

VELOCIDADE DE SEDIMENTAÇÃO PARA CONJUNTOS DE PARTÍCULAS E SUA DEPENDÊNCIA PARA COM A CONCENTRAÇÃO DE SEDIMENTOS – UMA ABORDAGEM PARTINDO DA QUANTIFICAÇÃO DA ENERGIA CINÉTICA

SETTLING VELOCITY FOR PARTICLE SETS AND ITS DEPENDENCE ON THE SEDIMENT CONCENTRATION
– A STUDY BASED ON THE KINETIC ENERGY QUANTIFICATION

Harry Edmar Schulz e José Eduardo Alamy Filho

Universidade de São Paulo
São Carlos Engineering School
Department of Hydraulics and Sanitation Engineering
P.O. Box: 359
13560.970 - São Carlos, SP Brazil
E-mail: heschulz@sc.usp.br, zealamy@yahoo.com.br

ABSTRACT

This paper presents analytical solutions for settling velocity of particle sets, considering the volumetric concentration, the kinetic energy of the set and its dissipation in the fluid. The concept of drag coefficient is used to evaluate the energy consumed during the particle movement (work done). Two different situations are considered: constant drag coefficient and drag coefficient proportional to the inverse of the particle Reynolds number. The solutions appear, at the first case, as a product of factors which include the free space between the particles. At the second case, the solutions appear like a sum of parcels which also involve the free space. The mass conservation principle is guaranteed by the present formulation. Comparisons between experimental data of the literature and the theoretical solution presented here show good agreement between data and predictions, and also between results of semi empirical formulations and of the present formulation, covering a wide range of sedimentation scenarios.

Keywords: settling velocity, sedimentation, sediment volumetric density, particle suspensions.

RESUMO

Propostas de soluções para a sedimentação de conjuntos de partículas como função de sua concentração volumétrica são apresentadas, considerando a energia cinética do conjunto e a sua dissipação no meio fluido. O conceito de coeficiente de arrasto é utilizado no cálculo da energia consumida no deslocamento (trabalho realizado), sendo que duas situações distintas são consideradas: coeficiente de arrasto constante e coeficiente de arrasto inversamente proporcional ao número de Reynolds da partícula. As soluções surgem, no primeiro caso, como um produto de fatores envolvendo o espaço livre entre as partículas e, no segundo caso, como um somatório de parcelas envolvendo esse mesmo espaço. O princípio da conservação de massa é garantido pela formulação apresentada. Comparações com dados experimentais e demais formulações de cunho empírico e semi-empírico demonstram que a presente proposta se ajusta bem a uma vasta gama de cenários de sedimentação.

Palavras-chave: velocidade de sedimentação, sedimentação, concentração volumétrica de sedimentos, suspensões de partículas.

1- INTRODUÇÃO

Sedimentação é um dos temas particulares mais estudados em Mecânica dos Fluidos. Não obstante, continuamente são apresentadas novas equações, notadamente empíricas, para quantificar a velocidade de sedimentação de partículas em fluidos, cuja concentração volumétrica interfere na solução final. O empirismo é adotado porque a aplicação prática requer rapidez e por vezes as formulações teóricas envolvem parâmetros de natureza complexa, cuja determinação é trabalhosa, levando a desvios que prejudicam a quantificação. O próprio termo “sedimentação” deve ser convenientemente

classificado pelo escoamento gerado no meio fluido. Uma partícula em sedimentação num fluido em repouso gera um vórtice toroidal em torno de si, para um observador fixo em relação ao fluido. Já um meio em movimento em torno de partículas em repouso (em relação ao observador) recebe a denotação de “permeação” (ver Happel e Brenner, 1965).

Técnicas de cálculo, como o método das reflexões ou das células unitárias, são utilizadas, com grande quantidade de considerações auxiliares, gerando soluções e informações úteis. Temas como a sedimentação isolada, junto a paredes, no interior de tubos, entre duas esferas ou em um conjunto delas; ou o aumento de viscosidade aparente decorrente do aumento da concentração

volumétrica; ou a variação da configuração geométrica, como o uso de esferas ou elipsóides de revolução; intensificam o uso dos resultados desse estudo em aplicações nas mais diferentes engenharias, na física, na química, na biologia e nas ciências da terra.

Tradicionalmente as equações de Navier-Stokes são a base para obter as soluções. Todavia, o seu uso conduz a paradoxos envolvendo duas ou três dimensões, ou o “número infinito” de esferas ou cilindros, o que eventualmente produz situações ainda sem soluções definitivas. A esfera em movimento recebe tradicionalmente as maiores atenções, assim como os escoamentos axissimétricos. Daí decorrem velocidades para corpos rígidos ou fluidos, com e sem deslizamento na superfície, cujas soluções são baseadas naquela da esfera. Observa-se, outrossim, que muito provavelmente os tratamentos teóricos mais complexos são aqueles para as interações entre duas ou mais partículas sedimentando. Também partículas que se movimentam em relação a paredes fixas e tubos envolvem parâmetros que mostram serem relevantes as condições geométricas do problema. Sistemas diluídos têm conduzido a soluções bastante similares, por exemplo, nas formas $V_p/V_o = 1 - c \cdot \phi^{1/3}$ ou,

$$V_p/V_o = \left(1 + c \cdot \phi^{1/3}\right)^{-1} \quad \text{onde } V_p \text{ é a velocidade de}$$

sedimentação da partícula, V_o é a velocidade terminal de sedimentação para baixas concentrações, c é uma constante e ϕ é a concentração volumétrica de partículas. Essas soluções têm sido consideradas aproximadamente válidas para $\phi < 0,05$. Para sistemas concentrados de esferas, uma solução interessante é apresentada em Happel e Brenner

$$(1965), \text{ na forma } V_p/V_o = \frac{3 - (9/2) \cdot \phi + (9/2) \cdot \phi^5 - 3 \cdot \phi^6}{3 + 2 \cdot \phi^5}.$$

