

## OTIMIZAÇÃO ESTRUTURAL DE LAJES FORMADAS POR VIGOTAS TRELIÇADAS COM E SEM PROTENSÃO

*STRUCTURAL OPTIMIZATION OF SLABS FORMED BY LATTICE JOISTS WITH AND WITHOUT  
PRESTRESSING*

**Tobias Ribeiro Ferreira<sup>1</sup>, Maria Cristina Vidigal de Lima<sup>2</sup>, Rodrigo Gustavo Delalibera<sup>3</sup>**  
Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Civil, Uberlândia, MG, Brasil.

<sup>1</sup>Mestre em Engenharia Civil. E-mail: tobias.civil@gmail.com

<sup>2</sup>Doutora em Engenharia Civil, Estruturas. E-mail: macris@ufu.br

<sup>3</sup>Doutor em Engenharia Civil, Estruturas. E-mail: delalibera@ufu.br.

### RESUMO

Este artigo apresenta o estudo de lajes unidirecionais formadas por vigotas treliçadas pré-fabricadas com e sem protensão. Como enfoque principal aborda o dimensionamento de vigotas treliçadas e faz algumas comparações entre essas soluções estruturais. Para os dimensionamentos das lajes desenvolveu-se uma rotina em planilha eletrônica, a qual permitiu realizar também o processo de otimização a fim de estudar parâmetros importantes para o dimensionamento tais como: carregamento, intereixo, resistência característica do concreto a compressão e área de aço. A otimização foi aplicada para alcançar um dimensionamento cuja flecha final fosse igual ao valor limite prescrito pela norma ABNT NBR 6118:2014, bem como obter o menor peso próprio possível. Observa-se por meio dos resultados que com o uso das vigotas treliçadas protendidas, para vãos de 6 a 9 m, se consegue uma redução média do peso da laje em torno de 21%, comparado às vigotas não protendidas. Conclui-se que, considerando as restrições impostas no estudo, o vão máximo para o dimensionamento de vigotas sem protensão é de 9 m, enquanto que com o uso da vigota protendida o limite é em torno de 15 m.

**Palavras-chave:** laje nervurada, vigota treliçada, protensão, otimização.

### ABSTRACT

This paper presents the study of one-way slabs formed by lattice joist with and without prestressing. The objective of this study is to compare the technical performance for each structural solution, taking into account the prestress competitiveness. For the slab design procedure and the optimization analysis, a routine is developed in an electronic spreadsheet. Some parameters such as loading, length between the axis, strength of concrete, steel area and prestressing force is considered in the analysis. The optimization process is carried out with two objectives. The first is to obtain a design whose final displacement was equal to the limit value prescribed by ABNT NBR 6118:2014. The second objective is to obtain the maximum vertical displacement that minimize the slab weight. The slab is considered simple supported and formed by individual beams. The results show that the use of the lattice with prestressed joists is available to spans such as 6 m to 9 m, which an average weight reduction of the slab is around 21% compared to not prestressed joists. It is concluded that, for the restrictions imposed in this study, the maximum span for the design of slabs with not prestressed is 9 m, while with the use of prestressed joist the limit is around 15 m.

**Keywords:** ribbed slab, lattice joist, prestressing, optimization.

### 1 – INTRODUÇÃO

Os princípios gerais que devem nortear os projetos das estruturas formadas por elementos pré-moldados, segundo El Debs (2017), consistem na concepção do projeto visando a utilização de concreto pré-moldado, na solução das interações da estrutura com as outras partes da construção, no uso de elementos da mesma faixa de peso e na minimização do número de ligações e tipos de elementos.

Em obras de engenharia do setor privado, com parceria do governo federal, estadual ou municipal, muitas vezes, não se tem tempo hábil para que seja feito o estudo do projeto de forma a considerar detalhadamente a concepção estrutural. Isso dificulta ou mesmo impede que aconteçam os esperados benefícios da pré-moldagem em concreto, tanto na gestão do processo construtivo, quanto na escolha do sistema estrutural mais adequado.

