

EQUAÇÕES DIOFANTINAS LINEARES: UM TEMA ARTICULADOR DE ESTRATÉGIAS NO ENSINO DE MATEMÁTICA ELEMENTAR¹

LINEAR DIOPHANTINE EQUATIONS: A THEME ARTICULATOR STRATEGIES IN TEACHING OF MATHEMATICS ELEMENTARY

Wagner Marcelo Pommer²

RESUMO: Esta pesquisa relata um estudo qualitativo que objetivou investigar como e em que medida alunos do ensino básico podem articular estratégias aritméticas e algébricas para aprimorar conhecimentos envolvendo as Equações Lineares. Nossas referências se situaram em Campbell e Zazkis (2002), que ponderam ser a Teoria dos Números um campo propício para explorar estratégias matemáticas fundamentais e desenvolver habilidades relacionadas a resolução de problemas. Nesta perspectiva, localizamos o tema articulador das Equações Diofantinas Lineares em uma proposta de reinvestimento de conceitos básicos da Teoria dos Números, em confluência com o aprimoramento e uso de estratégias algébricas. Na parte metodológica, aplicamos uma seqüência de atividades inspirada na Engenharia Didática, descrita em Artigue (1996), a um pequeno grupo de alunos de uma escola pública de São Paulo. A partir de estratégias informais, as manifestações verbais e por escrito dos alunos revelaram conhecimentos envolvendo as equações lineares, perpassando a evolução de estratégias aritméticas para o desenvolvimento de estratégias algébricas, o que pode se constituir em contribuição para o ramo da Educação Algébrica.

PALAVRAS-CHAVE: Equações Diofantinas Lineares. Engenharia Didática. Estratégias. Teoria dos Números. Matemática Discreta.

ABSTRACT: This paper reports a qualitative study that aimed to investigate how and in what extension basic education students can articulate arithmetic and algebraic strategies to improve knowledge involving linear equations. Our references were guided by Campbell and Zazkis (2002) that consider Number Theory a propitious field to explore fundamental mathematical strategies as well as to develop problem solving skills. In this position, we located Linear Diophantine Equations as an articulator theme in a reinvestment proposition of Number Theory basic concepts, in confluence with the improvement and use of algebraic strategies. In methodological assessment, we apply a sequence of activities inspired in Didactical Engineering, as described in Artigue (1996), on a small students group from a public school in Sao Paulo. From informal strategies, the oral and written student's results revealed knowledge involving linear equations, passing by arithmetic strategies evolution to algebraic strategies development, which may constitute a contribution to Algebraic Education field.

KEYWORDS: Linear Diophantine Equation. Didactical Engineer. Strategies. Number Theory. Discrete Mathematics.

¹ Este trabalho foi embasado na pesquisa de mestrado que desenvolvemos, intitulada 'Equações diofantinas lineares: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio'.

² Doutor em Educação. Professor da Universidade Nove de Julho. E-mail wmpommer@usp.br

Introdução ao problema de pesquisa

No meio educacional o ensino da Álgebra ainda se constitui em grande problemática. Apesar do intensivo trabalho didático com algoritmos em torno da Álgebra, os alunos do Ensino Fundamental e Médio ainda possuem dificuldades e restrições no uso da ferramenta algébrica para o encaminhamento das soluções frente a situações-problema.

Há várias pesquisas que destacam as dificuldades enfrentadas por alunos com o uso da linguagem algébrica e na compreensão do papel otimizador desta estratégia para o encaminhamento e soluções de diversos problemas matemáticos e em outras áreas científicas.

Com o intuito de apresentar uma possibilidade de enfrentamento desta problemática, destacamos neste texto uma investigação de mestrado realizada no Grupo de Pesquisa em Educação Algébrica (GPEA). Na ocasião, o GPEA desenvolveu estudos num projeto intitulado 'O que se entende por álgebra?', tendo fomentado pesquisas de cunho documental, diagnóstico e interventivo, analisando as interações entre os professores, os estudantes e os programas curriculares. A base temática situava a promoção da articulação de temas presentes na Teoria dos Números com a Álgebra, ramos que são subjacentes a quase todos os domínios da Matemática, conforme destacam Maranhão, Machado e Coelho (2005), permeando uma série de questões que possibilitam o manejo de conceitos de forma integrada.

As motivações para esta opção surgiram a partir das discussões emergentes no citado grupo e das relações constituídas ao relembrar algumas ocasiões do percurso profissional. Em uma ocasião, ao lecionar no Ensino Fundamental II, em uma instituição que elaborava o próprio material didático, no livro da antiga 7ª série (atual 8º ano), na introdução do capítulo dedicado as equações de 1º grau, havia uma série de situações-problema com variado número de soluções inteiras e envolvendo contextos acessíveis a alunos do Ensino Fundamental.

Estes problemas apresentados no referido livro didático representavam implicitamente Equações Diofantinas Lineares do tipo $ax + by = c$, com a , b , c e soluções inteiras, normalmente abordadas, num viés formal, no Ensino Superior. A abordagem sugerida no livro do professor remetia somente a exploração da estratégia da tentativa e erro e da organização dos resultados, numa sequenciação lógica que permitia expor os resultados na forma de uma tabela de dupla entrada, porém sem maiores explorações posteriores com relação ao potencial algébrico inerente as situações indicadas no manual escolar, algo que consideramos essencial para se estabelecer e aprimorar o pensamento algébrico.