Entretanto, não se tem observado que uma única relação universal entre a velocidade adimensionalizada e a concentração volumétrica satisfaça todos os experimentos. Assim, as suspensões de partículas receberam diferentes tratamentos, surgindo outras equações, como aquela proposta por Richardson e Zaki (1954), na forma $V_p/V_o = (1 - \phi)^\alpha$, onde o expoente α é determinado empiricamente, sendo dependente do escoamento e das características geométricas da partícula. Dessa forma, a presença desse expoente revela que cada suspensão pode ter sua própria curva.

De forma resumida, sabe-se que a velocidade de sedimentação de partículas está relacionada com a sua concentração volumétrica no fluido. Muitas equações e conceitos adequados, relacionando essas variáveis, existem na literatura, bem como outros parâmetros do sistema fluido-partícula. Mas não há uma aceitação geral de que uma solução, com bases suficientemente amparadas em princípios físicos, utilizável em uma ampla faixa de concentrações e velocidades, tenha sido atingida. No presente texto são utilizados alguns conceitos e relações básicas na construção de uma equação para a velocidade de sedimentação, os quais serão descritos a seguir.

2 – FUNDAMENTOS BÁSICOS

2.1. Concentrações volumétrica, superficial e linear

Para suspensões de partículas homogêneas e isotrópicas, vale a relação:

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{\text{Volume de Partículas}}{\text{Volume Total}} = \frac{\text{Área ocupada por Partículas}}{\text{Área Total}} \\ &= \frac{\text{Comprimento ocupado por partículas}}{\text{Comprimento Total}} \end{aligned} \quad (1)$$

Desta relação decorrem três equações inter-relacionadas. O volume total representa o volume do reservatório considerado. A área ocupada pelas partículas é a área de interseção entre as partículas e um plano imaginário. O comprimento ocupado pelas partículas é o comprimento de interseção entre as partículas e uma linha imaginária. As três relações são iguais. Como consequência, também vale a Equação 2, que expressa o espaço livre entre as partículas em uma, duas e três dimensões:

$$\begin{aligned} 1 - \phi &= \frac{\text{Volume de fluido livre}}{\text{Volume Total}} = \frac{\text{Área de fluido livre}}{\text{Área Total}} \\ &= \frac{\text{Comprimento de fluido livre}}{\text{Comprimento Total}} \end{aligned} \quad (2)$$

2.2. Trabalho realizado e perda de energia

Em escoamentos em torno de partículas isoladas define-se um coeficiente de arrasto, o qual permite calcular a força sobre uma partícula e, se isto for de interesse, a energia gasta no movimento. Contudo, em fenômenos de sedimentação com alta concentração de partículas, a dissipação de energia ocorre não em um ambiente amplo, porém em um ambiente restrito pela presença de muitas partículas. Pode-se então considerar uma analogia com um escoamento confinado, no qual as variáveis devem ser relacionadas com a concentração de partículas. A equação para a força de arrasto em torno de corpos quaisquer é descrita como:

$$F_A = C_D \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} \cdot A \quad (3)$$

A energia consumida ao longo de um deslocamento L pode ser quantificada pelo trabalho realizado, na forma da Equação 4:

$$\text{Energia consumida} = F_A \cdot L = C_D \cdot \rho \cdot \frac{V^2}{2} \cdot A \cdot L \quad (4)$$

Observa-se que a perda de energia é proporcional à própria energia cinética, que aparece na equação através do fator $V^2/2$, sendo V a velocidade relativa entre a partícula e o fluido. Na Equação 4, L é o comprimento a ser vencido e A a área definida pela projeção frontal do corpo

considerado. Para esferas, $A = \pi \cdot D^2/4$, onde D é o diâmetro da esfera. O termo C_D é denominado coeficiente de arrasto, podendo ser variável ou constante, dependendo das condições do movimento. É interessante observar que o deslocamento L , no caso de sedimentação, incorpora informações geométricas acerca da própria existência de partículas no meio, o que pode ser relacionado com a concentração volumétrica das mesmas.

Ao longo da sedimentação natural de partículas, quando não existem perdas, há conservação de energia mecânica, ou seja, a soma das energia potencial e cinética mantém-se constante. Nesta situação hipotética, havendo contínua perda de energia potencial (queda de partículas), deve haver, em princípio, um contínuo aumento da energia cinética (velocidade). No caso da sedimentação de uma partícula em fluido viscoso real, esta atinge rapidamente a velocidade de queda constante (velocidade terminal). Isto implica que, a partir de então, não há mais conversão de energia potencial em energia cinética. Em outras palavras, toda a energia potencial é perdida. Quando partículas se movem em conjunto, além da perda de toda a energia potencial, os rearranjos geométricos entre as partículas (adensamento) impõem uma perda adicional de energia cinética, que se observa na real diminuição da velocidade de sedimentação.

