ensino em ReVISTA

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

O Movimento Lógico-Histórico da Progressão Aritmética: uma contribuição para o ensino de Matemática

Elton José Pereira[1]

Marilene Ribeiro Resende[2]

RESUMO

Este artigo descreve aspectos do movimento lógico-histórico do conceito de Progressão Aritmética (PA), identificando nexos conceituais (internos e externos) de Álgebra, trabalhada no Ensino Médio. A metodologia é a revisão bibliográfica de fontes brasileiras em língua portuguesa e em espanhol. A análise dos resultados aponta que o movimento lógico-histórico de PA, didaticamente, possibilita aos alunos, pelo acesso aos nexos conceituais, desenvolverem ações mentais ligadas ao pensamento teórico. Assim, o ensino de PA não é apenas uma técnica operatória, mas uma oportunidade de desenvolver um conceito como instrumento cognitivo, desenvolvido a partir das necessidades humanas. Alguns nexos internos do conceito de PA são comuns aos de outros conceitos algébricos, como *fluência*, *grandeza*, *variável*, *campo de variação* e *interdependência*, podendo ser acrescidos nexos próprios, como a ordem (posição), cujo campo de variação é o conjunto dos números naturais, e a existência de uma variação constante (diferença) entre os termos da sequência.

PALAVRAS-CHAVE: Pensamento Teórico; Ensino de Matemática; Ensino Médio; Progressão Aritmética.

[1] Doutorando do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Uberaba - UNIUBE, Uberaba, MG, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-0283-5250. *E-mail:* elton.pereira@ifmg.edu.br.

[2] Docente permanente do Programa de Pós-graduação em Educação da Universidade de Uberaba, Uberaba, MG, Brasil. Orcid: https://orcid.org/0000-0002-6740-1787. *E-mail:* marilene.resende@uniube.br.

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

The Logical-Historical Movement of Arithmetic Progression: a contribution to math teaching

ABSTRACT

This article describes aspects of the logical-historical movement of the concept of Arithmetic Progression (AP), identifying conceptual links (internal and external) with Algebra, which is taught in secondary school. The methodology is a bibliographical review of Brazilian sources in Portuguese and Spanish. The analysis of the results shows that the logical-historical movement of AP, didactically, enables students to develop mental actions linked to theoretical thinking through access to conceptual links. Thus, the teaching of AP is not just an operative technique, but an opportunity to develop a concept as a cognitive tool, developed from human needs. Some of the internal links in the concept of AP are common to other algebraic concepts, such as fluency, magnitude, variable, field of variation and interdependence, but we can add our own links, such as order (position), whose field of variation is the set of natural numbers, and the existence of a constant variation (difference) between the terms of the sequence.

KEYWORDS: Theoretical Thinking; Teaching Mathematics; High School; Arithmetic Progression.

El movimiento lógico-histórico de la progresión aritmética: una contribución a la enseñanza de las matemáticas

RESUMEN

Este artículo describe aspectos del movimiento lógico-histórico del concepto de Progresión Aritmética (PA), identificando vínculos conceptuales (internos y externos) con el Álgebra, que se enseña en la enseñanza media. La metodología es una revisión bibliográfica de fuentes brasileñas en portugués y español. El análisis de los resultados muestra que el movimiento lógico-histórico del PA, didácticamente, permite a los alumnos desarrollar acciones mentales vinculadas al pensamiento teórico a través del acceso a los vínculos conceptuales. Así, la enseñanza del PA no es sólo una técnica operativa, sino una oportunidad para desarrollar un concepto como herramienta cognitiva, desarrollada a partir de necesidades humanas. Algunos de los enlaces internos del concepto de PA son comunes a los de otros conceptos algebraicos, como fluencia, magnitud, variable, campo de variación e interdependencia, pero podemos añadir enlaces propios, como orden (posición), cuyo campo de variación es el conjunto de los números naturales, y la existencia de una variación constante (diferencia) entre los términos de la sucesión.

PALABRAS CLAVE: Pensamiento teórico; Enseñanza de Matemáticas; Escuela secundaria; Progresión aritmética.

* * *

Introdução

De acordo com Vygotsky (1988, p. 115), "uma correta organização da aprendizagem da criança conduz ao desenvolvimento mental". Baseado nesta premissa, buscou-se descrever, neste artigo, aspectos importantes sobre o movimento lógico-histórico do conceito de Progressão Aritmética (PA), conteúdo previsto para ser ensinado na unidade de Números e Álgebra, no Ensino Médio, de acordo com a Base Nacional Comum Curricular -BNCC (Brasil, 2018). É um conceito aparentemente simples, uma sequência numérica em que a diferença entre um termo e o seu antecessor é constante, mas que possui nexos internos, que o vinculam a muitos outros conceitos no campo da álgebra, construídos no seu desenvolvimento lógico-histórico.

Entende-se que uma organização do processo de ensino-aprendizagem deste conteúdo matemático, a partir da história do seu desenvolvimento e da história do seu conhecimento, pode contribuir positivamente para que os alunos se apropriem dos seus nexos conceituais, internos e externos, de forma a desenvolver neles o pensamento teórico e a levá-los a uma formação que abranja as dimensões cognitiva, emocional e psíquica.

O processo de ensino-aprendizagem de um conceito matemático, no caso, o de PA, organizado em conformidade com esta perspectiva, supera o modelo de ensino proposto pela didática tradicional (Davydov, 1982). Essa didática fomenta um ensino de Matemática baseado em cópias, listas de exercícios, na memorização de procedimentos para a resolução de exercícios, tomando os

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

conceitos como se fossem caixinhas separadas. Nesse modelo, o professor organiza e planeja o processo de ensino-aprendizagem de um conceito científico em quatro momentos: 1) definição do conceito; 2) apresentação do funcionamento do conceito; 3) treinamento do conceito por meio de listas de exercícios; e 4) avaliação para verificar se o aluno memorizou o conteúdo. Assim, é grande a possibilidade de o aluno entender que o conceito não tem história, surgiu de forma instantânea, pronto e acabado, isolado e fragmentado, não fazendo nenhum sentido para a sua vida além dos muros da escola.