Relatamos outra circunstância, desta vez situada no Ensino Superior, em uma disciplina do 1º semestre dos cursos de Ciências Sociais. Nesta, havia recomendação que se utilizasse contextos e aplicações dos temas característicos dos respectivos cursos, associando-os à Matemática. Em nossas pesquisas envolvendo tópicos de Economia, em diversos manuais escolares, livros e textos do ensino superior encontramos inúmeras situações e ilustrações de conceitos básicos presentes nesta área que estão em interface com o ensino da Matemática Elementar.

A análise do material revelou a existência de inúmeras relações envolvendo os conceitos fundamentais da área de Economia com a Matemática Elementar, mais particularmente, em situações cujo desenvolvimento envolvia soluções inteiras e implicitamente estavam associadas as equações diofantinas lineares.

O fato destas propícias relações não se encontrarem explicitadas nos diversos livros didáticos do ensino básico nos compeliram a fazer um levantamento das possíveis situações modeláveis que representam implicitamente o tema das Equações Diofantinas Lineares. Deste levantamento, pudemos constatar que algumas situações abordadas nestes livros de Economia referem-se a contextos ligados à realidade do cidadão comum.

Diante dessas ponderações, nos propusemos a encaminhar uma investigação no ciclo básico, no âmbito do ensino da Matemática Discreta, cujo recorte foi direcionado a resolução de situações-problema envolvendo números inteiros, que implicitamente representam Equações Diofantinas Lineares.

A partir de uma revisão de literatura presente em autores como Rocque e Pitombeira (1991), Zerhusen, Rakes e Meece (1999), Universidade de Minho (2003), Campbell e Zazkis (2005), Ferrari (2005), Schin (2005), Wielewski (2005) e Groenwald (2006), ponderei as razões e em que medida as equações Diofantinas lineares³ com duas ou três incógnitas, tema usualmente tratado somente em cursos de Teoria dos Números, no Ensino Superior da área de Matemática e afins, poderia ser aproveitado em sala de aula no ciclo básico.

Naturalmente, 'não' estamos a defender a inclusão das Equações Diofantinas Lineares no currículo como mais um objeto de estudo. A utilização de situações-problema envolvendo Equações Diofantinas Lineares no ensino de Matemática Elementar básico tem pertinência quando vinculada à valorização e importância de se desenvolver questões envolvendo os números inteiros.

Inicialmente, a fim de estabelecer a pertinência das Equações Diofantinas Lineares no Ensino de Matemática do ciclo Básico, fazemos referência ao trabalho de Brolezzi (1996), que considera que a parte quantitativa do conhecimento matemático pode ser subdividida em duas correntes: a Matemática Discreta e a Matemática do Contínuo. O autor afirma que uma grandeza é discreta quando ela for contável e é contínua quando for passível de ser medida.

Com relação a Matemática Discreta, Veloso et al. (2005) ressaltam ser esta uma área pouco valorizada, onde deveriam ser desenvolvidas estratégias de cálculo e resolução de problemas no contexto da Teoria dos Números, que permitem estabelecer uma ponte com a Educação Algébrica. Em consonância com este autor, Jurkiewicz (2004) propõe a inclusão de alguns dos tópicos de Teoria dos Números no currículo por possibilitar a proposição de problemas de compreensão acessível a alunos do ensino básico.

Importante contribuição a esta pesquisa foi realizada por Lopes Júnior (2005), que investigou a compreensão do conceito de função de 1º grau através do levantamento de aspectos epistemológicos e análise de alguns livros didáticos de Ensino Básico. Com relação aos materiais didáticos o autor pôde constatar que:

[...] a noção de variável discreta e contínua não vem sendo explorada no Ensino Fundamental e, assim, acreditamos que muitos alunos tratem a variável x como grandeza discreta ou que pensem que a letra da expressão algébrica serve apenas para indicar um valor desconhecido (uma incógnita) (LOPES JUNIOR, 2005, p. 81).

O referido autor, ao aplicar uma seqüência didática a alunos do Ensino Médio, observou que os alunos de Ensino Médio não distinguem e não compreendem quando a variável assume valor discreto ou contínuo, em questões envolvendo números inteiros.

Neste ponto, posicionando o lugar das Equações Diofantinas Lineares dentro da Matemática Discreta, fazemos referência a Campbell e Zazkis (2002), que caracterizam a Teoria dos Números não só como o estudo dos tópicos básicos e usuais como, por exemplo, números inteiros, múltiplos, divisores e máximo divisor comum, que pertencem ao currículo de Matemática do Ensino Básico, como também acrescidos de tópicos algébricos. Os referidos autores acrescentam que a resolução de problemas situando os tópicos de Teoria dos Números não envolve a aplicação direta de algoritmos, mas necessitam do desenvolvimento de habilidades como interpretar, conjecturar e incentiva a busca de heurísticas e estratégias.

Com ênfase à importância de estudos voltados à Teoria Elementar dos Números, dentro da proposta do projeto 'O que se entende por Álgebra?', Maranhão, Machado e Coelho (2005) realçam que esta não tem sido explorada de maneira adequada na Educação Básica, existindo assim um campo promissor para o desenvolvimento das potencialidades deste tema.

Outra pesquisadora, Amerom (2003), ao investigar meios didáticos que capacitassem o estudante a realizar uma transição propícia da Aritmética para a Álgebra, aplicou uma seqüência

³ As Equações Diofantinas Lineares representam uma equação algébrica de 1º grau com coeficientes inteiros, que pode não ter solução ou um número infinito de soluções inteiras.

didática a duas classes de alunos na faixa de 10 a 12 anos. A autora percebeu que os alunos, partindo das estratégias próprias, utilizam o equacionamento para estruturar o problema, realizando os cálculos aritméticos utilizando os coeficientes da equação. Amerom (2003) concluiu que a utilização de situações que permitem aflorar estratégias informais dos próprios alunos facilitou a transição para o aluno construir métodos algébricos.