2.3. Perda de energia proporcional à energia cinética no caso de adensamento

Considerando a observação de que, ao longo da queda conjunta de partículas, há rearranjos geométricos (adensamento) que induzem perda de energia cinética, podem-se tecer alguns comentários quanto à quantificação desta perda de energia. Considerando a informação da Equação 4, pode-se inicialmente propor a seguinte relação:

$$dE = w_1 \cdot m \cdot V^2/2 \cdot d(1-\phi) \cdot L \quad (5)$$

Na equação acima, w_1 é uma constante de proporcionalidade que envolve também a massa específica (ρ) do fluido e o diâmetro (D) das partículas, ambas grandezas conhecidas; m é a massa da partícula. Em outras palavras, uma variação infinitesimal da energia (E) do conjunto de partículas, decorrente de uma variação infinitesimal do volume disponível ($1-\phi$), é proporcional à energia cinética do conjunto de partículas. Contudo, a Equação 4 envolve ainda a informação da dimensão L , vinculada ao espaço livre a ser vencido. Considerando as relações descritas pelas Equações 1 e 2, pode-se dizer que L deve ser função de $(1-\phi)$, muito embora a forma dessa função permaneça desconhecida. Utilizando expansão em série de potências, pode-se dizer que:

$$L = \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot (1-\phi)^i \quad (6)$$

Os coeficientes α_i são desconhecidos. Dessa série decorre que a Equação 5, para seguir a forma da Equação 4, pode ser reescrita na forma:

$$dE = w_1 \cdot \sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot (1-\phi)^i \cdot \frac{m \cdot V^2}{2} \cdot d(1-\phi) \quad (7)$$

A velocidade relativa entre partículas de fluido confunde-se com a própria velocidade de queda das partículas quando se tem uma partícula única ou uma concentração volumétrica muito baixa. Porém, quando há partículas próximas entre si, ocorre um retardo no movimento de cada uma, que se reflete no movimento do conjunto de partículas. Considerando a conservação de massa, o fluido movimentava-se em sentido contrário ao das partículas e a velocidade relativa (V) é a soma, em módulo, das velocidades do fluido e das partículas (V_p). No cálculo da perda de energia, continua sendo necessária a velocidade relativa, mas é mais adequado, neste desenvolvimento, representar a Equação 7 em termos da velocidade das partículas. Partindo do princípio da conservação de massa (ver Anexo), a relação entre V e V_p pode ser descrita como:

$$V = \frac{V_p}{1-\phi} \quad (8)$$

O uso dessa velocidade faz com que se obtenha uma equação derivada da Equação 7, na forma:

$$dE = w_1 \cdot \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i \cdot (1-\phi)^i}{(1-\phi)^2} \cdot \frac{m \cdot V_p^2}{2} \cdot d(1-\phi) \quad (9)$$

A Equação 9 permite substituir a Equação 7. A Equação 4 ainda apresenta o coeficiente de arrasto (C_D). Este coeficiente assume valor constante para grandes valores do número de Reynolds $\left(\frac{V_p \cdot D}{\nu}\right)$, onde ν é a viscosidade cinemática do fluido. As maiores velocidades relativas são atingidas para as menores concentrações de partículas. Assim, caso se verifique a possibilidade de uso do coeficiente de arrasto constante, esta condição deverá ser válida para as menores concentrações de partículas (Equação 9). Por outro lado, o coeficiente de arrasto varia com o inverso do número de Reynolds quando este apresenta valores baixos (baixas velocidades), o que, na presente abordagem, é obtido para elevadas concentrações de partículas. Utilizando o fator $w_1 \propto (V \cdot D)^{-1}$, considerando as Equações 2, 8 e 9, tem-se que:

$$dE = w_2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \cdot (1-\phi)^i}{(1-\phi)^2} \cdot \frac{m \cdot V_p}{2} \cdot d(1-\phi) \quad (10)$$

As formas das Equações 9 e 10 diferem no expoente da velocidade. Evidentemente os coeficientes α_i também podem assumir valores diferentes. A Equação 10 apresenta uma nova constante de proporcionalidade (w_2) que envolve o diâmetro das partículas e as propriedades físicas do fluido. Resumindo os desenvolvimentos desta seção, a Equação 9 é recomendada para baixas concentrações de

partículas, enquanto que a Equação 10 é recomendada para elevadas concentrações.