Priorizam-se os nexos externos[3], deixando em segundo plano os nexos internos dos conceitos, que são os aspectos essenciais a serem explorados no processo de internalização de um conhecimento. Além disso, de acordo com Sousa (2018), na sala de aula, os nexos externos são apresentados "completamente desconectados das diversas áreas do conhecimento a partir do aspecto simbólico. É como se os símbolos tivessem vida própria; falassem por si só" (Sousa, 2018, p. 42) e não fossem gerados a partir de um contexto histórico, social e cultural.

Neste sentido, Lima *et al.* (2001), ao analisarem 12 (doze) coleções de livros didáticos de Matemática mais utilizados no Ensino Médio, apontam que elas, ao apresentarem os conceitos, dentre eles o de PA, privilegiam a manipulação de fórmulas e a memorização, sendo que o próprio conceito é pouco explorado, no sentido de possibilitar ao aluno pensar com ele, em situações com as quais ele se depara e precise desse conceito para resolvê-las. Como afirmam Bacaro e Sforni (2021), é necessário colocar o aluno para pensar com o conceito, assim ele tem a oportunidade de internalizá-lo. O aluno tem a possibilidade de desenvolver o pensamento teórico, ao pensar no/com conceito com suas diferentes formas de ser expresso, com suas relações com as diversas áreas do conhecimento e como conhecimento de uma realidade em movimento.

[3] O nexo conceitual, segundo Sousa, Panossian e Cedro (2014, p. 96), é o "elo entre as formas de pensar o conceito, que não coincidem, necessariamente, com as diferentes linguagens do conceito". Os nexos externos estão relacionados aos elementos perceptíveis, formais, às representações do objeto. Enquanto, os nexos internos dizem respeito àquilo que está na essência do conceito. Desse modo, contém o movimento lógico-histórico.

Para o desenvolvimento do pensamento teórico, uma possibilidade é organizar o processo de ensino-aprendizagem dos conceitos científicos, levando em consideração o movimento lógico-histórico da elaboração desses conceitos ao longo da experiência humana. Consoante com Kopnin (1978), é possível entender com o *histórico* de um conceito científico, o seu processo de mudanças, isto é, suas etapas de surgimento e de desenvolvimento, e, o *lógico*, a forma pela qual o pensamento realiza esta tarefa no processo de reflexão sobre o histórico, de forma que o lógico reflita os principais períodos da história do objeto (Sousa, 2018). As ações mentais que são desencadeadas para que o conceito seja sintetizado nos principais períodos da história. O movimento lógico-histórico do conceito estende-se desde a sua origem até a atualidade, uma vez que ele é adaptado às necessidades contemporâneas da humanidade.

Um conceito científico não surge do nada. Ao longo da experiência humana, ele vai se aprimorando em conformidade com a realidade objetiva, que, de acordo com Caraça (1951), apresenta duas características essenciais: a interdependência e a fluência. Por *interdependência*, é possível entender que a realidade é uma realidade viva, compondo o uno, com suas várias partes, que estão relacionadas entre si e com o todo. Já, a *fluência* representa o movimento que todas as partes e o todo realizam, em um permanente estado de mudanças e evolução. Segundo Heráclito de Éfeso, tudo se transforma, tudo flui, tudo devém. Davydov (1982) assegura que, quando se capta, nessa realidade, os nexos de um conceito científico, está-se diante de um pensamento teórico.

No contexto do que foi exposto, uma pergunta surge: qual o movimento lógico-histórico do conceito científico de Progressão Aritmética que pode ser utilizado como um instrumento didático no Ensino Médio? Quais são os seus nexos conceituais?

Essa é a questão que conduziu a investigação que deu origem a este artigo, que foi desenvolvido por meio de uma pesquisa bibliográfica, de cunho qualitativa. Esse tipo de pesquisa tem por finalidade aprimorar e atualizar o conhecimento a respeito de um determinado objeto, por meio de uma investigação científica de obras já publicadas. Para Minayo (2009), a

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

abordagem qualitativa, na área da Educação, é utilizada em pesquisas, que têm como objetivo principal elucidar a lógica que permeia a prática social que efetivamente ocorre na realidade, “[...] pois o ser humano se distingue não só por agir, mas por pensar sobre o que faz e por interpretar suas ações dentro e a partir da realidade vivida e partilhada com seus semelhantes” (Minayo, 2009, p. 21). Assim, possibilita ao pesquisador compreender os diversos aspectos da realidade, ensejando a apropriação da dinâmica interna de processos e atividades.

A pesquisa bibliográfica pode ser realizada tomando como fonte de investigação obras publicadas sobre a teoria, que irá direcionar o trabalho científico. Para Severino (2007, p. 122), esse tipo de pesquisa realiza-se pelo:

> [...] registro disponível, decorrente de pesquisas anteriores, em documentos impressos, como livros, artigos, teses etc. Utilizam-se dados de categorias teóricas já trabalhadas por outros pesquisadores e devidamente registrados. Os textos tornam-se fontes dos temas a serem pesquisados. O pesquisador trabalha a partir de contribuições dos autores dos estudos analíticos constantes dos textos.

Assim, neste artigo, inicialmente, foram apresentados os pressupostos teóricos do que vem a ser o movimento lógico-histórico, enquanto dimensão do pensamento. E, em seguida, o movimento lógico-histórico da Progressão Aritmética. Para finalizar, foram expostas as considerações finais.

O movimento lógico-histórico enquanto dimensão do pensamento

Para o sujeito compreender a essência de um determinado objeto ou fenômeno estudado, como afirma Radford (2011), é importante organizar o processo de ensino-aprendizagem, fazendo um elo entre “o desenvolvimento conceitual moderno e o histórico” (p. 74). Neste sentido, entende-se que, ao realizar a ligação entre a forma moderna do conceito e a sua evolução histórica, permite-se ao sujeito compreender as necessidades que motivaram o seu surgimento, a sua elaboração e sistematização e, também, quais as suas implicações e relações com outros conhecimentos produzidos pela humanidade. A compreensão desses aspectos permite ao sujeito enxergar, como premissa do conhecimento científico, a evolução, a mudança, o movimento, a fluência e a relação entre as várias áreas do conhecimento científico. Aprender o conhecimento, com base nesses pressupostos, permite ao aluno entender a ciência como algo em movimento, em um constante processo de atualização, na busca em atender às necessidades contemporâneas da humanidade, sejam elas práticas, intelectuais ou emocionais.

