenas em $\mathbb{R}^n$).

Definição 5: A $\sigma -$ *álgebra de Borel* é a menor $\sigma -$ álgebra que contém os subconjuntos abertos de $\mathbb{R}^n$.

Definição 6:

i. Uma medida μ de X é *regular* se $\forall A \subset X$ existe um conjunto B $\mu -$ mensurável tal que $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.
ii. Uma medida μ de $\mathbb{R}^n$ é dita *Borel* se qualquer conjunto de Borel é $\mu -$ mensurável.
iii. Uma medida μ de $\mathbb{R}^n$ é dita *Borel regular* se é Borel e $\forall A \subset \mathbb{R}^n$ temos que existe um conjunto de Borel B tal que $A \subset B$ e $\mu(A) = \mu(B)$.
iv. Uma medida μ de $\mathbb{R}^n$ é dita uma *medida de Radon* se é Borel regular e $\mu(K) < \infty$ para todo conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^n$.

Teorema 2: Seja μ uma medida regular em X. Se $A_1 \subset \cdots \subset A_k \subset A_{k+1} \subset \cdots$, então $\lim_{k \to \infty} \mu(A_k) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)$.

O teorema acima se difere do item iii do Teorema 1 porque ele não exige que os A_k sejam $\mu -$ mensuráveis.

Teorema 3: Seja μ uma medida Borel regular em $\mathbb{R}^n$, suponhamos que $A \subset \mathbb{R}^n$ é $\mu -$ mensurável e que $\mu(A) < \infty$. Então, a restrição de μ a A (denotada por $\mu\lfloor A$) é uma medida de Radon.

O Teorema a seguir nos diz que, numa medida de Radon, podemos aproximar a medida de um conjunto qualquer pela medida de conjuntos abertos e também pela medida de conjuntos compactos.

Teorema 4 (Aproximação por conjuntos abertos e compactos): Seja μ uma medida de Radon em $\mathbb{R}^n$. Então

i. para todo $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : A \subset U, U \text{ aberto}\}$, e
ii. para todo $\mu -$ mensurável $A \subset \mathbb{R}^n$, $\mu(A) = \sup\{\mu(K) : K \subset A, K \text{ compacto}\}$.

Para finalizar este capítulo vamos enunciar um útil critério para determinar se uma medida é de Borel. Observamos que $\text{dist}(A,B) \equiv \inf\{d(x,y) : x \in A, y \in B\}$.

Teorema 5 (Critério de Caratheodory): Seja μ uma medida em $\mathbb{R}^n$. Se $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ para todos os conjuntos de $\mathbb{R}^n$ com $\text{dist}(A,B) > 0$, então μ é uma medida de Borel.

2.2 MEDIDA DE LEBESGUE

Usualmente, estamos acostumados a medir um intervalo I de números reais utilizando a medida de comprimento $\ell(I)$. No entanto, como já discutido na introdução, encontramos certas dificuldades teóricas ao tentar usar essa medida em conjuntos de números reais que não são intervalos. Para resolver este problema, vamos construir a medida de Lebesgue, que é uma extensão do conceito de comprimento de intervalo para subconjuntos reais mais gerais.

A construção dessa medida se dará em duas etapas. Na primeira etapa, construímos uma medida definida em todos os reais que atenderá nosso desejo de mensurar conjuntos mais abstratos, porém, como veremos, tal medida não satisfará uma importante propriedade de medida, a σ aditividade. Para minimizar este problema, construiremos uma σ álgebra dos reais de modo tal que, quando restringirmos essa medida a este conjunto, obteremos uma medida $\sigma -$ aditiva. Esta tal medida será a medida de Lebesgue.

Fixemos primeiramente algumas nomenclaturas. Uma coleção de conjuntos $\{E_\lambda\}, \lambda \in \Lambda$ será dita uma *cobertura de* E se $E \subseteq \bigcup_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. Também chamaremos de *subcobertura* um subconjunto de uma cobertura que por sua vez também é uma cobertura. Além disso, se todos os conjuntos de uma cobertura forem abertos, a cobertura será dita *aberta*, e se a cobertura possuir um número finito de conjuntos, então ela será dita *finita*. Essas nomenclaturas são necessárias para enunciar o teorema a seguir.