2.4. Velocidade de sedimentação considerando a conservação de massa

É comum referenciar-se à velocidade de sedimentação apenas com a Lei de Stokes (velocidade terminal constante). Contudo, esta velocidade tem validade apenas para partículas isoladas, ou seja, concentrações tendendo a zero. Para situações nas quais sedimentam conjuntos de partículas, é mais apropriada a relação linear entre velocidade de sedimentação e concentração (ver Anexo):

$$V_p = V_o \cdot (1 - \phi) \quad (11)$$

Na equação acima, V_o é uma velocidade de referência, válida para concentração volumétrica (ϕ) tendendo a zero. Geralmente utiliza-se esta velocidade de referência como sendo aquela decorrente da Lei de Stokes. Mas vale lembrar que a Equação 11 é obtida para movimentos verticais em contra-corrente (sólidos e líquidos em movimentos opostos), com o conjunto de sedimentos mantendo constante a distância média vertical entre as partículas. Em outras palavras, utilizando V_o como a velocidade terminal constante nesta equação, embora se tenha partido da conservação de massa e de seu vínculo com a concentração de sedimentos, não se consegue prever corretamente o adensamento que ocorre num mesmo fenômeno de sedimentação, isto é, a variação da concentração devido também à aproximação vertical das partículas ao longo do deslocamento. De forma mais geral, pode-se então propor que:

$$V_p = f(1 - \phi) \cdot (1 - \phi) \quad (12)$$

O fator $f(1 - \phi)$ representa uma função qualquer a ser definida com base em princípios físicos.

3 – VELOCIDADE DE SEDIMENTAÇÃO E ENERGIA CINÉTICA

3.1. Balanço de energia para conjunto de partículas em sedimentação

O balanço de energia pode ser escrito, dependente de $(1 - \phi)$, como:

$$\begin{aligned} E_C(1 - \phi) + E_P(1 - \phi) = \\ = E_C(1 - \phi - d(1 - \phi)) + E_P(1 - \phi - d(1 - \phi)) + \\ + dE_C(1 - \phi - d(1 - \phi)) + dE_P(1 - \phi - d(1 - \phi)) \end{aligned} \quad (13)$$

Na equação acima, E_C é a energia cinética e E_P é a energia potencial. Como foi mencionado, a conversão de energia potencial em energia cinética implicaria em aumento de velocidade. Como isto não ocorre, toda a

energia potencial é perdida e pode-se reescrever a Equação 13 como:

$$E_C(1 - \phi) = E_C(1 - \phi - d(1 - \phi)) + dE_C(1 - \phi - d(1 - \phi)) \quad (14)$$

Traduzindo em palavras, a energia cinética existente para a situação $(1 - \phi)$ corresponde à energia que existia para a situação $(1 - \phi - d(1 - \phi))$ mais a variação de energia decorrente da variação do espaço livre $d(1 - \phi)$. A soma das variações de energias cinética e potencial pode ser quantificada pelas Equações 9 ou 10, ou, matematicamente:

$$dE(1 - \phi) = dE_C(1 - \phi) + dE_P(1 - \phi) \quad (15)$$

A maneira mais simples de quantificar dE_C e dE_P separadamente é admitir que ambos sejam proporcionais a dE . Como na presente análise considera-se a Equação 14, que relaciona a energia cinética, basta admitir que:

$$dE_C(1 - \phi) = w_3 \cdot dE(1 - \phi) \quad (16)$$

Note-se que w_3 é uma constante de proporcionalidade.

3.2. Velocidade de sedimentação para coeficiente de arrasto constante (menores concentrações volumétricas)

As Equações 9, 14 e 16 conduzem à Equação 17, na qual se utilizou $E_C(1 - \phi) = \frac{m \cdot V_p^2(1 - \phi)}{2}$ além das expansões em série de Taylor em torno de $(1 - \phi)$, truncadas nos termos de primeira ordem:

$$\begin{aligned} E_C(1 - \phi) = \left[E_C(1 - \phi) - \frac{dE_C(1 - \phi)}{d(1 - \phi)} d(1 - \phi) \right] + \\ + w_1 w_3 \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (1 - \phi)^i}{(1 - \phi)^2} \left[E_C(1 - \phi) - \frac{dE_C(1 - \phi)}{d(1 - \phi)} d(1 - \phi) \right] d(1 - \phi) \end{aligned} \quad (17)$$

Os termos entre colchetes representam as expansões em série de Taylor mencionadas. Efetuando simplificações e desconsiderando parcelas com produtos de termos infinitesimais, resulta:

$$\frac{dV_p^2(1 - \phi)}{V_p^2(1 - \phi)} = w_1 w_3 \frac{\sum_{i=0}^{\infty} \alpha_i (1 - \phi)^i}{(1 - \phi)^2} d(1 - \phi) \quad (18)$$

Definindo novos coeficientes β_i como $\beta_i = w_1 w_3 \alpha_i$, pode-se apresentar a solução da Equação 18 como:

$$V_p = w_4 \cdot e^{\left(-\frac{\beta_0 \cdot \phi}{2 \cdot 1-\phi}\right)} \cdot (1-\phi)^{\beta_1/2} \cdot \prod_{i=2}^{\infty} e^{\left[\frac{\beta_i}{2} (1-\phi)^{i-1}\right]} \quad (19)$$

Na equação acima, w_4 é uma nova constante de integração. A Equação 19 é muito interessante para análises acerca do comportamento da velocidade de sedimentação. Por exemplo:

- Os expoentes dos diferentes fatores envolvem coeficientes que englobam características do meio fluido e o diâmetro das partículas, não sendo, portanto, valores numéricos universais;
- É possível cobrir todo o domínio sobre o qual ϕ varia, ou seja de 0 a 1.