As constatações acima nos sinalizaram a possibilidade de desenvolver uma investigação voltada a possibilitar a ação autônoma dos alunos do ciclo básico para a busca pelas soluções inteiras e o desenvolvimento de estratégias relativas a situações-problema implicitamente representando o tema das Equações Diofantinas Lineares.

Deste modo, esses pressupostos nos nortearam a tecer as seguintes questões: (a) Os alunos do Ensino Médio podem desenvolver conhecimentos sobre Equações Diofantinas Lineares? (b) É possível propor a alunos do Ensino Médio situações-problema que favoreçam a interpretação, a busca e o reconhecimento das soluções inteiras envolvidas, a partir das próprias estratégias?

Tendo como base as questões delineadas, estabelecemos como objetivo investigar como e em que medida alunos do ensino básico articulam estratégias aritméticas e algébricas para aprimorar conhecimentos envolvendo as Equações Lineares.

Desenvolvimento

Para esta investigação utilizamos como metodologia a Engenharia Didática, descrita em Artigue (1996). A elaboração da seqüência de atividades desta pesquisa utilizou as quatro fases da Engenharia Didática descritas a seguir.

As Análises Preliminares, conforme aponta Artigue (1996), envolveram as ponderações sobre a possibilidade e importância do reinvestimento dos conceitos de múltiplos, divisores e máximo divisor comum, presentes na Teoria Elementar dos Números e voltados para o Ensino Básico, assim como as pesquisas acadêmicas que investigaram as dificuldades na compreensão e percepção por alunos do Ensino Médio da especificidade de problemas algébricos que envolvem a solução com números inteiros.

Orientando-se nas deliberações da fase anterior, realizou-se o desenvolvimento das atividades na fase da concepção e análise a priori, que comportou um caráter descritivo e preditivo. Um ponto essencial de apoio desta etapa “[...] reside na fina análise prévia das concepções dos alunos, das dificuldades e dos erros tenazes, e a engenharia é concebida para provocar, de forma controlada, a evolução das concepções” (ARTIGUE, 1996, p. 202).

Nesta fase foram identificadas as variáveis didáticas que, segundo Artigue (1996), são aquelas para as quais as escolhas de valores provocam modificações nas estratégias de resolução de problemas. Dentre as variáveis didáticas situam-se as variáveis macrodidáticas ou globais, relativas à organização global da engenharia e as variáveis microdidáticas ou locais relativas à organização local da Engenharia em uma sessão ou fase.

Nesta pesquisa, as variáveis macrodidáticas envolveram aspectos da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), a organização dos alunos na pesquisa em agrupamentos, a utilização de jogos como recurso didático, a escolha de situações-problema contextualizadas em quantias monetárias e a delimitação das soluções no conjunto dos números inteiros.

A etapa de experimentação consistiu no desenvolvimento de ações, concretizadas pela aplicação de uma seqüência didática prevista para três sessões de 60 minutos cada e inicialmente concebida a um grupo de dez alunos do Ensino Médio, voluntários de uma escola pública da cidade de São Paulo, em horário extra-aula.

Foram comunicados os objetivos aos sujeitos de pesquisa e aplicados instrumentos de pesquisa, cabendo ao pesquisador o registro dos comportamentos dessa população, através da observação e transcrição das gravações sonoras, assim como na produção escrita em relação às atividades realizadas, que permitiram a análise e a obtenção de protocolos para a comprovação ou não das questões levantadas na pesquisa.

Na análise a posteriori e validação, o tratamento dos dados foi realizado pela confrontação com a análise a priori, permitindo a interpretação dos resultados e verificando em que condições as questões levantadas foram respondidas, permitindo a generalização local com validação interna da situação.

As atividades da sequência didática

Nas três sessões foram propostas atividades inseridas em alguns pressupostos da teoria das Situações Didáticas de Brousseau (1996), embasadas em jogos e resolução de situações-problema, num contexto envolvendo quantidades monetárias. *Os alunos formaram duplas ou trios e interagiram com a proposta veiculada, tendo o pesquisador um papel de observador, mediador e o da institucionalização. Cabe aos alunos, de acordo com Brousseau (1996), a necessária ação independente para o encaminhamento das tentativas de resolução, a formulação das possíveis soluções e a posterior socialização dos resultados encontrados.*

As atividades desenvolvidas nas três sessões objetivaram propiciar situações com variado número de soluções inteiras e com nenhuma solução, através de problemas que possibilitam provocar outras formas de estratégia além da tentativa e erro, assim como no desenvolvimento da escrita algébrica como facilitadora para a busca de soluções.

As atividades propostas na 1ª sessão constaram de um jogo inicial seguido de duas situações-problema que cobrem as diferentes possibilidades: existência de variado número finito de soluções inteiras e nenhuma solução. Ao deixar que o aluno experimentasse as estratégias que ele dispõe, pretendíamos que ele percebesse a insuficiência da estratégia da tentativa e erro em problemas onde ocorre a inexistência de solução, assim como na possível dificuldade em resolver algumas situações que envolvem um elevado número de soluções inteiras. Assim, as atividades favoreceram ao aluno reconhecer situações que representam implicitamente a equação diofantina linear, vivenciando a natureza discreta de suas soluções e o variado número de soluções, que dependiam de fatores que o aluno não controlava.