Teorema 6 (Heine-Borel): Seja F um conjunto compacto de $\mathbb{R}$. Então toda cobertura aberta de F possui uma subcobertura finita.

Enunciaremos agora a medida exterior de um subconjunto de $\mathbb{R}$.

Definição 7: Seja $A \subset \mathbb{R}$. A *medida exterior de A*, denotada por $\mathcal{L}^*(A)$, será dada por

$$\mathcal{L}^*(A) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \text{ tal que } A \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas abertas $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ de A, onde I_k é um intervalo.

Notemos que como $\ell(I_k) \geq 0 \ \forall k$, a somatória acima independe da ordem dos termos, logo a medida exterior está bem definida. Notemos também que $\mathcal{L}(\emptyset) = 0$ e que se $A \subset B$, então $\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(B)$.

Exemplo 3: A medida exterior do intervalo $(0,1)$ é 1. Já que $(0,1) \subset (0,1)$, podemos considerar $(0,1)$ como uma cobertura dele mesmo, e como $\ell\big((0,1)\big) = 1$, temos que

$$\inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \text{ tal que } (0,1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\} \leq 1.$$

Por outro lado, como $\bigcup_{k=1}^{\infty} I_k \supseteq (0,1)$ para toda cobertura considerada, e o comprimento de um intervalo é sempre positivo, temos que $\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \geq \ell\big((0,1)\big) = 1$ e então

$$1 \leq \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \text{ tal que } (0,1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\}.$$

Assim temos que:

$$\mathcal{L}^*((0,1)) = \inf\left\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) \text{ tal que } (0,1) \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\right\} = 1.$$

Note que se o intervalo fosse $[0,1]$ não poderíamos considerá-lo como uma cobertura, pois o ínfimo da definição é tomado sobre *coberturas abertas*. No entanto, podemos neste caso considerar a sequência de intervalos $\left\{\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right), n \in \mathbb{N}\right\}$, que é uma cobertura de abertos de $(0,1)$ tal que $\inf\left\{\ell\left(\left(-\frac{1}{n}, 1+\frac{1}{n}\right)\right), n \in \mathbb{N}\right\} = 1$. Tal exemplo ilustra a ideia para a demonstração do fato geral da Proposição 2 a seguir. □

Enunciaremos agora três boas propriedades da medida exterior.

Proposição 2: A medida exterior de um intervalo é o seu comprimento, em símbolos, $\mathcal{L}^*(I) = \ell(I)$ sempre que I é um intervalo real.

Proposição 3: A medida exterior é invariante por translações, isto é, para todo $A \subset \mathbb{R}$ e um número real y, $\mathcal{L}^*(A+y) = \mathcal{L}^*(A)$.

Proposição 4: A medida exterior é subaditiva enumerável, isto é, se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma coleção enumerável de conjuntos, disjuntos ou não, temos que

$$\mathcal{L}^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^*(E_k).$$

As três propriedades anteriores são naturalmente esperadas em uma boa medida em $\mathbb{R}$, porém, a medida exterior não satisfaz a$\sigma -$ aditividade, que também é uma propriedade que se esperaria de uma medida. Para conseguirmos então uma medida que preserve as propriedades acima e também satisfaça a $\sigma -$ aditividade, vamos construir uma $\sigma -$ álgebra, que chamaremos de *$\sigma -$ álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue*, e então restringiremos a medida exterior a essa $\sigma -$ álgebra.

Apesar de conseguir garantir as quatro propriedades desejadas, devemos observar, todavia, que neste processo “perdemos alguns conjuntos”, pois a medida exterior antes da restrição estava definida para *todos* os subconjuntos dos reais. Ressaltamos que essa perda é de certa forma inevitável, pois é impossível definir uma medida nos reais que esteja definida para todos os subconjuntos dos reais e seja $\sigma -$ aditiva. Isto é garantido pelo teorema anunciado abaixo, disponível em [3], página 49.

Teorema 7: Existem conjuntos de números reais A e B, disjuntos, tais que $\mathcal{L}^*(A \cup B) < \mathcal{L}^*(A) + \mathcal{L}^*(B)$.