Trata-se, entretanto, de um produtório com infinitos termos. Para uma análise mais simplificada, convém truncar a solução nos termos de menor ordem e verificar o comportamento da resposta. A constante de integração (w_4) deve ser ajustada de forma a garantir a velocidade terminal (V_o) para concentrações volumétricas nulas ($\phi=0$). Seguindo esta proposta, os truncamentos de ordem zero e de ordem um, levam respectivamente a:

$$\frac{V_p}{V_o} = e^{\left(-\frac{\beta_0 \cdot \phi}{2 \cdot 1-\phi}\right)} \quad (20)$$

$$\frac{V_p}{V_o} = e^{\left(-\frac{\beta_0 \cdot \phi}{2 \cdot 1-\phi}\right)} \cdot (1-\phi)^{\beta_1/2} \quad (21)$$

Para truncamentos de ordem N, superiores a um, a Equação 19 toma a seguinte forma genérica:

$$\frac{V_p}{V_o} = e^{\left[-\left(\sum_{i=2}^N \frac{\beta_i}{2}\right)\right]} \cdot e^{\left(-\frac{\beta_0 \cdot \phi}{2 \cdot 1-\phi}\right)} \cdot (1-\phi)^{\beta_1/2} \cdot \prod_{i=2}^N e^{\left[\frac{\beta_i}{2} (1-\phi)^{i-1}\right]} \quad (22)$$

3.3. Velocidade de sedimentação para coeficiente de arrasto variando com o inverso do número de Reynolds (maiores concentrações volumétricas)

As Equações 10, 14 e 16 levam à Equação 23, na qual novamente se utilizou $E_C(1-\phi) = \frac{m \cdot V_p^2 (1-\phi)}{2}$, com os mesmos procedimentos da Equação 17:

$$E_C(1-\phi) = \left[E_C(1-\phi) - \frac{dE_C(1-\phi)}{d(1-\phi)} d(1-\phi) \right] + w_2 w_3 \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (1-\phi)^i}{(1-\phi)^2} \left[\frac{E_C(1-\phi)}{V_p(1-\phi)} - \frac{d\left(\frac{E_C(1-\phi)}{V_p(1-\phi)}\right)}{d(1-\phi)} d(1-\phi) \right] d(1-\phi) \quad (23)$$

Efetuada simplificações e desconsiderando as parcelas com produtos de termos infinitesimais, resulta:

$$dV_p(1-\phi) = \frac{w_2 w_3}{2} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i (1-\phi)^i}{(1-\phi)^2} \cdot d(1-\phi) \quad (24)$$

Definindo novos coeficientes $\gamma_i = w_2 w_3 \alpha_i / 2$, a solução da Equação 24 é:

$$V_p = -\frac{\gamma_0}{1-\phi} + \gamma_1 \cdot \ln(1-\phi) + \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i \cdot (1-\phi)^{i-1} + w_5 \quad (25)$$

Note-se que w_5 é uma nova constante de integração. A Equação 25 deve ser aplicável, segundo a hipótese, para $\phi \rightarrow 1$, o que faz com que w_5 , γ_0 e γ_1 se igualem a zero. Resta, portanto, um somatório de potências de $(1-\phi)$, de acordo com a seguinte equação:

$$V_p = \sum_{i=2}^{\infty} \gamma_i \cdot (1-\phi)^{i-1} \quad (26)$$

Na Equação 26, as constantes ainda podem ser ajustadas (caso seja desejado) para representar a velocidade terminal (V_o) para $\phi=0$. Embora elaborada para as maiores concentrações, ou seja $\phi \rightarrow 1$, esta forma de abordagem pode cobrir continuamente toda a faixa de variação de ϕ .

4 – COERÊNCIA PRÁTICA DAS EQUAÇÕES PROPOSTAS

Os desenvolvimentos analíticos descritos nos itens anteriores produziram duas formas explícitas (Equações 22 e 26) para quantificar a variação da velocidade de sedimentação com a concentração de partículas. Note-se ainda que a Equação 26 é apenas recomendada para concentrações volumétricas tendendo ao limite máximo ($\phi \rightarrow 1$). Diante disso, o presente texto buscou comparar a solução analítica fornecida pela Equação 22 com dados experimentais e outras formulações empíricas e semi-empíricas apresentadas na literatura.

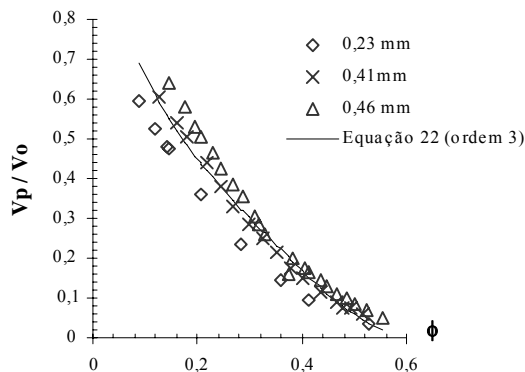


Figura 1. Ajuste da equação proposta aos dados experimentais de Tomkins et al. (2004) para sedimentação de areias.