O desenvolvimento humano passa pelo aprendizado de novos conhecimentos, sejam eles assimilados por meio do estudo dos conceitos científicos elaborados e sistematizados pela humanidade ou pelos conceitos cotidianos adquiridos nas experiências sociais. Na escola, espera-se que os alunos se apropriem dos conceitos científicos e que esses, ao serem internalizados pelos discentes, sejam a fonte que impulsiona o seu desenvolvimento intelectual, emocional e psíquico.

Dentre as várias formas e métodos que a didática pode oferecer, enquanto perspectiva para um melhor aprendizado dos conceitos científicos, compreende-se que a perspectiva lógico-histórico é uma possibilidade viável e consistente pela quantidade de produções que nela se fundamentam. Essa perspectiva valoriza o aprendizado a partir dos aspectos essenciais dos conceitos, indo além da formalidade, da aparência, colocando ênfase nos seus nexos internos. Esses aspectos foram/são elaborados em momentos singulares da história do conceito, caracterizados por mudanças na forma de pensar e expressá-lo. Entendê-los significa colocar em movimento o pensamento. O histórico está associado à experiência humana, ao externo; enquanto o lógico associa-se ao interno, ao particular, às formas de pensamentos, às linguagens e à formação do conceito.

Kopnin (1978) e Davydov (1982) apontam que a formação de um conceito científico está impregnada de aspectos culturais, históricos e sociais que influenciaram sua sistematização. Dessa forma, entende-se que, para o aluno se apropriar do conhecimento, o professor deve organizar os elementos mediadores, que se colocam o objeto e o aprendiz, planejando o processo de ensino-aprendizagem do conceito, considerando esses aspectos. Isso significa que o planejamento deve ter como base o movimento lógico-histórico do conceito, fazendo a ponte entre o desenvolvimento conceitual atual e o de outros momentos, como recomenda Radford (2011).

Ao se considerar que o lógico diz respeito à reprodução do histórico no pensamento, é possível concordar com Saito e Dias (2013, p. 93), quando afirmam que "tal reprodução não significa que o pensamento deva copiar os passos da história, pois a reprodução no pensamento é formação, reconstrução e elaboração. O lógico do histórico refere-se à lógica dialética, mais ampla que a lógica formal". Assim, é importante o aluno conhecer o caminho percorrido pelo conceito científico até chegar à sua forma mais atualizada. É fundamental o aluno perceber que o conceito científico sempre esteve inserido em uma realidade complexa e dinâmica, ou seja, o conhecimento está relacionado com outras áreas e não está pronto, acabado, já que ele continua em um processo de mudanças, na busca de atender às necessidades de cada período histórico da humanidade, contemporaneamente com as do século XXI.

Organizar o processo de ensino-aprendizagem de um conceito científico, a partir do seu movimento lógico-histórico, significa compreendê-lo em suas relações e suas mudanças ao longo da história de sua construção e evolução.

É preciso possibilitar ao aluno colocar seus pensamentos em movimento, de modo que ele consiga entender as necessidades que levaram à elaboração de um conceito, quais foram as mudanças ocorridas tanto na forma de pensar o conceito, quanto no modo de expressá-lo. Ao realizar esse processo, o aluno passa a entender o conceito como resultado de uma atividade da experiência humana e a compreender seus nexos internos. Isso possibilita que o aluno elabore uma imagem do conceito em sua mente, que será transformada em um novo conhecimento para si e que lhe pode provocar o desenvolvimento nas dimensões cognitiva, emocional e psíquica.

Davydov (1982, p. 296) define o pensamento como "uma atividade espiritual muito complexa", pois é um processo particular do sujeito, que busca abstrair aspectos essenciais do objeto e generalizá-los, de forma a conceituá-lo. Embora não seja possível "ver" o pensamento de um aluno, pode-se identificar indícios de desenvolvimento do seu pensamento teórico. Ainda, segundo o autor, quando o aluno capta os nexos internos de um conceito científico, está diante de um pensamento teórico. Os nexos internos, de acordo com Davydov (1982), são as relações de interdependência que o conceito científico apresenta em uma realidade integrada e em constante movimento. O conteúdo do pensamento teórico são os reflexos dos resultados do conhecimento apropriado ao estudar os conceitos científicos. A principal função do conteúdo do pensamento teórico é esclarecer os aspectos essenciais do conceito científico e generalizá-los.

Nesse sentido, é importante estudar o conceito de PA tomando como referências momentos singulares de sua história, que contribuíram para a sua evolução e aprimoramento, mas, também, se atentar para os ruídos que, por um motivo ou outro, influenciaram na formação e na lógica de sua evolução.

O conceito de PA está inserido numa área maior da Matemática, a Álgebra, sendo um caso particular do conceito de sequências, portanto, o seu movimento lógico-histórico está dentro desse contexto.

Alguns aspectos do movimento lógico-histórico da Progressão Aritmética

Na produção do conhecimento científico acerca dos fenômenos da natureza, o homem busca, por meio de observações, encontrar neles algum tipo de padrão, regularidades, que lhe possibilite formular leis e realizar previsões, que possam lhe trazer uma forma de controlá-los. A regularidade está associada ao ato de repetir, ao conceito de movimento, à ideia de fluência e, em muitos casos, envolve relações entre duas grandezas (posição e elemento). Este é um conceito matemático que denominamos "sequência", e, que de acordo com o dicionário Aurélio, significa "ação de seguir, de dar seguimento, continuação; série" ou "prosseguimento que se dá ao que já foi iniciado; continuidade". No ensino, esse conceito está inserido no âmbito da álgebra.

De acordo com Eves (1997), a palavra álgebra tem origem no árabe, sua gênese está no termo *al-jabr* (significa reunião). Segundo esse autor, a Álgebra é uma ferramenta matemática que permite fazer abstrações e generalizações, aspectos fundamentais para o desenvolvimento do pensamento teórico. Concebendo-a de um modo mais amplo, não apenas como ferramenta ou linguagem, dentro desse ramo da Matemática, pode-se tratar de conceitos importantes como os de *variáve*l e *incógnita,* e além desses, também o de *campo de variação*, de *interdependência* e *de fluência.* Esses conceitos são as bases que possibilitam a compreensão dos vários objetos algébricos estudados no Ensino Médio, dentre eles o conceito de PA.