Além de a “perda de conjuntos” ser inevitável, também perceberemos adiante que a $\sigma -$ *álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue* é um subconjunto “bem amplo” de $\mathbb{P}(\mathbb{R})$, o que também justifica nossa abordagem.

Em concordância com a Definição 3, diremos que um conjunto E é mensurável Lebesgue se, e somente se, para qualquer conjunto $A \subset \mathbb{R}$ vale que $\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E)$. Dessa forma, da Proposição 1 obtemos que se $\mathcal{L}^*(A) = 0$ então A é mensurável Lebesgue e do item i do Teorema 1 obtemos que a união enumerável de conjuntos mensuráveis Lebesgue também é mensurável Lebesgue. Mais ainda, pelo raciocínio desenvolvido na seção 2.1 concluímos que a coleção dos conjuntos mensuráveis Lebesgue forma uma $\sigma -$ álgebra dos reais. Isto justifica a nomenclatura $\sigma -$ *álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue.*

O resultado abaixo nos garante que esse conjunto é “bem amplo”.

Teorema 8: Todo subconjunto aberto dos números reais é mensurável Lebesgue.

Usando o resultado deste Teorema e o fato de que a coleção dos mensuráveis Lebesgue é uma $\sigma -$ álgebra, obtemos que a $\sigma -$ *álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue* contém a $\sigma -$ álgebra de Borel de $\mathbb{R}$, isto é, do teorema anterior segue diretamente o seguinte corolário:

Corolário 1: A coleção dos conjuntos mensuráveis Lebesgue é uma $\sigma -$ álgebra que contém todos os intervalos, todas as interseções e uniões enumeráveis de conjuntos abertos e fechados, respectivamente.

Já definimos os dois objetos que precisávamos e agora estamos enfim aptos a definir a medida de Lebesgue.

Definição 8: A *medida de Lebesgue* é a restrição da medida exterior à $\sigma-$ álgebra dos conjuntos mensuráveis Lebesgue. Deste modo, em símbolos, denotando a medida de Lebesgue por $\mathcal{L}$, dado um conjunto mensurável Lebesgue E, definimos sua medida de Lebesgue $\mathcal{L}(E)$ por

$$\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}^*(E).$$

Nosso objetivo final no estudo da medida de Lebesgue é enunciar e demonstrar a sua $\sigma-$ aditividade. Notemos que o fato de uma medida ser $\sigma-$ aditiva para conjuntos μ −mensuráveis é válido em geral para qualquer medida (item (ii) do Teorema 1), contudo, isto não foi demonstrado. Mostraremos este fato no caso particular da medida de Lebesgue e os conjuntos mensuráveis Lebesgue. Para isso, provaremos primeiro dois resultados.

Proposição 5: Seja $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ uma coleção finita disjunta de conjuntos mensuráveis Lebesgue e seja $A \subset \mathbb{R}$ qualquer. Então

$$\mathcal{L}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k).$$

Demonstração: Provaremos por indução em n.

Se $n = 1$ o resultado é imediato. Suponhamos então que a hipótese seja verdadeira para $n - 1$ e provemos sua veracidade para n. Como a coleção $\{E_k\}_{k=1}^{n}$ é disjunta,

$$A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap E_n = A \cap E_n \text{ e } A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) - E_n = A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right).$$

Assim, pela mensurabilidade de E_n e pela hipótese de indução temos que

$$\mathcal{L}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right)\right) = \mathcal{L}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) \cap E_n\right) + \mathcal{L}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) - E_n\right) =$$

$$= \mathcal{L}^*(A \cap E_n) + \mathcal{L}^*\left(A \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} E_k\right)\right) = \mathcal{L}^*(A \cap E_n) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k).$$

□

Proposição 6: A união enumerável de conjuntos mensuráveis Lebesgue é mensurável Lebesgue.