Uma primeira análise utilizou dados experimentais de sedimentação de areias (Tomkins et al., 2004), de forma a calibrar a Equação 22, além de verificar a ordem de truncamento que melhor se acomoda a esses dados. Os resultados desta análise são fornecidos pela Figura 1.

Conforme ilustra a Figura 1, a equação proposta neste trabalho se ajusta bem aos dados experimentais, bastando para isso utilizar baixas ordens de truncamento. O truncamento de terceira ordem conduziu ao melhor ajuste da curva. Truncamentos de ordem superior proporcionaram incongruência dos resultados, apresentando um ponto de mínimo para concentrações volumétricas em torno de 0,5. A Tabela 1 fornece os valores dos parâmetros ajustados pela referida calibração.

Tabela 1. Parâmetros calibrados com base nos dados experimentais de Tomkins et al. (2004) com truncamento de terceira ordem.

β_0	35,12583
β_1	-82,71052
β_2	52,64647
β_3	2,07103

A curva obtida com os parâmetros ajustados também fornece boa concordância com formulações empíricas e semi-empíricas encontradas na literatura, conforme ilustra a Figura 2.

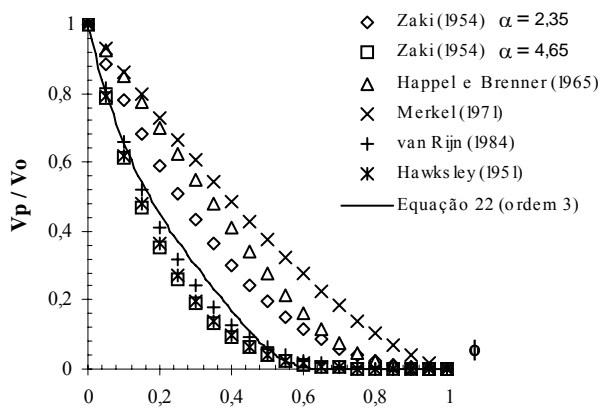


Figura 2. Comparação da equação analítica proposta com relações empíricas e semi-empíricas.

Ainda que as análises realizadas acima conduzam a resultados ajustáveis aos experimentais, um estudo mais refinado pode ser conduzido, de forma a prever a variação dos parâmetros da equação proposta com o tipo de material e o diâmetro das partículas (hipótese também apresentada na dedução analítica). Em estudo recente, Baldock et al. (2004) apresentaram resultados experimentais que confirmam essa hipótese.

Seguindo esta idéia, a Figura 3 apresenta resultados do ajuste da equação sugerida a dados experimentais de areias com diferentes diâmetros. Note-se que, para cada

diâmetro, pode-se ajustar perfeitamente uma curva. Os parâmetros apresentam também sensível variação com o diâmetro da partícula, conforme ilustra a Figura 4.

Uma relação ainda pode ser obtida, permitindo relacionar cada parâmetro com o diâmetro da partícula. Os dados disponíveis sugerem um ajuste por polinômios de segunda ordem, os quais estão relacionados na Tabela 2.

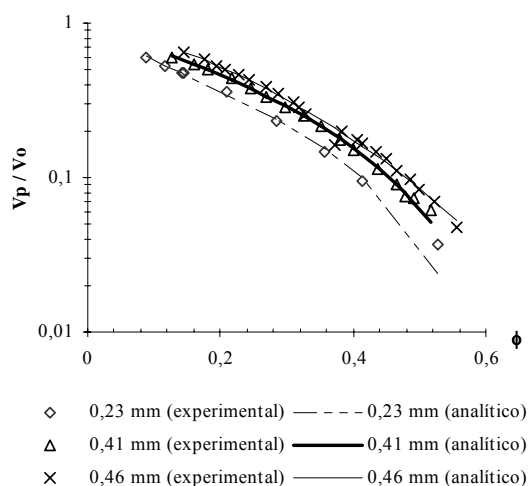


Figura 3. Curvas analíticas ajustadas para sedimentação de areias com diferentes diâmetros.

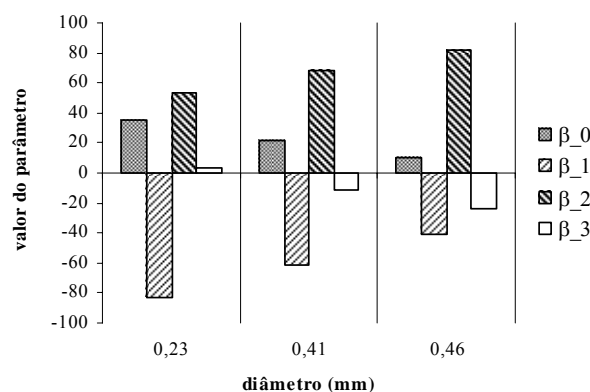


Figura 4. Variação dos parâmetros da equação analítica proposta com o diâmetro da partícula de areia.

Tabela 2. Variação dos parâmetros da Equação 22 com o diâmetro da partícula de areia em sedimentação.