Ter consciência da história e da lógica da criação e da sistematização dos conceitos algébricos traz revelações sobre sua gênese, sobre os caminhos por eles percorridos até chegar aos dias atuais. Esses são aspectos importantes, que podem contribuir para que os alunos entendam a Matemática como uma ciência viva, em movimento e com verdades que podem ser mudadas, transformadas, conforme as necessidades da humanidade. O desenvolvimento da linguagem e do pensamento algébrico, ao longo da história, é resultado das necessidades vividas em vários momentos pelos sujeitos de um determinado contexto, histórico, social e cultural. Assim, pode-se afirmar que o desenvolvimento da PA, inserida no campo da Álgebra, é um produto da atividade humana, na perspectiva de Leontiev (1983), como algo consciente e intencional.

Na relação do homem com a natureza, a busca por encontrar meios que lhe possibilitem dominar a realidade a sua volta com a finalidade de satisfazer suas necessidades, motiva-o na construção de ferramentas físicas e abstratas que lhe permitam transformar a realidade, conforme seus objetivos e, esse é um processo dialético, pois ele também se transforma. Conhecimento e desenvolvimento são um par dialético, pois, ao obter conhecimento, o sujeito desenvolve e, ao desenvolver, ele busca novos conhecimentos.

As sequências não surgiram como um campo específico da Matemática. Inicialmente, eram elaboradas em atendimento a outras necessidades das atividades humanas, sejam de ordem prática ou intelectual. O conceito de sequências foi forjado à medida que os conteúdos matemáticos foram sendo sistematizados e classificados em campos específicos. É possível constatar que, nesse movimento, estão presentes os nexos internos da álgebra, mesmo não existindo uma linguagem que conseguisse expressar as generalidades percebidas.

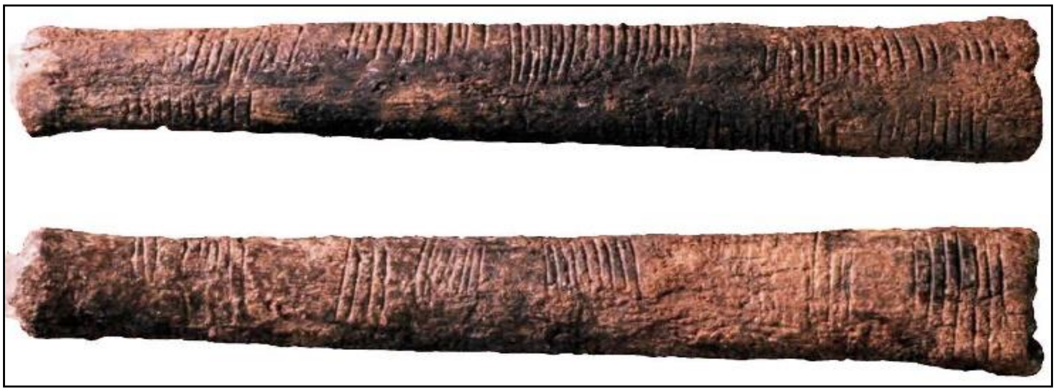
De início, podemos pensar na expressão “Progressão Aritmética”, um tipo especial de sequências, como uma ação de avançar ou seguir em frente, num processo de somas ou subtrações sucessivas, de forma a construir uma sequência numérica. Essa poderia, perfeitamente, ser uma ideia elaborada por qualquer pessoa que saiba o significado das palavras “Progredir” e “Aritmética”, mas também pode nos dar a ideia de contar, a partir de conjuntos que tenham a mesma quantidade de elementos. É bem provável que foi assim que os povos antigos começaram a desenvolver o pensamento em torno de algo que hoje conhecemos como Progressão Aritmética.

Há milhares de anos, o homem primitivo já sentia a necessidade de contar, de sistematizar os conceitos de grandeza, forma e número. Foram encontrados em pedras, tábuas de barro e ossos, vestígios de formas de contar que os povos primitivos utilizavam em uma época em que a escrita ainda era rudimentar. Essas primeiras formas de contar eram construídas por meio de uma *correspondência biunívoca*[4] entre o conjunto de elementos a serem contados e o conjunto de marcas feitas num pedaço de madeira, ou em uma tábua de barro, ou até usando os dedos das mãos e dos pés. Nesse período, não existiam palavras e nem símbolos (algarismos) para representar as quantidades de objetos de uma coletânea ou conjunto de elementos (Eves, 1997), já que existiam apenas objetos materiais, concretos. A correspondência biunívoca, uma ideia matemática importante, já estava presente, mas faltava uma linguagem que permitisse ir além, mas que, também, não era necessária naquele momento histórico e cultural.

[4] Também chamada de correspondência um a um.

Na Figura 1, estão representados dois ossos em que foram realizadas algumas ranhuras, que correspondiam a certas quantidades, que continham a ideia de sequência e a importante ideia de correspondência.

FIGURA 1: Duas vistas do osso Ishango, com mais de 8000 anos de idade, encontrado em Ishango, às margens do lago Edward, no Zaire, mostrando números preservados por meio de entalhes no osso.



Fonte: Eves (1997, p. 26)

A forma de representar números, mostrada na Figura 1, mostra que o pensamento e a linguagem têm, de fato, uma relação intrínseca, pois formas de representação mais simples e completas contribuem para que o pensamento ganhe em abstração e generalização.

A partir dos símbolos hindu-arábicos, do sistema de numeração decimal, da criação de um número para representar a casa vazia (o zero), os números naturais ganharam um nível de generalização maior. O que permitiu a representação de números de qualquer grandeza com um pequeno número de símbolos, apenas 10. O conjunto dos números naturais, fundamentais para o processo de contar, trazem, em seus nexos internos, o conceito de correspondência biunívoca, que é uma relação entre conjuntos que são equipotentes, isto é, que têm a mesma quantidade de elementos, independentemente da natureza dos elementos que os compõem. Além disso, no conjunto dos números naturais, cada símbolo está associado a uma ordem na sequência formada por eles. Cabe considerar que, a partir das necessidades surgidas ao longo da história da humanidade, os números naturais, uma progressão aritmética, foram a base para a expansão dos conjuntos numéricos, até chegar ao que denominamos conjunto dos números reais. Nesse processo de desenvolvimento dos conjuntos numéricos, dos naturais ao conjunto dos números reais, estão imbricados os conceitos de movimento e de infinito, que são conceitos importantes no contexto da Matemática, de modo específico, no de Progressão Aritmética, objeto deste artigo.