No Brasil, até o ano de 2007, pelo menos 70% das

obras pré-moldadas executadas não foram originalmente concebidas para a utilização do sistema, mas sim, adaptadas de uma concepção arquitetônica pensada para uma estrutura em concreto moldado no local. Essa realidade é ainda mais crítica em regiões fora dos grandes centros, onde há uma resistência maior ao emprego de novas tecnologias, especialmente no caso da pré-moldagem em concreto (ALBUQUERQUE, 2007).

Nestes termos, optar por uma maior ou menor pré-fabricação depende das características da obra, tais como condições de canteiro, prazo e disponibilidade de recursos.

As lajes nervuradas formadas por vigotas pré-moldadas são constituídas basicamente de elementos lineares dispostos espaçadamente em uma direção, elementos de enchimento e concreto moldado no local.

Naaman (2012) ressalta que o concreto armado e o concreto protendido não podem ser considerados concorrentes pois, em termos de aplicação, um

complementa o outro. De qualquer forma, a pequena necessidade de manutenção, baixo consumo de energia durante a moldagem e versatilidade, são comuns tanto ao concreto armado quanto ao concreto protendido.

El Debs (2017) observa que lajes de vigotas treliçadas tendem a apresentar maiores deformações que as equivalentes maciças moldadas no local. No sentido de fornecer uma alternativa construtiva com menor deformação, mas mantendo algumas características favoráveis das lajes de vigotas treliçadas, tem-se o desenvolvimento da vigota protendida com armação treliçada. Merlin *et al.* (2005) apresentam valores experimentais comprovando a significativa redução de flecha comparada à alternativa sem protensão.

Neste trabalho explora-se o comportamento das lajes formadas por vigotas pré-moldadas treliçadas com e sem protensão, a fim de aproveitar melhor as vantagens de sua aplicação. Para este fim, é desenvolvida uma rotina de dimensionamento em planilha eletrônica, com a aplicação de um método de otimização não linear, para melhor entendimento dos parâmetros importantes ou influentes em cada solução estrutural do dimensionamento. Em termos gerais, busca-se a melhor relação desempenho estrutural, menor peso próprio e flecha limite.

## 2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Muitos são os elementos estruturais que permitem sua pré-produção, dentre eles podem ser destacadas as lajes formadas por vigotas treliçadas utilizadas em edificações residenciais e comerciais.

Uma técnica mais recente adota a inserção de cabos de protensão na sapata das vigotas treliçadas. Esse tipo de estrutura fica caracterizado como um elemento pré-moldado de seção parcial que elimina o uso de fôrmas na concretagem e, ainda, possui potencial para economia nos escoramentos, conforme Lima, Castilho e Gesualdo (2013).

### 2.1 Lajes nervuradas formadas por vigotas pré-moldadas

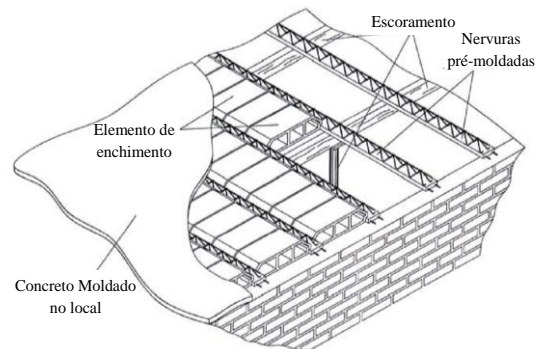
O processo de produção das estruturas de concreto pré-moldado consiste de etapas transitórias que vão desde a execução desses elementos, passam por etapas de transporte e montagem e, por fim, chegam à realização das ligações definitivas. Tais etapas podem apresentar as solicitações mais críticas para os elementos estruturais desse tipo de estrutura (EL DEBS, 2017).