Demonstração: Supriremos aqui a demonstração técnica de que uma união finita de conjuntos mensuráveis é mensurável. Seja F a união de uma coleção enumerável de conjuntos mensuráveis. Podemos supor sem perda de generalidade que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Seja $A \subset \mathbb{R}$ qualquer e $n \in \mathbb{N}$. Definamos $F_n = \bigcup_{n=1}^{k} E_k$. Como F_n é mensurável e $A - F_n \supseteq A - E$,

$$\mathcal{L}^*(A) = \mathcal{L}^*(A \cap F_n) + \mathcal{L}^*(A - F_n) \geq \mathcal{L}^*(A \cap F_n) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

Pela proposição anterior segue que $\mathcal{L}^*(A \cap F_n) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k)$, daí

$$\mathcal{L}^*(A) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

Como esta igualdade vale para todo n e $\mathcal{L}^*(A)$ não depende de n, concluímos que

$$\mathcal{L}^*(A) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}^*(A \cap E_k) + \mathcal{L}^*(A - E)$$

e do fato de que $\mathcal{L}^*$ é subaditiva enumerável temos portanto que

$$\mathcal{L}^*(A) \geq \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E).$$

Por fim, como $A \subset (A \cap E) \cup (A - E)$ temos diretamente da definição de medida que

$$\mathcal{L}^*(A) \leq \mathcal{L}^*(A \cap E) + \mathcal{L}^*(A - E),$$

e deste modo está provada a mensurabilidade de A.

□

Observamos também que as demonstrações da Proposição 5 e a Proprosição 6 podem ser refeitas, com as devidas adequações, para uma medida qualquer μ e para conjuntos $\mu -$ mensuráveis.

Teorema 9: A medida de Lebesgue é $\sigma -$ aditiva, isto é, se $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ é uma coleção enumerável de conjuntos disjuntos e mensuráveis Lebesgue, então a união $\bigcup_{k=1}^{\infty}$ também é mensurável Lebesgue e, caso os conjuntos da coleção supracitada sejam disjuntos, vale a igualdade

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(E_k).$$

Demonstração: Obtemos diretamente da Proposição 6 que $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ é mensurável. Além disso, como a medida de Lebesgue é subaditiva enumerável (veja a Proposição 4) temos que $\mathcal{L}(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(E_k)$, de modo que só precisamos mostrar que

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(E_k).$$

Da Proposição 5 temos que para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}(E_k).$$

Como $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \supset \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$,

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq \mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{n} E_k\right) - \sum_{k=1}^{n} \mathcal{L}(E_k), \quad \forall n.$$

Como o primeiro membro desta inequação não depende de n, segue que

$$\mathcal{L}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{L}(E_k).$$

□

2.3 MEDIDA DE HAUSDORFF

Apresentaremos nesta seção a medida de Hausdorff, que consiste de outro exemplo de medida que podemos definir em $\mathbb{R}$ (e em $\mathbb{R}^n$). Intuitivamente, a medida de Hausdorff é utilizada quando se pretende medir o volume de regiões de $\mathbb{R}^n$ que possuem fronteiras “complicadas” que não poderiam ser mensurados com outra medida, como a de Lebesgue, por exemplo. Isso vem do fato de que a medida de Lebesgue utiliza aproximações com intervalos para medir um conjunto no caso real (reveja a definição), ou retângulos, no caso $\mathbb{R}^2$, ou mais geralmente, caixas, no caso $\mathbb{R}^n$. Como veremos a seguir, a medida de Hausdorff utilizará bolas abertas no lugar de intervalos, e “forçará” o diâmetro dessas bolas diminuírem até que se obtenha a medida desejada.

Do ponto de vista teórico, apesar de a definição da medida de Hausdorff ser diferente da definição da medida de Lebesgue, podemos encará-la como uma generalização desta última, visto que é provado que elas são “equivalentes” em condições que serão explicitadas posteriormente. Além disso, a medida de Hausdorff é dotada naturalmente de uma noção de dimensão, e possui a característica notável de admitir dimensões não necessariamente inteiras, isto é, é possível termos objetos de dimensões intermediárias entre 0 e 1, por exemplo.

Antes de exibir a definição da medida de Hausdorff, ressaltamos que tal medida pode ser definida em conjuntos mais gerais que o $\mathbb{R}^n$ e que, portanto, sua definição e suas características (e consequentemente sua teoria em si) são bem mais abstratas que a da medida de Lebesgue. Realizaremos aqui apenas uma abordagem rápida focando apenas os conceitos envolvidos sem se preocupar com suas justificações. Um leitor interessado numa abordagem completa da medida de Hausdorff pode consultar [1] ou [6].