Nesse processo, ao longo da experiência humana, o estudo da regularidade dos fenômenos contribuiu para o desenvolvimento das ciências, dentre elas, o da Matemática, num movimento de abstração, generalização e criação de leis. Essa área do conhecimento científico é uma das principais responsáveis pelo avanço tecnológico, econômico, cultural e político de que hoje a sociedade pode desfrutar. Um dos benefícios de ter o conhecimento matemático é que este permite ao homem o desenvolvimento de modelos em diversas áreas (Economia, Automação, Saúde, Meio Ambiente, entre outras), que estabelecem leis, que são sínteses de movimento de ascensão do abstrato ao concreto.

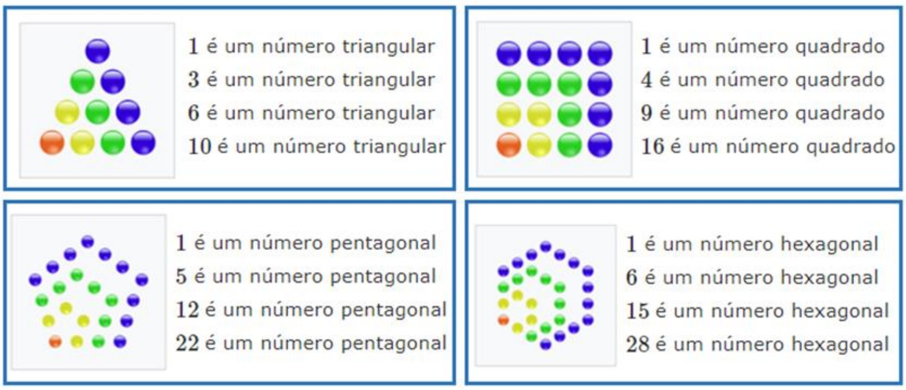
De acordo com historiadores do campo da Matemática, como Eves (1997) e Boyer (1996), a busca do homem por fenômenos, que apresentam algum tipo de regularidade, vem desde os babilônicos e os egípcios, passando pelos orientais, pelos europeus e por outras culturas. Nesse sentido, a linguagem, o pensamento algébrico e a criação dos símbolos, ao mesmo tempo que se desenvolviam, possibilitavam um melhor entendimento e representação dos modelos sequenciais.

No Egito antigo (por volta de 3000 a.C. a 300 a.C.), a busca por compreender os períodos de enchentes provocadas pelo rio Nilo e de seca, quando suas águas baixavam, era muito importante para a sobrevivência de seu povo, pois, conhecer o padrão em que essas estações ocorriam era fundamental para a produção de grãos, a base da sua alimentação. Dessa forma, conhecer esse movimento regular constituído pela enchente e pela seca nas terras férteis, às margens do Nilo, visava garantir um momento adequado para o plantio, ter uma previsão para a colheita e o quanto se podia esperar para a produção final. A partir desses estudos, os egípcios criaram o calendário solar, sendo um ano composto de 12 meses e cada mês de 30 dias. Além desses 360 dias, o ano ainda contava com mais 5 dias de festa, perfazendo um ano de 365 dias (Boyer, 1996). Percebe-se que, por meio da observação dos fenômenos regulares, os egípcios conseguiram, mesmo naquela época, elaborar um calendário anual, bem próximo do que se tem hoje. Os meses do ano formavam uma *sequência*, na qual cada mês correspondia a uma posição no calendário.

No papiro Rhind, encontrado no Egito, também há exercícios, que hoje poderiam ser resolvidos usando os conceitos de equações lineares e de Progressão Aritmética. Nesse papiro, encontra-se, por exemplo, o seguinte problema: “Divida 100 pães entre 5 homens de modo que as partes recebidas estejam em progressão aritmética e que um sétimo da soma das três partes maiores seja igual à soma das duas menores.” (Cajori, 2007, p. 40).

Por volta do século VI a.C., na Grécia, os pitagóricos já conheciam e desenvolviam estudos sobre sequências, utilizando, principalmente, a Geometria e a Aritmética (Eves, 1997). O tópico mais conhecido desses estudos é o que se refere aos números figurados, nos quais se constrói uma sequência de figuras geométricas planas, sendo que cada uma delas é formada por uma certa quantidade de pontos. São exemplos de sequências de números figurados, as triangulares, as quadrangulares e as pentagonais. Na Figura 2, são exibidos alguns números desse tipo.

FIGURA 2: Exemplos de números figurados

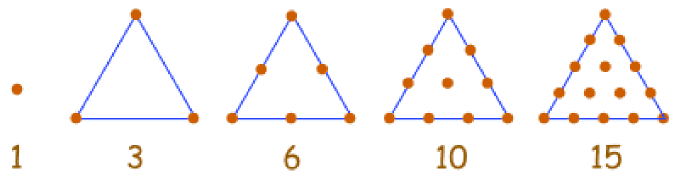


Fonte: Imagens extraídas da Wikipédia.

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

Com esses arranjos, é possível trabalhar a relação entre grandezas, fazer recorrências, desenvolver abstrações e generalizações. Por exemplo, tomando os números triangulares, é possível observar características importantes sobre esses números a partir das figuras. Começa-se com um ponto. Na segunda figura, são acrescentados dois pontos, na terceira, três pontos, na quarta, quatro pontos, e, assim, sucessivamente, formando uma sequência (Figura 3).

Figura 3: sequência de número triangulares



Fonte: Imagens extraídas da Wikipédia.

T1 = 1

T2 = 1 + 2 = 3

T3 = 3 + 3 = 6

T4 = 6 + 4 = 10

T5 = 10+ 5 = 15

.

.Tn = T(n - 1)+ n

Dessa forma, pode-se observar que o número de pontos que compõe uma determinada figura está relacionado com a posição que a figura ocupa na sequência formada por elas. Temos aqui uma relação entre duas grandezas, a posição de cada figura, representada por um número natural, e a outra, representada pelas quantidades dos pontos de cada figura. Assim, podendo ser representada por meio de uma tabela:

TABELA 1: Relação entre posição e número de pontos de cada figura

Posição (n)	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	....	*N*
Número de pontos de cada figura	*1*	*1+2 = 3*	*3 +3=6*	*6 +4=10*	*10 + 5 =15*	....	$T_{(n-1)} + n$

Fonte: elaborada pelo autor (2024).