As aplicações mais comuns de lajes formadas por elementos pré-moldados são nos edifícios, onde as variações comumente utilizadas são: painéis duplos “T”, painéis alveolares, elementos pré-laje e, lajes formadas por nervuras pré-moldadas. As lajes nervuradas podem ser formadas por vigotas pré-moldadas com elementos de enchimento, como os blocos cerâmicos vazados ou de poliestireno expandido (EPS), que são colocados sobre os pré-moldados para, em seguida, serem preenchidos com concreto moldado no local (Figura 1).

Sob encomenda, as vigotas treliçadas podem ser fabricadas com armaduras adicionais introduzidas na base de concreto, sem que acarrete dificuldade de fabricação. El

Debs (2017) destaca que a utilização desse tipo de vigota treliçada favorece a execução de lajes armadas nas duas direções.

Figura 1 – Laje formada por nervuras pré-moldadas treliçadas



Fonte: El Debs (2017).

Segundo Droppa Júnior (1999), as lajes treliçadas já são utilizadas no Brasil há cerca de 40 anos, porém, a difusão e surgimento de fábricas com capacidade para produzir variados arranjos (unidirecionais ou bidirecionais) só ocorreu a partir da década de 90.

As principais vantagens no uso das lajes treliçadas são:

- Capacidade de vencer grandes vãos livres e suportar altas cargas, capacidade de suportar paredes apoiadas diretamente sobre a laje, desde que feitas previamente as considerações necessárias;
- Possibilidade de redução na quantidade de vigas e conseqüentemente de pilares e fundações do sistema estrutural de qualquer edificação;
- Redução do custo final da estrutura se considerado economia de aço, concreto, fôrma e mão-de-obra. Menor peso próprio com conseqüente alívio das cargas em vigas, pilares e fundações;
- Eliminação do uso de fôrma para a execução das lajes.

Como desvantagens dos sistemas de lajes com vigotas pré-moldadas, quando comparados aos pavimentos tradicionais como as lajes maciças de concreto, Droppa Júnior (1999) e Magalhães (2001) destacam alguns pontos:

- Deve ser verificado o comportamento das lajes para o estado limite de deformações excessivas, uma vez que são formados por elementos lineares muito esbeltos;
- Em edifícios com múltiplos pavimentos deve-se analisar a resistência do plano da laje para a transferência de ações horizontais, de modo que as lajes pré-moldadas apresentem comportamento efetivo de diafragma.

### 2.2 Vigotas pré-moldadas treliçadas protendidas

Segundo Albuquerque *et al.* (2005) e Merlin *et al.* (2005), a vigota treliçada protendida é simples de ser produzida pois dispensa o uso de extrusora e ainda permite a inclusão de armadura passiva no seu processo de fabricação.

De acordo com Albuquerque *et al.* (2005) o tensionamento dos fios é feito numa pista de protensão e, em seguida, as treliçadas são posicionadas para concretagem. O sistema tem operação rápida, simples, com

baixo custo e fácil adaptação aos diversos tamanhos de vãos. Depois de o concreto atingir a resistência desejada, os fios são liberados e o elemento está pronto para o uso (Figura 2).

Figura 2 – Pista de protensão com detalhe da cabeceira ativa



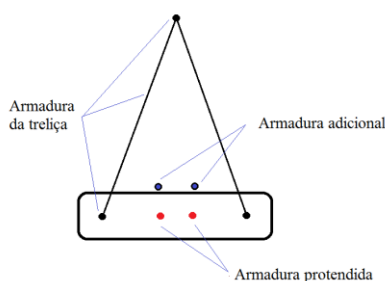
Fonte: Os Autores (2017).