Apresentamos a seguir o jogo inicial, conforme expresso no quadro 01. Foi entregue uma folha contendo as regras do jogo, sendo previsto o tempo de cinco minutos para sua leitura. Após a leitura, cada dupla recebeu uma folha para registro dos dois resultados a serem sorteados e um jogo de quatro cartas.

Quadro 01: As regras do 'Jogo do sorvete' [Fonte: Pommer (2008, p. 60)].

- **Jogo nº 1:** Convidamos vocês a participar do 'jogo do sorvete'. Regras:
- O jogo transcorre em quatro rodadas de, no máximo, 2 minutos cada.
- O jogo será disputado entre duas duplas da mesma série.
- Cada dupla registra seus resultados na folha entregue para tal.
- Cada quadra de alunos, das duas duplas, recebe quatro cartas fechadas com os seguintes valores: R\$ 8,00; R\$ 10,00; R\$ 12,00; R\$ 14,00.
- Cada carta corresponde ao valor que deve ser gasto em sorvetes.
- São duas opções de sorvetes de casquinha: bola simples a R\$ 2,00 e bola dupla a R\$ 4,00.
- Existem muitos sabores disponíveis para os pedidos.
- Inicia o jogo a dupla que ganhar na disputa par ou ímpar.
- A dupla vencedora retira a carta de cima e a mostra para todos.
- A dupla oponente registra o valor da carta e todas as possibilidades de compra de sorvetes de casquinha, sem as revelar à dupla adversária.
- O jogo continua até o término das cartas, invertendo em cada rodada os papéis das duplas.
- Completando-se as quatro rodadas, cada dupla mostra todos os resultados obtidos à dupla adversária, que deverá conferi-los.

Na 1ª sessão, compareceram sete dos dez alunos que tinham se voluntariado, sendo três da 1ª série e quatro da 3ª série do Ensino Médio. Deste modo, fomos compelidos a reorganizar os grupos previamente escolhidos, formando os grupos G_1 e G_2 , compostos cada qual por duas alunas da 3ª série e um terceiro grupo G_3 composto pelos três alunos da 1ª série.

Devido à escolha da ordem de grandeza envolvendo os valores monetários, os alunos rapidamente se mobilizaram para a procura das soluções inteiras representadas pelas diversas possibilidades de escolha de sorvetes de casquinha. Todos os grupos compreenderam corretamente o enunciado e o caráter discreto das quantidades inteiras representadas pelas bolas de sorvete. Porém, houve distinção nas produções dos grupos quanto à existência de mais de uma solução e a determinação de sua quantidade.

Conforme pode ser analisado a partir dos protocolos, alguns deles indicados nos quadros 02 e 03, o grupo G_2 foi o único que representou corretamente todas as soluções inteiras na carta sorteada para gasto de R\$ 14,00, assim como determinou duas das três soluções para o gasto de R\$ 10,00.

<p>Quadro 02: Protocolo representando duas das três soluções para o gasto de R\$ 10,00.</p>	<p>Quadro 03: As soluções corretas para o gasto de R\$ 14,00.</p>
<p>15 bolas de 2,00 2 bolas de 4,00 e uma de 2,00</p>	<p>17 bolas de 2,00 R\$ 3 bolas de 4,00 e uma de 2,00 5 bolas de 2,00 e uma de 4,00 2 bolas de 4,00 e três de 2,00</p>

Em contrapartida, o grupo G_1 não conseguiu determinar todas as soluções, representando somente aquelas que envolviam somente a compra de um tipo de sorvete, conforme se observa nos protocolos (quadros 04 e 05), revelando uma possível interpretação do 'ou' exclusivo, confirmado na 2ª sessão, ocasião em que os sujeitos de pesquisa foram questionados.

<p>Quadro 04: Representação de duas das quatro soluções possíveis para o gasto de R\$ 12,00.</p>	<p>Quadro 05: Indicação de duas das três soluções encontradas para o gasto de R\$ 8,00.</p>
<p>* 6 sorvetes de 2,00 reais * 3 sorvetes de 4,00 reais</p>	<p>* 4 sorvetes de 2,00 reais * 2 sorvetes de 4,00 reais</p>

Por último, o grupo G_3 apresentou somente uma solução para cada gasto, provavelmente devido a efeitos do contrato didático usual, onde os alunos erroneamente concebem que cada problema somente possui uma única solução.

De modo geral, os alunos perceberam a grandeza discreta ao encaminhar as soluções inteiras, assim como utilizaram o método da tentativa e erro como estratégia preferencial, conforme previsto. O objetivo deste jogo foi atingido pelos grupos G_1 e G_2 , por haver percebido a existência de mais de uma solução, fato que não ocorreu para o grupo G_3 .

No desenvolvimento da 1ª sessão, foi apresentada aos alunos uma situação-problema denominada 'Quantos pacotes de café?', cujo enunciado é:

Uma loja de conveniência trabalha com diversas marcas de café. Num determinado mês, um comprador desta loja comprou 2 tipos de café – tipo A (normal) e tipo B (descafeinado). Sabendo-se que ele gastou exatamente R\$ 58,00, quais são as diversas maneiras que ele pode adquirir os pacotes do tipo A e do tipo B? O preço do pacote da marca A é R\$ 2,00 e do pacote da marca B, R\$ 3,00 (POMMER, 2008, p. 61).