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

Ao analisar como foi obtida a quantidade de pontos de cada figura, é perceptível que basta somar o número correspondente à posição da próxima figura à quantidade de pontos da figura imediatamente anterior a ela. Esse é um processo de recorrência, pois é preciso recorrer ao termo anterior para obter o próximo termo da sequência. Ao perceber essa relação, o sujeito já começa o processo de abstração e de generalização, que precisa ir além dos aspectos externos, empíricos. Porém, a linguagem simbólica com a qual se pode contar, hoje, para estabelecer uma lei geral, como a que está na última célula da Tabela 1, não existia naquela época. A ideia de sequência está presente nestas representações, ainda que não sejam progressões aritméticas.

Os pitagóricos também tinham uma grande admiração pelo universo. Eles acreditavam que era possível compreender o Universo por meio das relações entre números, isto é, de leis matemáticas (Caraça, 1951). Para os pitagóricos, todas as coisas no Universo poderiam ser expressas por meio de um número racional, ou seja, poderiam ser escritas como uma fração de termos inteiros. Porém, eles ainda não conheciam os números irracionais. Esse fato tornou-se um problema para eles, pois, ao tentar representar a diagonal de um quadrado pela razão entre dois números inteiros, depararam-se com um objeto que era impossível de ser escrito em forma de fração. Embora essa negação tenha sido a causa do fracasso dos pitagóricos, ela se transformou em uma nova negação, que acabou por motivar a busca pela ampliação dos números, o que foi importante para continuidade dos estudos no campo da Matemática. Estes estudos, mais tarde, contribuíram para a elaboração dos conceitos de função e de infinito (Caraça, 1951). Tratava-se de uma negação, cuja negação criaria algo novo. Esse é o movimento dialético do conhecimento. Tanto o conceito de função, quanto o de infinito, guardam uma relação interna com o campo das sequências.

É possível também encontrar na obra *Os Elementos*, de Euclides de Alexandria (século III a.C.), problemas referentes ao conceito de Progressão Aritmética, como, por exemplo, “Se a^2, b^2, c^2 estão em Progressão Aritmética, então $b + c$, $c + a$, $a + b$ estão em progressão harmônica”.

Continuando a história das sequências, outras civilizações, como os hindus e os chineses, também deram contribuições. Os chineses trazem no livro *Nove Capítulos sobre a Arte da Matemática*, dentre os seus 246 problemas que tratam de equações, agrimensura, engenharia e outras áreas, alguns que podem ser resolvidos utilizando-se o conceito de sequências (Eves, 1997). Já os hindus, foram os responsáveis pelos símbolos que, hoje, são denominamos por hindu-arábicos e que compõem o nosso sistema de numeração decimal. Esse conjunto numérico, naturalmente, forma uma sequência e, a partir dela, é possível construir infinitas outras sequências.

Já no século III d.C., viveu outro importante estudioso grego na história da Matemática e da Álgebra, trata-se de Diofanto de Alexandria. Ele foi fundamental para a construção da álgebra simbólica e sua divulgação pelo continente europeu. Sua obra é composta por três trabalhos, sendo o mais importante a *Aritmética*, composto por treze volumes. Diofanto é considerado por muitos como um gênio da Matemática. No seu livro, a *Aritmética,* encontram-se problemas que são atraentes e fascinantes pela forma como foram elaborados. Um detalhe importante é o de que, para ele, número significa número racional positivo.

Outro importante matemático que contribuiu para o desenvolvimento da Aritmética e, consequentemente, da Progressão Aritmética, foi Leonardo de Pisa, mais conhecido como Fibonacci, mencionado no tópico anterior. Seu livro *Liber Abacci*, cuja segunda edição foi lançada em 1228, na Europa, contendo grande quantidade de problemas relacionados à Aritmética e à Álgebra, exerceu forte influência no velho continente e foi por meio desse livro que os algarismos hindus se tornaram conhecidos naquele continente.

Dentre as sequências famosas, existe uma que desperta a curiosidade de muitos, conhecida como sequência de Fibonacci, (1, 1, 2, 3, 5, 8, ...), em que cada termo da sequência a partir do terceiro é a soma dos dois imediatamente anteriores. Esta sequência é aplicada em muitas situações-problemas da realidade objetiva.

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

Os hindus eram hábeis aritméticos e foram importantes para a consolidação da Aritmética e da Álgebra. Eles deram contribuições significativas à Álgebra, somando Progressões Aritméticas e Geométricas rapidamente. Bhaskara, que viveu de 1114 até cerca de 1185, é considerado o último matemático medieval importante da Índia. Sua obra mais conhecida é o *Lilavati,* que era o nome de sua filha. Nesta obra, podem ser encontrados determinados problemas que tratam do conceito de Progressão Aritmética.

Na Alemanha, no final do século XV, nasceu Michael Stifel (1486 - 1567), considerado o mais importante algebrista alemão do século XVI. Seu trabalho mais famoso é *Arithmetica Integra* (*Aritmética Renovada*), que foi publicado em 1544. De acordo com Eves (1997), essa obra de Stifel está dividida:

> [...] em 3 partes dedicadas, respectivamente, aos números racionais, números irracionais e álgebra. Na primeira parte do livro, Stifel ressalta as vantagens de se associar uma progressão aritmética a uma geométrica, prenunciando assim, de quase um século, a invenção dos logaritmos (Eves, 1997, p. 301).

Stifel observou que os termos de uma progressão geométrica (de razão r) (r^0, r^1, r^2, r^3, ...) correspondiam aos termos de uma progressão aritmética (de razão 1) (0, 1, 2, 3 ...), formada pelos expoentes, de modo que a multiplicação de dois termos da progressão geométrica, resultava em um termo cujo expoente representava a soma dos dois números correspondentes na progressão aritmética, por exemplo, $r^1 \times r^2 = r^{(1+2)} = r^3$. A partir das suas pesquisas sobre Aritmética e Álgebra, ele formulou os logaritmos, independentemente de Napier, usando aproximações totalmente diferentes das que foram utilizadas por este último.