Como vantagens para as vigotas treliçadas protendidas, podem ser citadas:

- Redução do número de escoramentos se comparado às lajes formada apenas por treliças simples;
- Melhores condições de atender o estado limite de deformação excessiva devido a protensão;
- Redução no peso individual dos elementos quando comparados com as vigotas protendidas.
- Redução da fissuração durante o transporte das peças;
- Controle mais eficiente da fissuração, podendo em alguns casos, até eliminá-la;
- Redução das quantidades de concreto e de aço devido ao uso de materiais de maior resistência;
- Capacidade de vencer vãos maiores que os sistemas não protendidos.

Avilla Júnior (2009) ressalta que a aplicação de lajes com vigotas treliçadas tem sido uma solução muito utilizada em praticamente todo país. Porém, o uso de vigotas treliçadas protendidas ainda é restrito, com poucas referências técnicas (Figura 3). Até o momento, há alguns exemplos de aplicação dessa técnica em construções usuais na cidade de Fortaleza e na região do Triângulo Mineiro.

Figura 3 – Esquema de armação da vigota treliçada protendida



Fonte: Os Autores (2017).

### 2.3 Otimização

Os processos utilizados com o intuito de conhecer os parâmetros ótimos de dimensionamento para as lajes formadas por vigotas treliçadas com e sem protensão são apresentados nesta seção. O termo otimização refere-se ao estudo de problemas em que se busca minimizar ou maximizar uma função através da escolha sistemática dos valores de variáveis dentro de um conjunto possível para o problema proposto.

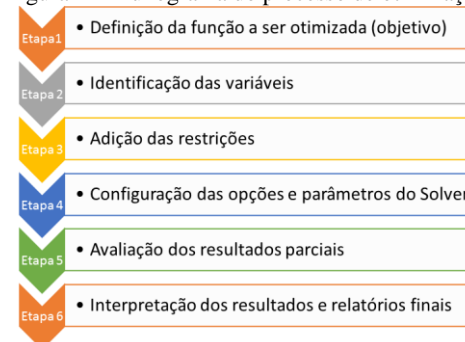
Para os problemas de engenharia, quando se consegue construir modelos matemáticos que sejam representativos ou quando se tem equações e verificações para atender aos estados limites último e de serviço, é possível aplicar as técnicas de otimização para maximizar ou minimizar essas funções. O objetivo é encontrar uma "solução ótima" do problema, ou seja, obter um cenário que resulte no melhor desempenho possível do sistema segundo os critérios de desempenho previamente definidos.

Forni (2005) abordou o problema de otimização por meio da minimização da função custo utilizando o método não linear de gradiente reduzido genérico (GRG2). A ideia do gradiente reduzido generalizado é converter um problema com restrição em um problema sem restrição. As equações lineares são usadas para reduzir o número de variáveis independentes das funções de restrição. A partir disso aplica-se as características próprias do GRG e chega-se à solução do problema a ser otimizado.

Devido à quantidade de equações e verificações necessárias para o dimensionamento das lajes com nervuras pré-moldadas treliçadas, fez-se necessário o uso de um método computacional, para tal foi escolhido o recurso Solver disponível em planilha eletrônica. O Solver é uma ferramenta que faz parte de um conjunto de comandos denominados de análise de hipóteses. Com o Solver, pode-se localizar um valor ótimo (máximo ou mínimo) para uma célula que contenha alguma fórmula, associada ao objetivo. Essa célula objetivo permite que sejam impostas restrições ou limites, considerando os valores ou fórmulas que estejam contidas em células da mesma planilha ativa. De forma sucinta, pode-se dizer que o Solver trabalha com um grupo de células, denominadas variáveis de decisão ou simplesmente variáveis, que são os valores que a ferramenta altera para que seja alcançado o objetivo e respeitadas as restrições.

O primeiro parâmetro a ser definido é a escolha do método de solução. O Solver possui três algoritmos para desenvolver a otimização do problema: o método GRG2 utilizado para problemas não lineares uniformes, o método LP Simplex, utilizado para problemas que sejam lineares e o método Evolutionary aplicado quando o problema é não linear e não uniforme. Para aplicação do Solver como ferramenta de otimização foram seguidas as etapas organizadas no fluxograma da Figura 4.