Esta situação-problema propiciou um desafio maior na medida em que exigiu maior organização e percepção para a busca das nove soluções inteiras. Em particular, o grupo G_1 acertou todas as soluções do problema 1, partindo da estratégia da tentativa e erro, porém rapidamente organizando as respostas após algumas poucas tentativas, o que mostrou indícios de uma evolução na estratégia.

Quanto aos outros dois grupos, estes compreenderam que as variáveis envolvidas eram de natureza discreta, ao procurar as soluções inteiras, porém ainda se basearam exclusivamente no método da tentativa e erro. Ainda, o grupo G_2 encontrou três das nove possibilidades de aquisição de café do tipo A ou B. Porém, o grupo G_1 não interpretou corretamente o problema e forneceu uma resposta inadequada, assim como não percebeu existir mais de uma solução.

No fechamento da 1ª sessão, foi apresentada uma segunda situação-problema, denominada 'Qual sua escolha: CD ou DVD?', cujo enunciado é:

Uma aluna, Bianca, fã de música, reserva num certo mês R\$ 60,00 para a compra de CDs ou DVDs. Um CD custa R\$ 10,00 e um DVD R\$ 15,00. (a) Quais são as várias possibilidades de aquisição destes dois bens, gastando-se exatamente R\$ 60,00? (POMMER, 2008, p. 63).

Nesta primeira parte, optou-se por viabilizar uma relação entre as variáveis didáticas representadas pelo valor a ser gasto e os valores unitários de CD e DVD de modo que o aluno facilmente encontrasse as três soluções, fato que se confirmou em dois dos três grupos, permitindo se verificar a interpretação correta do enunciado do problema. O grupo G_1 foi o único que encontrou duas das três soluções possíveis, confirmando novamente a interpretação do 'ou' exclusivo, como pode ser observado nos protocolos dos quadros 06 e 07.

Quadro 06: Protocolo representando as duas soluções do grupo G_1 .

*La padeira comprar dois DVDs no valor de R\$ 15,00 e 3 CD no valor de R\$ 10,00
Valor exato de 60,00 reais gastos
Total = 60,00*

Quadro 07: Protocolo representando as três soluções do grupo G_2 .

** 6 CD's = 10,00 RA = $\frac{10,00}{\times 6}$
60,00
* 4 DVD's = 15,00 RA = $\frac{15,00}{\times 4}$
60,00
* 3 CD's = 10,00 + 2 DVD's = 15,00*

Numa continuidade da situação-problema 'Qual sua escolha: CD ou DVD?', foi apresentado aos alunos o seguinte desdobramento:

(b) Passados dois meses, Bianca resolveu fazer novas aquisições, porém notou que os preços de CD e DVD aumentaram para R\$ 12,00 e R\$ 16,00, respectivamente. Para compensar estes aumentos, Bianca pensou em gastar exatamente R\$ 70,00 para as compras musicais. Como ficariam as possibilidades de compra destes dois bens gastando-se exatamente R\$ 70,00? (POMMER, 2008, p. 63).

O objetivo foi apresentar ao aluno uma situação-problema com nenhuma solução. Isto foi viabilizado através da mudança do valor da variável didática representada pelo gasto para a compra de CDs ou DVDs, que visou ambientação para que o aluno percebesse a limitação do método da tentativa e erro como estratégia de resolução, de modo a permitir ao aluno vivenciar esta característica das Equações Diofantinas Lineares.

Conforme havíamos previsto, os três grupos dispuseram de maior tempo na tentativa de busca das soluções, questionando se havia ou não solução inteira devido a insistência na utilização do método da tentativa e erro, porém não formularam nenhuma conjectura em relação a inexistência de solução.

Sintetizando as considerações em relação à 1ª sessão, os grupos G_1 e G_2 vivenciaram algumas características das Equações Diofantinas Lineares ao descobrirem que algumas das situações-problema apresentadas possuem variado número de solução inteira. Considerando-se os três grupos, estes perceberam a natureza discreta das grandezas discretas representadas pelas quantidades de produtos ou serviços a serem adquiridos, porém ainda estavam vinculados ao método da tentativa e erro como estratégia inicial e preferencial. Houve indícios de percepção pelos alunos da limitação de tal estratégia de tentativa e erro, no caso em que não souberam explicitar se existia ou não solução, propiciado pela vivência de uma insatisfação.

Acreditamos que o jogo inicial e as duas situações-problema favoreceram a devolução conforme Brousseau (1996), proporcionando uma motivação, uma interpretação inicial e a busca das soluções, confirmando o uso da estratégia da tentativa e erro como a preferida pela maioria dos sujeitos de pesquisa, algo previsto na revisão bibliográfica realizada. Este fator é extremamente relevante e que foi considerado para a elaboração de propostas didáticas para que houvesse a possibilidade de superação deste quadro extremamente limitado da tentativa e erro.

Com relação às respostas apresentadas, estas se situaram no âmbito dos números inteiros, fornecendo indícios que os contextos utilizados contribuíram para o reconhecimento dos alunos acerca da natureza discreta das grandezas envolvidas na solução.

Deste modo geral, comparando-se o desempenho dos grupos, foi caracterizado que os grupos representados pelos alunos do 3º ano apresentaram maior capacidade na mobilização para obter as soluções inteiras, assim como na organização dos resultados.

Ampliando os objetivos da 1ª sessão, a 2ª sessão visou desenvolver condições para provocar no aluno a percepção dos múltiplos ou divisores como estratégia facilitadora para a busca de soluções de uma equação diofantina linear, o que permitiria aos alunos um avanço na complexa elaboração de um repertório de estratégias para a resolução de situações-problema.