No que segue, $diam\ (X) = \sup\{d(x,y)\ tal\ que\ x,y \in X\}$.

Definição 9:

i. Seja $A \subset \mathbb{R}^n, 0 \leq s < \infty, 0 < \delta \leq \infty$. Defina

$$\mathcal{H}_\delta^s(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(s)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^s \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\},$$

onde

$$\alpha(s) = \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}.$$

Aqui, os C_j são bolas abertas de $\mathbb{R}^n$, $\Gamma(s) = \int_0^\infty e^{-x}x^{s-1}dx, (0 < s < \infty)$ é a *função gama* usual e o ínfimo é tomado sobre todas as coberturas $\bigcup_{j=1}^{\infty} C_j$ de A.

ii. Para A e s como acima, definimos

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^s(A) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(A).$$

Tal como definida, $\mathcal{H}^s$ é uma medida, e nós a chamaremos de *medida de Hausdorff s dimensional em $\mathbb{R}^n$*.

Obvervação: Na definição acima, ao requerer que $\delta \to 0$, estamos forçando a cobertura a “acompanhar a geometria local” do conjunto.

A figura a seguir fornece uma interpretação intuitiva da definição da medida de Hausdorff.

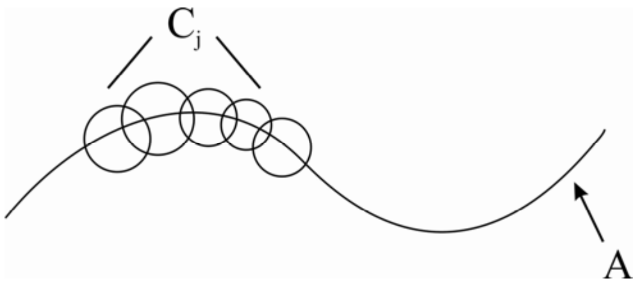

Figura 1

Exemplo 4: Consideremos $A \subset \mathbb{R}^n,\ 0 < \delta \leq \infty$ e $s = 0$. Daí:

$$\mathcal{H}_\delta^0(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} \alpha(0)\left(\frac{diam\ C_j}{2}\right)^0 \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}$$

e

$$\mathcal{H}_\delta^0(A) = \inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} 1 \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}$$

Assim:

$$\mathcal{H}^0(A) = \lim_{\delta \to 0} \mathcal{H}_\delta^0(A) = \lim_{\delta \to 0}\left(\inf\left\{\sum_{j=1}^{\infty} 1 \text{ tal que } A \subset \bigcup_{j=1}^{\infty} C_j,\ diam\ C_j \leq \delta\right\}\right)$$

O valor de $\mathcal{H}^0(A)$ será alterado ao mudarmos a cobertura é o número de conjuntos C_j, pois para cada C_j teremos um termo 1 no somatório. Assim, para alcançarmos o ínfimo precisamos tomar a cobertura com menor número possível de elementos. Para isso poderíamos considerar um único C tal que $A \subset C$, mas também temos que satisfazer a condição de $\delta \to 0$, isto é, temos que tomar conjuntos com o menor diâmetro possível. Se A for um conjunto finito com n elementos, podemos considerar $C_1, \dots, C_n$ tais que cada C_j contém um elemento a_j de A, e tal conjunto pode ser tomado com diâmetro tão pequeno quanto se queira. Nesse caso,

$$\mathcal{H}^0(A) = \sum_{j=1}^{n} 1 = n$$

Se A for um conjunto infinito, teremos:

$$\mathcal{H}^0(A) = \sum_{j=1}^{\infty} 1 = \infty.$$

Temos assim que

$$\mathcal{H}^0(A) = \begin{cases} \infty, & \text{se } A \text{ tem infinitos elementos} \\ n, & \text{se } A \text{ tem } n \text{ elementos} \end{cases}.$$