Alguns anos mais tarde, Napier realizou estudos sobre os logaritmos, em que ele demonstra a correspondência entre Progressão Aritmética e Progressão Geométrica. Este trabalho foi importante, pois possibilitou a elaboração e sistematização dos logaritmos. O grande avanço ocorrido com a invenção dos logaritmos foi que estes foram uma ferramenta que facilitava, numa época que não tinha computadores e nem calculadoras, as operações de multiplicação e divisão, que são reduzidas à adição e à subtração.

Nos séculos XVII, XVIII e XIX, o francês Abraham De Moivre (1667-1754) e o alemão Johann Friederich Carl Gauss (1777-1855) deram suas contribuições significativas para o campo da Álgebra. De acordo com Eves (1997, p. 467), "Moivre ganhava a vida na Inglaterra como professor particular e tornou-se amigo íntimo de Isaac Newton". Existe uma lenda a respeito de Moivre que envolve Progressão Aritmética:

> [...] segundo ela, De Moivre teria revelado, certa ocasião, que daí para a frente teria que dormir, em cada dia, 15 minutos mais do que no dia precedente. E quando essa progressão aritmética atingiu 24 horas ele de fato teria morrido (Eves, 1997, p. 368).

Já Gauss, desde muito novo, demonstrou ser um brilhante matemático. De acordo com diversos estudos, Gauss, com três anos de idade, detectou um erro aritmético no rascunho de seu pai. Segundo os historiadores, durante uma aula de Matemática, a classe estava conversando, então o professor resolveu passar à classe, para mantê-la ocupada, a tarefa de somar os números de 1 a 100. Poucos minutos depois de o professor passar o exercício, Gauss colocou sobre a mesa do professor a resposta, que é 5050, mas sem fazê-la se acompanhar de nenhum cálculo. Segundo Eves (1997, p. 519),

> [...] havia mentalmente calculado a soma da progressão aritmética: 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100, observando que: 100 + 1 = 101, 99 + 2 = 101, 98 + 3 = 101, e assim por diante com os 50 pares possíveis dessa maneira, sendo a soma, portanto: 50 x 101 = 5050.

http://doi.org/10.14393/ER-v32e2025-08

Assim, foi possível apresentar alguns momentos significativos do movimento do conhecimento sequência/algébrico, notadamente, da Progressão Aritmética, com o propósito de apreensão da essência desse conhecimento, que é lógica e é histórica.

Ao estudar o movimento lógico-histórico da PA, é preciso considerar aspectos importantes do movimento lógico-histórico da Função Afim[5], pois o desenvolvimento desses dois conceitos está intimamente ligado ao longo da experiência humana. A criação de um contribuiu com o desenvolvimento do outro, numa relação dialética. A separação da Matemática em tópicos específicos é recente, de modo que ela era dividida apenas em três grandes áreas: Aritmética, Geometria e Álgebra.

Dos momentos singulares da história do desenvolvimento da função afim, ressaltam-se como relevantes para a construção desse conceito, as contribuições de Galileu Galilei[6] (1564 -1642) sobre o estudo de gráficos, em busca de representar uma grandeza em função de outra. Isaac Newton[7] (1643 - 1727), que, ao estudar curvas que representavam movimentos e fenômenos mecânicos, utilizava a expressão "fluentes" para explicar os conceitos de função, dando uma importante contribuição para a evolução desse conceito. Outros que contribuíram de forma significativa para o desenvolvimento do conceito de função foram Leibniz[8] (1646 - 1716), Jean Bernoulli[9] (1667 - 1748) e Leonard Euler[10] (1707 - 1783). O termo "função" foi adotado pela primeira vez em 1673, por Leibniz (1646-1716), para indicar quantidades que variavam ao longo da curva, como, por exemplo, a tangente. Já no século XVIII, Bernoulli e Euler refinaram o conceito de função, representando-o por uma expressão algébrica.

É interessante estudar o conceito de PA, após os alunos estarem familiarizados com o conceito de função afim, uma vez que se

[5] Uma função $f: R \Rightarrow R$ é chamada de função afim quando existem números reais a e b tais que, $f(x) = ax + b$, para todo x pertencente ao R. (Sociedade Brasileira de Matemática - SBM).
[6] Astrônomo, foi o pioneiro ao defender que a Terra não era o centro do universo.
[7] Cientista, químico, físico, mecânico e matemático que descobriu várias leis da física, entre elas, a lei da gravidade.
[8] Gottfried Wilhelm Von Leibniz, matemático e filósofo alemão, "pai da função".
[9] Matemático suíço que contribuiu para o desenvolvimento do cálculo diferencial e integral.
[10] Foi o matemático que desenvolveu mais trabalhos da história.

compreende o primeiro como um caso particular do segundo conceito. Neste sentido, os Parâmetros Curriculares Nacionais de Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias para o Ensino Médio (Brasil, 2008) apontam que “com relação às sequências, é preciso garantir uma abordagem conectada à ideia de função, na qual as relações com diferentes funções possam ser analisadas” (Brasil, 2008, p. 122). É importante que os alunos possam relacionar os nexos internos e externos desses dois conceitos.

A PA é uma função afim cujo domínio são os números naturais. Assim, esta é uma restrição da função afim. Lima (2001) afirma que

> sequências são funções cujo domínio é o conjunto dos números naturais (sequência infinita) ou o conjunto dos n primeiros números naturais (sequência finita, com n elementos) (Lima, 2001, p. 46).

Nesse sentido, associar PA ao seu gráfico, um conjunto de pontos alinhados, mas não uma reta, permite ao aluno compreender o comportamento dessa sequência sem precisar, simplesmente, decorar informações, e também assimilar as suas representações algébricas. É fundamental ao aluno compreender o conceito de PA a partir dos conceitos de variável, campo de variação, relação entre duas grandezas, ordenação e movimento, que são, também, nexos internos desse conceito, embora sejam nexos de outros conceitos algébricos.

No contexto atual da humanidade, em que se tem um grande avanço tecnológico, um dos aspectos que mais contribuem para esse avanço foi a criação dos computadores, na década de 1940, o desenvolvimento das linguagens de programação de alto nível, a partir de 1960, e o surgimento da internet, na década de 1990. O desenvolvimento dessas tecnologias está diretamente ligado à Matemática. O pensamento computacional requer a noção de espaço, tempo e a compreensão de códigos e símbolos. A criação de máquinas envolve, por exemplo, a utilização de linguagens de programação, que, de acordo com Sebesta (2018), é um conjunto de símbolos e comandos para a criação de programas, o que possibilita a comunicação entre o ser humano e o computador.