Para a 2ª sessão, novamente foram utilizados jogos numa perspectiva de resolução de problemas, apresentados em três etapas. Tendo comparecido seis alunos a essa sessão, foram formados dois grupos de alunos: o grupo G_2 , composto por três alunas da 3ª série e o grupo G_3 , formado por dois alunos e uma aluna da 1ª série.

Apresentamos, a seguir, algumas considerações envolvendo a etapa nº 2, denominada o 'Jogo dos Saques no caixa eletrônico':

Usualmente, um caixa eletrônico de banco pode dispor de cédulas (notas) para atender eventuais solicitações de saques. Suponha que todos os caixas possuam suficientes cédulas para emissão.

(a) Um usuário deseja fazer um saque e decide utilizar um caixa eletrônico que emite somente cédulas de R\$ 5,00 ou R\$ 10,00. Consulta o seu saldo e verifica que possui em sua conta, no momento, R\$ 61,00. Indeciso, resolve efetuar um saque, mas não deseja zerar o saldo. Forneça todos os possíveis saques que poderiam ser realizados pelo usuário. Explique seu raciocínio (POMMER, 2008, p. 83).

Esta etapa objetivou propiciar condições aos alunos em observar que os múltiplos representam uma estratégia mais favorável à busca das soluções. Nesta situação, a escolha dos valores das cédulas - R\$ 5,00 e R\$ 10,00 - representativos das variáveis didáticas, facilitaria esta percepção, pois a relação entre eles possibilitaria ao aluno perceber que os múltiplos inteiros positivos de R\$ 5,00, até o valor de R\$ 60,00, seriam a solução almejada.

Os dois grupos atingiram o objetivo, realizando inicialmente cálculos aritméticos através da utilização da estratégia da tentativa e erro. Porém, a seguir, ocorreu a operacionalização dos múltiplos como estratégia facilitadora, ao perceberem a relação dos possíveis saques e o fato de que todos eles são divisíveis de 5, conforme ilustrado abaixo no protocolo do grupo G_2 .

Quadro 08: Protocolo representando a solução do grupo G_2 .
Raciocínio: <i>Todos os números divisíveis por 5</i>

A seguir, apresentamos a última parte da ETAPA n° 2, almejando que efetivamente os alunos utilizassem o conceito de múltiplo como estratégia adequada para a resolução da situação-problema proposta. Isto pode ser veiculado pela utilização de um valor de saque com maior ordem de grandeza (R\$ 1060,00), que inviabilizaria o uso do método da tentativa e erro.

(d) Um terceiro cliente entra na agência com serviço de caixa eletrônico específico, indicado na tabela abaixo. Ele deseja fazer um saque de R\$ 1060,00. Indique na 3ª coluna, escrevendo SIM ou NÃO, qual (is) o(s) caixa(s) eletrônico(s) do banco que permite(m) tal saque. Justifique (POMMER, 2008, p. 86).

Caixa eletrônico	Cédulas emitidas	Saque de R\$ 1060,00
Caixa 1	5 e 10	
Caixa 2	10 e 20	
Caixa 3	20 e 50	
Caixa Especial	2 e 10	

Conforme havíamos previsto, os dois grupos realizaram cálculos mentais e acertaram todas as respostas. Assim, o objetivo se concretizou num viés operacional através do preenchimento da tabela, conforme o protocolo expresso no quadro 09.

Quadro 09: Protocolo representando a solução correta dos grupos G_2 e G_3 .		
Caixa eletrônico	Cédulas emitidas	Saque de R\$ 1060,00
Caixa 1	5 e 10	<i>Sim</i>
Caixa 2	10 e 20	<i>Sim</i>
Caixa 3	20 e 50	<i>Sim</i>
Caixa Especial	2 e 10	<i>Sim</i>

Porém, não houve menção explícita do conceito de múltiplo ou divisor na justificativa, sendo que os dois grupos retratam conceitos de forma equivocada, conforme se pode observar no protocolo do quadro 10.

Quadro 10: Protocolo representando as justificativas dos grupos G2 e G3, nesta ordem.

Justificativa: <i>Todos. Sem yao todos os nos usa yao</i>
Justificativa: <i>Todos os numeros são inteiros menores e 2</i>

Ressaltamos que os resultados indicados neste texto ilustram, de modo geral, as produções dos dois grupos na 2ª sessão. Assim, o grupo G₂ manifestou adquirir alguns conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares, ao operacionalizar as soluções inteiras das situações-problema apresentadas, explicitando em algumas situações o papel dos múltiplos como estratégia facilitadora na busca de soluções inteiras e fornecendo indícios de percepção da relação entre as quantidades monetárias fornecidas como fator fundamental para a existência de solução. Quanto ao grupo G₃, este alcançou parcialmente os objetivos ao persistir na estratégia da tentativa e erro na busca de soluções, operacionalizando a descoberta das soluções, assim como percebendo a natureza discreta das grandezas envolvidas.

Também, a utilização dos jogos como fonte de motivação parece ter favorecido a devolução das situações, proporcionando condições para a interpretação e busca das soluções inteiras. Também, as respostas favoráveis na grande maioria dos problemas mostraram indícios que os contextos utilizados contribuíram para a interpretação e busca de soluções inteiras.

Como não houve menção ou uso da ferramenta algébrica, na 3ª sessão nos propusemos a retomada de alguns dos problemas apresentados nas sessões anteriores. A ideia era propiciar condições para que os alunos escrevessem as equações relativas a eles e a utilizassem como ferramenta otimizadora para a busca e organização das soluções inteiras.