Portanto, $\mathcal{H}^0(A)$ é a medida de contagem em $\mathbb{R}^n$. □

Da forma como foi definida, $\mathcal{H}^s$ terá a propriedade de que se $A, B \subset X$ com $dist(A,B) > 0$, então $\mathcal{H}^s(A \cup B) = \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$. Temos então pelo critério de Caratheodory (Teorema 5) que $\mathcal{H}^s$ é uma medida de Borel. Também é possível provar que dado um conjunto arbitrário A, existe um conjunto de Borel B tal que $A \subset B$ e $\mathcal{H}^s(B) = \mathcal{H}^s(A)$. Dessa forma, temos o seguinte resultado:

Teorema 10: $\mathcal{H}^s$ é uma medida Borel regular $(0 \leq s < \infty)$.

Anunciaremos agora algumas propriedades da medida de Hausdorff:

Teorema 11:

i. $\mathcal{H}^0$ é uma medida de contagem.
ii. $\mathcal{H}^1 = \mathcal{L}$ em $\mathbb{R}$.
iii. $\mathcal{H}^s = 0$ em $\mathbb{R}^n$ para todo $s > n$.
iv. $\mathcal{H}^s(\lambda A) = \lambda^s \mathcal{H}^s(A)$ para todo $\lambda > 0, A \subset \mathbb{R}^n$.

Proposição 7: Suponhamos $A \subset \mathbb{R}$ e $\mathcal{H}^s_\delta(A) = 0$ para algum $0 < \delta \leq \infty$. Então $\mathcal{H}^s(A) = 0$.

Proposição 8: Seja $A \subset \mathbb{R}^n$ e $0 \leq s < t < \infty$.

i. Se $\mathcal{H}^s(A) < \infty$, então $\mathcal{H}^t(A) = 0$.
ii. Se $\mathcal{H}^t(A) > 0$, então $\mathcal{H}^s(A) = +\infty$.

Os resultados anteriores nos permitem definir a noção de dimensão para a medida de Hausdorff.

Definição 10: A *dimensão de Hausdorff* de um conjunto $A \subset \mathbb{R}^n$ é definida como sendo

$$\mathcal{H}_{dim}(A) = \inf\{0 \leq s < \infty \text{ tal que } \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Do item iii do Teorema 11 concluímos que $\mathcal{H}_{dim}(A) \leq n$. Seja $s = \mathcal{H}_{dim}(A)$. Daí, temos pela Proposição 8 que $\mathcal{H}^t(A) = 0$ para todo $t > s$ e que $\mathcal{H}^t(A) = +\infty$ para todo $t < s$. É importante observar que $\mathcal{H}^s(A)$ não precisa necessariamente ser igual a zero, de fato, $\mathcal{H}^s(A)$ pode ser qualquer número entre 0 e ∞, inclusive. Além disso, notemos também que $\mathcal{H}_{dim}(A)$ não precisa ser um número inteiro.

Enunciaremos a seguir o importante resultado que garante a "equivalência" entre a medida de Hausdorff e a medida de Lebesgue. Antes para isso precisamos definir a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$.

Definição 11: Seja μ uma medida em X e ν uma medida em Y. Definiremos uma medida $\mu \times \nu: \mathcal{P}(X \times Y) \to [0, \infty]$ como sendo, para cada $S \subset X \times Y$,

$$(\mu \times \nu)(S) = \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)\nu(B_i)\right\},$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as coleções de conjuntos $\mu -$ mensuráveis $A_i \subset X$ e conjuntos $\nu -$ mensuráveis $B_i \subset Y$ $(i = 1, \ldots)$ tais que

$$S \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} (A_i \times B_i).$$

Esta medida é chamada de *medida produto* de μ por ν.

Em posse desta definição, a medida dada na definição 8 será chamada *medida de Lebesgue* $1-$ *dimensional*, e será denotada por $\mathcal{L}^1$. Daí, definimos indutivamente a *medida de Lebesgue* $n-$ *dimensional* por

$$\mathcal{L}^n \equiv \mathcal{L}^1 \times \ldots \times \mathcal{L}^1 \text{ } (n \text{ vezes}).$$

Teorema 12: A medida de Hausdorff coincide com a medida de Lebesgue em $\mathbb{R}^n$ isto é, denotando por $\mathcal{L}^n$ a medida de Lebesgue $n-$ dimensional, temos que $\mathcal{H}^n = \mathcal{L}^n$ em $\mathbb{R}^n$.