O conceito e as técnicas de PA podem ser utilizados para desenvolver várias tecnologias necessárias para atender as demandas da sociedade atual, como o desenvolvimento de programas que possam criar máquinas que executem determinada tarefa em espaços de tempo iguais. Nesse sentido, ao ensinar o conceito de PA, é necessário proporcionar ao aluno atividades que o levem a pensar essas possibilidades da sua utilização, a partir da apropriação do conceito.

Considerações finais

O movimento lógico-histórico da PA, aqui tratado, tem aspectos que podem contribuir para o ensino da Matemática, que valoriza a apropriação dos conceitos científicos, materializados nos conteúdos escolares, buscando os seus nexos internos, tendo evidenciadas e fundamentadas as relações entre ensino, aprendizagem e desenvolvimento humano. Ao tratar de aspectos lógico-históricos do conceito de PA, foi possível perceber que esse conceito se insere numa rede, conectando-se a outros conceitos, com elos internos comuns, mas tendo alguma singularidade, que o caracteriza.

A pesquisa bibliográfica realizada aponta que o movimento lógico-histórico de PA, enquanto perspectiva didática, pode contribuir para que o professor organize o ensino, focando a aprendizagem conceitual. Essa organização possibilita aos alunos terem acesso aos nexos conceituais (internos e externos) de PA e desenvolverem ações mentais que contribuam para o desenvolvimento do pensamento teórico, envolvendo a abstração, a generalização e a formação de conceitos. *Grandeza*, *interdependência* (relação entre duas grandezas), *fluência* (movimento), *variável*, *campo de variação*, são nexos internos da PA, que, também, estão presentes em outros conceitos algébricos. Mas o desenvolvimento lógico-histórico abordado mostra que há nexos internos que caracterizam o conceito de PA, presentes desde a criação dos números naturais, um tipo especial de sequência. Podemos destacar a *posição* (ordem)*,* que assume valores num campo de variação discreto, e a existência de uma *diferença constante* entre um termo e o outro da sequência.

Outro ponto a sublinhar é que estudar o conceito de PA junto com o conceito de função afim é importante para que o aluno compreenda a relação entre esses dois conceitos, os nexos internos e externos que são comuns e os que caracterizam cada um dos dois conceitos, destacando a relação entre o singular e o geral. É uma excelente oportunidade para tratar uma função discreta e uma função contínua, neste nível de ensino.

As conclusões destacam a relevância de o professor, ao organizar o ensino, buscar conhecer o movimento lógico-histórico dos conceitos, identificar os nexos conceituais, internos e externos, para fazer propostas que permitam a apropriação dos conhecimentos produzidos pela humanidade e que contribuem para o desenvolvimento integral do aluno.

Referências

BACARO, B. L.; SFORNI, M. S. de F. Aprendizagem Conceitual e Desenvolvimento do Pensamento: Análise do Potencial Formativo do Ensino Proposto em um Livro Didático. *VIDYA*, v. 41, n. 2, p. 149-167, 2021.

BOYER, C. B. *História da matemática*. 2.ed. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda., 1996.

BRASIL. Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN +) Ensino Médio. *Ciências da Natureza, Matemática e suas tecnologias*. Brasília: MEC/SEF, 2008.

BRASIL. Ministério da Educação. *Base Nacional Comum Curricular*. Brasília: MEC, 2018.

CARAÇA, B. de J. *Conceitos fundamentais da matemática*. Tipografia Matemática: Lisboa, 1951.

CAJORI, F. *Uma História da Matemática*. Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna Ltda., 2007.

DAVYDOV, V. V. *Tipos de generalización en la enseñanza*. Ciudad de La Havana: Editorial Pueblo y Educación, 1982.

EVES, H. *Introdução à História da Matemática*. Trad. Hygino H. Domingues. 2. Ed. Campinas: Unicamp, 1997.

KOPNIN, P. V. *A dialética como lógica e teoria do conhecimento*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 1978.

LEONTIEV, A. N. Actividad, conciencia, personalidad. La Habana: Editorial Pueblo y Educación. (1983). Uma contribuição à teoria do desenvolvimento da psique infantil. In: VIGOTSKI, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, desenvolvimento e aprendizagem*. São Paulo: Ícone, 1992. p. 59-83.

LIMA, E. L. *et al*. *Exame de textos*: análise de livros de matemática para o Ensino Médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MINAYO, M. C. S. (org.). *Pesquisa social*: teoria, método e criatividade. Petrópolis: Vozes, 2009.

RADFORD, L. *Cognição matemática*: História, Antropologia e Epistemologia. São Paulo: Livraria da Física, 2011.

SAITO, F.; DIAS, M. da S. Interface entre história da matemática e ensino: uma atividade desenvolvida com base num documento do século XVI. *Ciência & Educação*, Bauru, v. 19, p. 89-111, 2013.

SEBESTA, R. W. *Conceitos de Linguagens de Programação-11*. Porto Alegre: Bookman Editora, 2018.

SEVERINO, A. J. *Metodologia do Trabalho Científico*. São Paulo: Cortez, 2007.

SOUSA, M. do C. O movimento lógico-histórico enquanto perspectiva didática para o ensino de matemática. *Obutchénie*: Revista de Didática e Psicologia Pedagógica, v. 2, n. 1, p. 40-68, 2018. DOI: https://doi.org/10.14393/OBv2n1a2018-3. 2018.

SOUSA, M. do C. de; PANOSSIAN, M. L.; CEDRO, W. L. *Do movimento lógico e histórico à organização do ensino*: o percurso dos conceitos algébricos. Campinas: Mercado das Letras, 2014.

VYGOTSKY, L. S. Aprendizagem e Desenvolvimento Intelectual na Idade Escolar. *In*: VYGOTSKY, L. S.; LURIA, A. R.; LEONTIEV, A. N. *Linguagem, Desenvolvimento e Aprendizagem*. São Paulo: Ícone/Editora da Universidade de São Paulo, 1998. p. 103-117.

Recebido em junho de 2024.

Aprovado em novembro de 2024.