Figura 4 – Fluxograma do processo de otimização



Fonte: Os Autores (2017).

Os parâmetros ou variáveis que definem a otimização do sistema de lajes nervuradas, são: a função objetivo, escrita em função das variáveis de projeto, com a finalidade de se alcançar a flecha limite e a minimização do peso próprio da laje; as restrições de projeto, que são os limites ou condições a serem respeitados no processo de busca do resultado ótimo.

A flecha limite é uma grandeza física definida na seção 13.3 da norma ABNT NBR 6118:2014 como valores práticos utilizados para a verificação em serviço do estado-limite de deformações excessivas da estrutura e, considerando as situações do estudo, limita-se a no máximo 0,40% do comprimento do vão ( $L/250$ ).

Todas as lajes analisadas neste trabalho são nervuradas unidirecionais, consideradas sem continuidade e tiveram o dimensionamento realizado entre os domínios 2 e 3. As treliças padronizadas que fazem parte do banco de dados do processo de dimensionamento são as definidas pela norma ABNT NBR 14859-3:2016. Ressalta-se que todas são constituídas por aço CA-60.

### 3 – METODOLOGIA

Além das verificações necessárias para que as lajes treliçadas possam apresentar comportamento estrutural satisfatório, é importante explorar uma faixa para os comprimentos dos vãos e conhecer as variáveis que influenciam o dimensionamento. Assim, o estudo da viabilidade estrutural, para o sistema de lajes formadas por vigotas treliçadas com e sem protensão, é desenvolvido neste trabalho por meio de uma planilha eletrônica, na qual pode ser aplicada uma ferramenta de otimização.

Essa planilha contém desde a entrada de dados para o pré-dimensionamento da laje e obtenção dos carregamentos, obtenção dos esforços solicitantes para a geometria de laje adotada, até a realização do dimensionamento propriamente dito, na qual são verificados os deslocamentos considerando o efeito da fluência e abertura excessiva de fissuras.

Uma vez desenvolvido o dimensionamento, respeitando as prescrições normativas nacionais, é apresentado neste trabalho o desenvolvimento do procedimento de otimização que utiliza o método não linear de gradiente reduzido genérico (GRG2). São consideradas como restrições os valores de  $f_{ck}$ , a quantidade de aço necessária às vigotas, o intereixo, os domínios para o dimensionamento, a abertura de fissuras entre outras. A função objetivo considerada consiste em obter a flecha limite e o menor peso da laje.

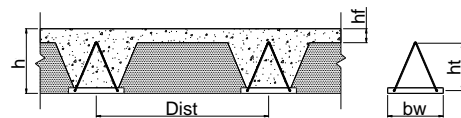
A utilização do GRG2 justifica-se perante os demais métodos disponíveis, pois o algoritmo de gradientes reduzidos generalizados proposto por Lasdon *et al.* (1978) trata da solução de problemas de otimização não lineares nos quais a função objetivo pode ter não linearidades de qualquer forma. Isso torna-se interessante para o estudo, visto que no dimensionamento estão envolvidas equações de segundo até o quarto grau, tais como as equações de flecha e de inércia.

### 3.1 Considerações sobre o dimensionamento

Para o adequado dimensionamento e funcionamento das lajes nervuradas treliçadas, considera-se que as prescrições da norma ABNT NBR 14859:2016 sejam respeitadas. Assim, os parâmetros a serem definidos (Figura 5) para as lajes são:

- Vãos;
- Sobrecargas recomendadas para o tipo de utilização;
- Carregamentos lineares ou pontuais atuantes na laje;
- Altura total da laje ( $h$ );
- Espessura da capa de concreto ( $h_f$ );
- Resistência característica de compressão do concreto;
- Intereixo ou distância entre as nervuras ( $Dist$ );
- Largura da base das nervuras ( $b_w = 12$  cm);
- Tipo de material de enchimento;
- Altura e armadura da treliça ou vigotas ( $h_t$ ).