Devido às dificuldades inerentes ao uso da ferramenta algébrica, apontada em pesquisas como a de Lopes Junior (2005), realizamos uma institucionalização antecedendo o início da 3ª sessão. Utilizamos como suporte para a discussão as próprias produções de um problema realizado na 1ª sessão, questionando os alunos quanto às características dos dados e das soluções, organizando os resultados de modo a possibilitar elementos para a evolução da escrita algébrica a partir da estratégia da tentativa e erro e como esta ferramenta poderia facilitar a busca das soluções.

O grupo G₂ atingiu este objetivo nas três situações-problema apresentadas na 3ª sessão, conforme exemplificado no protocolo do quadro 11.

Quadro 11: Protocolo indicando a síntese da solução do problema 1 – grupo G2.

Problema	Título	Soluções		Equação
		Quantas?	Quais?	
1	Quantos pacotes de café?	9	Rg. QUANT. = 58 2.29 + 3.0 = 58 2.26 + 3.2 = 58 2.23 + 3.4 = 58 2.20 + 3.6 = 58 2.17 + 3.8 = 58 2.14 + 3.10 = 58 2.11 + 3.12 = 58 2.8 + 3.14 = 58 2.5 + 3.16 = 58	$2x + 3y = 58$

Porém, o grupo G₃ não atingiu o objetivo, não distinguindo a solução numérica da escrita algébrica, assim como não determinando as várias soluções inteiras, conforme se observa no protocolo do quadro 12.

Quadro 12: Protocolo indicando a síntese da solução do problema 1 – grupo G3

Problema	Título	Soluções		Equação
		Quantas?	Quais?	
1	<i>Quantos pacotes de café?</i>	1	$2x + 3y = 58$ $2 \cdot 26 + 3 \cdot 2 = 58$ $52 + 6 = 58$	$2x + 3y = 58$ $2 \cdot 26 + 3 \cdot 2 = 58$ $52 + 6 = 58$

Considerações finais

A seqüência didática realizada mostrou que os alunos do Ensino Médio manifestaram alguns conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares nas situações-problema apresentadas, ao perceberem o caráter discreto das grandezas envolvidas, assim como no fato da existência de diversas possibilidades de aquisição na busca das quantidades de produtos.

Constatamos que, inicialmente, os alunos utilizaram a estratégia de tentativa e erro para as buscas das soluções inteiras. Porém, alguns alunos desenvolveram outras estratégias como recurso para a resolução dos problemas, seja através do uso do conceito de múltiplo ou pela escrita algébrica, tendo organizado e relacionado tais estratégias com uma ferramenta mais adequada para a busca e organização das possíveis soluções inteiras.

Também, verificamos que os alunos participantes da pesquisa apresentaram indícios em perceber e estabelecer alguma conexão entre os dados fornecidos nos enunciados e a solução dos problemas, manifestando relação com os múltiplos ou divisores de um número através de exemplos particulares, porém não validaram matematicamente tal resultado.

Em relação ao desempenho dos grupos de 1ª e 3ª séries do Ensino Médio, os alunos do 3º ano apresentaram maior capacidade na mobilização para obter as soluções inteiras, na organização dos resultados, na determinação da expressão algébrica que representa as situações-problema e na utilização desta forma de expressão para a busca de soluções.

Isto possivelmente ocorreu pelo fato dos alunos de 3ª série do Ensino Médio terem vivenciado mais situações no ambiente escolar em temas que envolvem grandezas discretas, tais como as Seqüências Numéricas, Progressões Aritméticas, Análise Combinatória e Sistemas Lineares.

Ainda, os alunos dessa pesquisa apresentaram dificuldade em perceber e estabelecer alguma estratégia quando uma situação não possui solução inteira, devido principalmente a limitação das estratégias utilizadas pelos alunos.

Diante de tais considerações, concluímos que é possível a alunos de Ensino Médio desenvolver conhecimentos envolvendo equações diofantinas lineares, ao se deparar com uma situação didática embasada nos moldes de Brousseau (1996), viabilizando a estes alunos a ação independente para desenvolver estratégia facilitadora que operacionalize conceitos da teoria Elementar dos Números – múltiplos ou divisores - assim como o uso da escrita algébrica como ferramenta otimizada e organizadora na busca das soluções inteiras, que vai de acordo com a proposta de Fiorentini, Miorim e Miguel (1993).

Destacamos através das observações e manifestações ocorridas nesta pesquisa, o grande envolvimento e empenho dos alunos nas atividades propostas. Acreditamos que estas atitudes foram possibilitadas pela utilização dos jogos numa perspectiva de resolução de problemas como fonte de motivação. Estes recursos didáticos favoreceram a devolução das situações propostas, inicialmente caracterizadas pelo intenso debate entre os alunos para o entendimento das regras dos jogos, que proporcionou condições iniciais para a superação das dificuldades encontradas inerentes à leitura e interpretação dos textos matemáticos propostos nesta pesquisa, assim como na efetivação da ação independente para a busca das soluções. Assim, houve mobilização para o entendimento das

condições matemáticas presentes no texto matemático: os valores fornecidos, o que era solicitado, a existência de diversificado número de soluções e a natureza discreta das questões apresentadas.

Isto está de acordo com ponderações presentes em Borin (1995) e em Pozo (1998), autores que destacam ser o ato lúdico proporcionado pelo jogo um facilitador da interação, que associado às situações-problema representam recursos didáticos de mediação entre as possibilidades dos alunos e as exigências da tarefa.