$\beta_0(D)$	$-734,93 \cdot D^2 + 398,47 \cdot D - 17,888$
$\beta_1(D)$	$1209,80 \cdot D^2 - 653,97 \cdot D + 3,837$
$\beta_2(D)$	$840,89 \cdot D^2 - 454,32 \cdot D + 113,05$
$\beta_3(D)$	$-734,66 \cdot D^2 + 391,31 \cdot D - 47,928$

Uma análise similar pode ser conduzida para diferentes tipos de material. Seguindo o mesmo procedimento, foi possível realizar a determinação dos parâmetros para diferentes diâmetros de esferas de vidro, com base nos resultados experimentais de Baldock et al. (2004). As curvas ajustadas são ilustradas pela Figura 5. Como na sedimentação de areias, os parâmetros da equação analítica são sensíveis à variação do diâmetro da partícula, o que pode ser representado pela Figura 6.

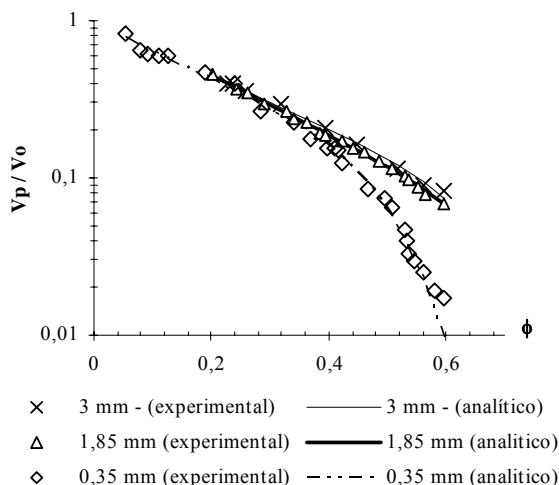


Figura 5. Curvas analíticas ajustadas para sedimentação de esferas de vidro com diferentes diâmetros.

Analogamente ao caso das areias, a variação dos parâmetros com o diâmetro pode ser avaliada por um polinômio do segundo grau, gerando as relações contínuas resumidas pela Tabela 3.

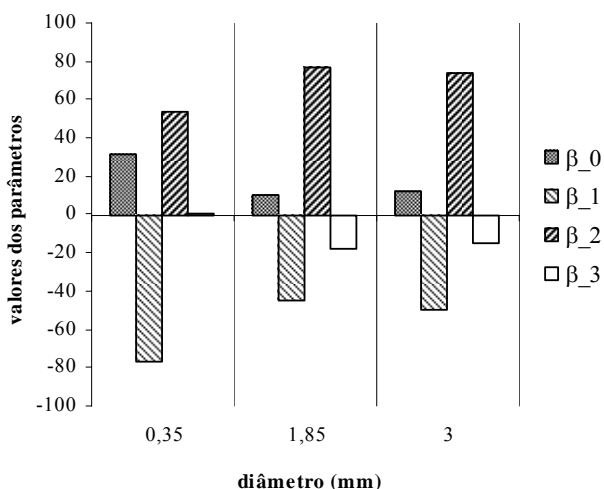


Figura 6. Variação dos parâmetros da equação analítica proposta com o diâmetro da esfera de vidro.

Tabela 3. Variação dos parâmetros da Equação 22 com o diâmetro da esfera de vidro em sedimentação.

$\beta_0(D)$	$11,888 \cdot D^2 - 57,048 \cdot D + 76,538$
$\beta_1(D)$	$-18,422 \cdot D^2 - 87,367 \cdot D - 145,83$
$\beta_2(D)$	$-12,944 \cdot D^2 + 61,822 \cdot D + 4,936$
$\beta_3(D)$	$10,517 \cdot D^2 - 49,765 \cdot D + 40,040$

As relações obtidas nesta seção demonstram que a variação da velocidade de sedimentação depende não somente da concentração de partículas, mas também do seu diâmetro e do tipo de material. A função analítica obtida (Equação 22) permite abranger todos os cenários, de acordo com o ajuste adequado de seus parâmetros. De especial interesse são as relações fornecidas pela Tabela 2, permitindo generalizar casos práticos de sedimentação de areias.

Também é possível verificar que a equação proposta apresenta coerência para menores ordens de truncamento. Baldock et al. (2004), apresentaram uma breve revisão de literatura que se baseia na proposição semi-empírica de Richardson e Zaki (1954), a qual pode ser obtida da Equação 22 com truncamento de segunda ordem, impondo $\beta_0 = \beta_2 = 0$. Tem-se, neste caso:

$$\frac{V_p}{V_o} = (1 - \phi)^{\beta_1/2} \quad (27)$$

Hawksley (1951), citado por Wan e Wang (1994), apresentou uma interessante equação, representada com as constantes aqui definidas:

$$\frac{V_p}{V_H} = \xi \cdot e^{\left(\frac{\beta_0}{2} \frac{\phi}{1-k\phi}\right)} \cdot (1 - \phi)^2 \quad (28)$$

A Equação 28 é muito semelhante à Equação 21 (truncamento de primeira ordem), considerando $\beta_1 = 4$ e $V_o = V_H \cdot \xi$. Para Hawksley, o fator ξ vale 2/3 para eventos com floculação e 1 para eventos sem floculação, $\beta_0 = 5$ para esferas e $k = 39/64$ em qualquer situação. Na presente dedução evidentemente tem-se $k = 1$ e $\xi = 1$.