2.4 DENSIDADES

Para finalizar o estudo da medida de Hausdorff, vamos introduzir as noções de densidade superior e densidade inferior $n-$ dimensional de uma medida em um conjunto arbitrário, num ponto qualquer, a fim de exibir uma aplicação da medida de Hausdorff e sua relação com outras medidas.

O termo *densidade* denomina na Física a grandeza definida pela razão entre a massa e o volume de um determinado objeto (às vezes chamado também de *massa específica*). O conceito matemático de densidade é inspirado na grandeza física, e representa a razão entre a massa, que aqui é entendida como sendo a medida da região, pelo volume, que é interpretado pelo volume da bola aberta unitária do espaço.

Definição 12: Para qualquer medida μ em X, qualquer subconjunto $A \subset X$ e qualquer ponto $x \in X$, definem-se as *densidades* $n-$ *dimensionais superior e inferior* pelas expressões dadas abaixo, respectivamente:

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) \equiv \limsup_{\rho \to 0^+} \frac{\mu(A \cap B_\rho(x))}{\omega_n \rho^n};$$

$$\theta_*^n(\mu, A, x) = \liminf_{\rho \to 0^+} \frac{\mu\big(A \cap B_\rho(x)\big)}{\omega_n \rho^n};$$

sendo $B_\rho(x)$ a bola fechada de centro em x e raio ρ e ω_n o volume da bola fechada de raio unitário. No caso em que $A = X$, simplesmente escreveremos $\theta^{*n}(\mu, x)$ e $\theta_*^n(\mu, x)$.

Exemplo 5: Consideremos na definição anterior $\mu = \ell$, $X = \mathbb{R}$ e $A = [-10{,}10]$. Consideraremos primeiramente $x = 5 \in A$. Temos que $\omega_1 = \ell([-1{,}1]) = 2$. Daí:

$$\frac{\ell\big(A \cap B_\rho(5)\big)}{2\rho^1} = \frac{\ell([-10{,}10] \cap [5-\rho, 5+\rho])}{2\rho}$$

Quando $\rho \leq 5$,

$$\frac{\ell([-10{,}10] \cap [5-\rho, 5+\rho])}{2\rho} = \frac{\ell([5-\rho, 5+\rho])}{2\rho} = \frac{2\rho}{2\rho} = 1.$$

Logo $\theta^{*n}(\ell, A, 5) = \theta_*^n(\ell, A, 5) = 1$. Consideremos agora $x = 15 \notin A$. Temos que:

$$\frac{\ell\big(A \cap B_\rho(15)\big)}{2\rho^1} = \frac{\ell([-10{,}10] \cap [15-\rho, 15+\rho])}{2\rho}$$

Quando $\rho < 5$,

$$\frac{\ell([-10{,}10] \cap [15-\rho, 15+\rho])}{2\rho} = \frac{\ell(\emptyset)}{2\rho} = \frac{0}{2\rho} = 0.$$

Logo $\theta^{*n}(\ell, A, 15) = \theta_*^n(\ell, A, 15) = 0$. Deste modo percebemos que, ao menos neste caso específico, se $x \notin A$, então $\theta^{*n}(\ell, A, x) = \theta_*^n(\ell, A, x) = 0$. O Teorema 14 generaliza essa característica para uma medida Borel-regular. □

Teorema 13: Seja μ uma medida Borel-regular em X e $t \geq 0$:

i. Se $A_1 \subset A_2 \subset X$ e $\theta^{*n}(\mu, A_2, x) \geq t$, $\forall x \in A_1$, então

$t\mathcal{H}^n(A_1) \leq \mu(A_2)$;

ii. Se $A \subset X$ e $\theta^{*n}(\mu, A, x) \leq t$, $\forall x \in A$, então

$\mu(A) \leq 2^n t\mathcal{H}^n(A)$.

O teorema anterior nos diz que qualquer que seja a medida adotada, podemos estimar a medida de um conjunto por uma medida de Hausdorff.