Também, acreditamos que as respostas favoráveis na grande maioria dos problemas mostraram indícios que a escolha de situações contextualizadas em questões econômicas próximas ao cotidiano do aluno contribuiu para a interpretação e busca de soluções inteiras.

Assim, estes recursos didáticos se revelaram de fundamental importância para favorecer o desenvolvimento de conhecimentos envolvendo as Equações Diofantinas Lineares.

Por último, encerramos este relato observando a fala de uma aluna, com relação a este tipo de atividades envolvendo as situações-problema e os jogos como motivadoras para o processo de ensino e de aprendizagem: “Assim, dá mais vontade de fazer”.

REFERÊNCIAS

AMEROM, Bárbara A. Von. FOCUSING ON INFORMAL STRATEGIES WHEN LINKING ARITHMETIC TO EARLY ALGEBRA. *Educational Studies in Mathematics*. Holanda, v. 54, p. 63-75, 2003.

ARTIGUE, Michele. Engenharia Didática. In: BRUN, Jean. *Didática das Matemáticas*. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 4, p. 193 -217.

BORIN, Júlia. *Jogos e Resolução de Problemas: Uma Estratégia para as aulas de Matemática*. São Paulo: CAEM, IME-USP, v. 6, 1995.

BROLEZZI, Antonio Carlos. *A Tensão entre o Discreto e Contínuo na História da Matemática e no Ensino da Matemática*. Tese de doutorado. São Paulo, Faculdade de Educação da USP, 1996.

BROUSSEAU, Guy. Fundamentos e Métodos da Didáctica da Matemática. In: BRUN, Jean. *Didáctica das Matemáticas*. Tradução: Maria José Figueiredo. Lisboa: Instituto Piaget, 1996. Cap. 1, p. 35 -113.

CAMPBELL, Stephen R.; ZAZKIS, Rina. Toward Number Theory as a Conceptual Field. In: CAMPBELL, Stephen R.; ZAZKIS, Rina (Org.). *Learning and Teaching Number Theory*. London: Ablex Publishing, 2002, cap 1, p. 1-14.

FERRARI, Pier Luigi. Understanding Elementary Number Theory at the Undergraduate Level: A Semiotic Approach. In: CAMPBELL, Stephen R.; ZAZKIS, Rina. (Org.). *Learning and Teaching Number Theory*. London: Ablex Publishing, 2002, cap. 5. p. 97-115.

FIORENTINI, Dario; MIORIM, Maria Ângela; MIGUEL, Antonio. Contribuição para um repensar... a Educação Algébrica Elementar. *Pro-Posições*. v. 4. n. 1. mar. 1993. p. 78-91.

GROENWALD, Claudia L. Oliveira et al. *Teoria dos Números e suas Aplicações no Processo de Ensino e Aprendizagem*. Disponível em: <<http://ccet.ucs.br/eventos/outros/egem/cientificos/cc79.pdf>> Acesso em: 02 jul. 2006.

JURKIEWICZ, Samuel. *Matemática Discreta e Ensino Médio*. Programa de Engenharia de Produção da UFRJ, 2004. Disponível em: <http://ensino.univates.br/~chaet/Materiais/matdiscreta_medio.pdf>. Acesso em: 18 mar. 2007.

LOPES JUNIOR, Dejahyr. *Função do 1º grau: Um estudo sobre seus Registros de Representação Semiótica por Alunos da 1ª Série do Ensino Médio*. 2005. 163 f. Dissertação (Mestrado em Educação), Universidade Federal de Mato Grosso do Sul, Centro de Ciências Humanas e Sociais, Campo Grande, MS.

MARANHÃO, Maria Cristina Souza de Albuquerque; MACHADO, Sílvia Dias Alcântara; COELHO, Sonia Pita. *Projeto: O que se entende por Álgebra?* Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, 2005.

POMMER, Wagner Marcelo. *Equações Diofantinas Lineares: Um Desafio Motivador para Alunos do Ensino Médio*. 2008. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

POZO, Juan Ignacio. Introdução. In: POZO, Juan Ignacio (Org.). *A Solução de problemas: Aprender a resolver, resolver para aprender*. Porto Alegre: ArtMed, 1998. p. 9-11.

ROCQUE, Gilda de La; PITOMBEIRA, João Bosco. *Uma equação diofantina e suas resoluções*. Revista do Professor de Matemática, São Paulo, 1991. v. 19, p. 39-47.

SCHIN, Elcio. *O Meu Aniversário*. UFMG. Disponível em: <<http://www.reniza.com/forums/MalbaTahan/posts/52.html>>. Acesso em: 15 jul. 2005.

VELOSO, Eduardo et al. *A Matemática na formação inicial dos professores*. Documento para discussão. Associação de Professores de Matemática (APM) e Sociedade Portuguesa de Matemática (SPM), Portugal. out. 2005. Disponível em: <<http://www.eduardoveloso.com/pdfs/matprof.pdf>>. Acesso em: 19. mar. 2007.

UNIVERSIDADE DE MINHO. *Equações Diofantinas*. Portugal, 2003. Cap. 2. Disponível em: <http://www.math.uminho.pt/.../outros/2003_Capitulo2>. Acesso em: 12 jul. 2006.

WIELEWSKI, Gladys Denise. *Aspectos do pensamento matemático na resolução de problemas: uma apresentação contextualizada da obra de Krutetskii*. 2005. 407 p. Tese (Doutorado em Educação Matemática), Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo.

Recebido em janeiro de 2012.
Aprovado em fevereiro de 2013.