Assim, a formulação desenvolvida neste trabalho abrange uma série de proposições vistas na literatura de sedimentação, bastando considerar as menores ordens de truncamento.

5 – CONCLUSÕES

Os procedimentos seguidos neste trabalho, os quais permitiram obter as Equações 22 e 26, vinculam a velocidade de sedimentação à perda de energia quando se varia a concentração volumétrica de sedimentos. As equações incorporam a conclusão da aplicação do princípio da conservação de massa, além de permitir previsões adequadas (próximas às observações experimentais consultadas) em toda faixa de variação possível da concentração volumétrica. As suas formas simples e

explícitas acrescentam a conveniência prática de manuseio. Coeficientes e expoentes envolvem propriedades do sistema fluido-partícula, mostrando que não se tratam de valores numéricos rigorosamente universais.

Todo o desenvolvimento analítico realizado permitiu a geração de equações, para a velocidade de sedimentação, que generalizam formas de caráter semi-empírico encontradas na literatura. Assim, as formulações apresentadas constituem uma relação obtida a partir de princípios físicos clássicos, possibilitando cobrir uma vasta gama de cenários de sedimentação.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à FAPESP, CNPq, CAPES, FINEP e FIPAI, instituições brasileiras de suporte à pesquisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

BALDOCK, T.E., TOMKINS, M.R., NIELSEN, P., HUGHES, M.G.; "Settling Velocity of Sediments at High Concentrations". Coastal Engineering, 51, pp.: 91-100, 2004.
 HAPPEL, J., BRENNER, H.; "Low Reynolds Number Hydrodynamics", Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, N.J., U.S.A., 1965.
 MERKEL, W.; "Untersuchungen über das Verhalten des belebten Schlammes im System Belebungs-Nachklärbecken", Gewässerchutz-Wasser-Abwasser, No.5, Institut für Siedlungswasserwirtschaft, TH, Aachen, 1971.
 RICHARDSON, J.F., ZAKI, W.N.; "Sedimentation and Fluidisation: Part 1", Trans. Inst. Chem. Eng., 32, pp.: 35-53, 1954.
 TOMKINS, M.R., BALDOCK, T.E., NIELSEN, P.; "Hindered Settling Velocity for Sand", Abstract ICCE, 2004.
 VAN RIJN, L.C.; "Sediment Transport, Part II: Suspended Load Transport", Journal of Hydraulic Engineering, ASCE, 110(11), pp.: 1613-1641, 1984.
 WAN, Z., WANG, Z.; "Hyperconcentrated Flow", IAHR Monograph, Balkema, pp.: 290, 1994.

ANEXO A

Sabe-se que a velocidade de sedimentação diminui com o aumento da concentração de partículas. Considerando somente deslocamentos verticais, o uso da conservação integral de massa, para partículas em sedimentação, leva a uma dependência linear entre a velocidade de sedimentação e a concentração volumétrica. Para obter essa relação, seguem-se os esquemas das Figuras A1 e A2.

Da equação integral de conservação de massa:

$$a \cdot V_1 = A \cdot V_2 \quad \text{ou} \quad \phi \cdot V_1 = (1 - \phi) \cdot V_2 \quad (A1)$$

Onde:

- a = área ocupada pelas partículas;

- A = área total;
- $a / A = \phi$.

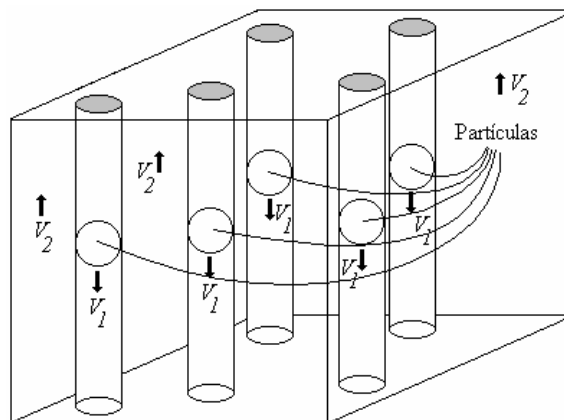


Figura A1. Esquema de sedimentação (para baixo (V₁)) e escoamento da água (para cima (V₂)).

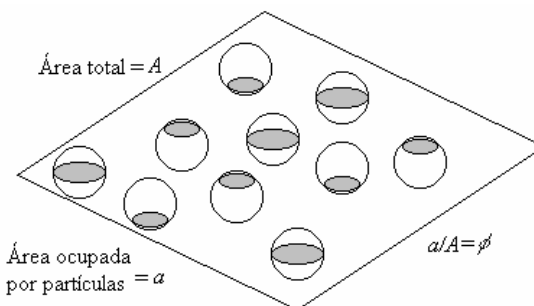


Figura A2. Relação entre a área total ocupada pelas partículas e a área total do escoamento.

A velocidade relativa entre uma determinada partícula e o fluido pode ser dada pela Lei de Stokes (V₀). No presente caso, vale a seguinte relação:

$$V_0 = V_1 + V_2 \quad (A2)$$

Das Equações A1 e A2:

$$V_p = V_0 \cdot (1 - \phi) \quad (\text{uma vez que } V_1 = V_p) \quad (A3)$$