Teorema 14: Se μ é uma medida Borel-regular, se A é um subconjunto $\mu -$ mensurável de X e se $\mu(A) < \infty$, então

$$\theta^{*n}(\mu, A, x) = 0$$

qtp $\mathcal{H}^n$ para $x \in X - A$.

Teorema 15: Seja $E \subset \mathbb{R}^n, E\ \mathcal{H}^s -$ mensurável e $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Então

$$\lim_{r \to 0} \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r) \cap E)}{\alpha(s) r^s} = 0$$

qtp $\mathcal{H}^s$ para $x \subset \mathbb{R}^n \quad E$.

Teorema 16: Seja $E \subset \mathbb{R}^n$, $E\ \mathcal{H}^s -$ mensurável e $\mathcal{H}^s(E) < \infty$. Então

$$\frac{1}{2^s} \leq \lim_{r \to 0} \sup \frac{\mathcal{H}^s(B(x,r) \cap E)}{\alpha(s) r^s} \leq 1$$

qtp $\mathcal{H}^s$ para $x \in E$.

Note que o Teorema 16 nos dá limitantes inferiores e superiores para a dimensão de qualquer ponto do $\mathbb{R}^n$ em E, pela medida de Hausdorff $s-$ dimensional, no caso em que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$.

3 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Os conceitos estudados mostram que a medida de Lebesgue é eficiente em medir subconjuntos dos números reais mais gerais que os intervalos, e estes permitem desenvolver, em analogia aos conceitos já estabelecidos com a utilização da medida ℓ usual, novos conceitos e ferramentas. Por exemplo, a partir da medida de Lebesgue é possível generalizar o conceito de integral de Riemann, que está definida para as funções cujos domínios são intervalos, para a integral de Lebesgue, que é definida para as funções que possuem domínios que sejam mensuráveis Lebesgue.

A medida de Hausdorff, por sua vez, vem para calcular a medida de conjuntos de perímetro finito que não poderiam ser medidos com a medida de Lebesgue. Em um contexto mais abstrato, a medida de Hausdorff também possibilita generalizar a medida de Lebesgue para ambientes mais gerais que o $\mathbb{R}^n$ e também permite definir e trabalhar com objetos em dimensões fracionárias.

Esses dois exemplos de medida nos mostram que a partir do momento que se deseja abordar um contexto mais geral, é possível basear-se em conceitos já definidos e estudados em outros contextos, generalizando-os de modo a adequá-los ao novo contexto que se está estudando.

4 CONCLUSÃO

A medida de Lebesgue é uma boa maneira de se generalizar o conceito de comprimento, desenvolvido para medir intervalos. Com ela é possível medir subconjuntos muito mais gerais de $\mathbb{R}$ e, consequentemente, nos permite generalizar muitos outros resultados e técnicas para esses conjuntos. A medida de Hausdorff, por sua vez, é uma medida mais geral que a medida de Lebesgue, e é util para medir conjuntos com perímetro finito que não poderiam ser medidos pela medida de Lebesgue pela maneira como esta foi definida. A medida de Hausdorff também pode ser definida até mesmo em espaços mais gerais que o $\mathbb{R}^n$ permitindo o desenvolvimento de novas teorias.

5 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] EVANS, L. *Measure theory and fine properties of functions.* CRC Press Inc., Estados Unidos, 2000.

[2] FERNANDES, J. P. *Medida e Integração*. 2 ed. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.

[3] FITZPATRICK, P. *Real Analysis.* Pearson Education, Inc., Estados Unidos, 2010.

[4] MOREIRA, J. C. *Soluções Estacionárias Estáveis de uma Classe de Sistemas de Equações de Reação Espacialmente Heterogêneas: uma abordagem variacional.* Tese de Doutorado São Carlos, UFSCar, 2006.

[5] PAULA, F. G. de. *O conceito de n-varifold e EDP*. Dissertação de Mestrado. São Carlos, UFSCar, 2006.

[6] SIMON, L.; HARDT, R. *Seminar on Geometric Measure Theory.* Boston: Birkhäuser Verlag, 1986.

[7] WHEEDEN, R. L. *Measure and Integral: An Introduction to Real Analysis.* New York: Marcel Dekker, Inc., 1977.