Figura 5 – Esquema de laje com vigotas treliçadas



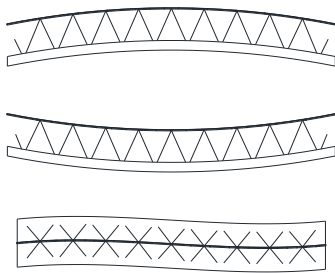
Fonte: Os Autores (2017).

Com relação ao dimensionamento de lajes com vigotas protendidas ou treliçadas protendidas, algumas diretrizes devem ser seguidas no cálculo:

- Verificação da vigota isolada: verificação do elemento após a transferência da força de protensão;
- Verificação da vigota na fase de construção: deve ser verificada a necessidade ou não de escoramento;
- Estado limite de fissuração: deve ser projetada de tal forma que previna os efeitos da fissuração;
- Estado limite de deformação: deve ser projetado levando em consideração os efeitos instantâneos e de retração e fluência;
- Estado limite último para solicitações tangenciais: verificação de resistência à força cortante de elementos sem armadura transversal e verificação do cisalhamento da interface entre os dois concretos;
- Estado limite último para solicitações normais: verificação da resistência para as solicitações normais.

Logo após a retirada do elemento protendido, deve-se verificar se não há problemas de deformação excessiva advindos dos esforços da protensão. Os desvios mais comuns na geometria do elemento após a retirada da pista de protensão são mostrados na Figura 6.

Figura 6 – Possíveis formas de deslocamentos indesejáveis após a fabricação do elemento



Fonte: Os Autores (2017).

#### 4 – RESULTADOS E ANÁLISES

São apresentados a seguir os resultados da otimização considerando flecha final igual à flecha limite em lajes não protendidas, da minimização do peso próprio, da influência dos valores de partida das variáveis e uma comparação com a resposta do sistema não protendido com o protendido.

##### 4.1 Otimização da flecha final igual à flecha limite em lajes não protendidas

Uma primeira análise para o caso de uma laje com vão de 8 m, com vigotas treliçadas sem protensão é apresentada com o objetivo de atingir a flecha limite. Na Tabela 1 são apresentadas as variáveis de interesse para o dimensionamento tais como o intereixo, a área de armadura da seção transversal, a altura da laje e o  $f_{ck}$ . Destaca-se que os valores escritos na linha de iteração “0” são oriundos do pré-dimensionamento.

O valor em destaque na Tabela 1 é o objetivo final alcançado em decorrência das iterações do processo, ou seja, atingir a flecha de 3,2 cm.

Nessa situação, a convergência para valor de flecha limite ocorreu com 5 iterações, com acréscimo de 23% na altura da laje, 14% no  $f_{ck}$ , 22% no peso total da laje e reduções por volta de 15% no intereixo e 20% para a área de aço quando comparados aos valores de partida.

Tabela 1 – Laje com vão de 8 m sem protensão

Objetivo --> Flecha final = Flecha Limite						
Vão de 8 m - Flecha limite (3,20 cm)						
Iteração	Altura (cm)	$f_{ck}$ (MPa)	Intereixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Peso (kN)	Flecha (cm)
0	40,0	30,0	47,0	1,929	533,35	15,270
1	45,0	30,0	47,0	1,929	568,48	8,081
2	44,9	30,2	46,3	1,929	571,57	7,999
3	43,8	30,5	40,0	1,709	606,14	7,845
4	48,8	30,5	40,0	1,547	647,10	4,327
5	<b>49,2</b>	<b>34,1</b>	<b>40,0</b>	<b>1,547</b>	<b>650,19</b>	<b>3,200</b>

Fonte: Os Autores (2017).

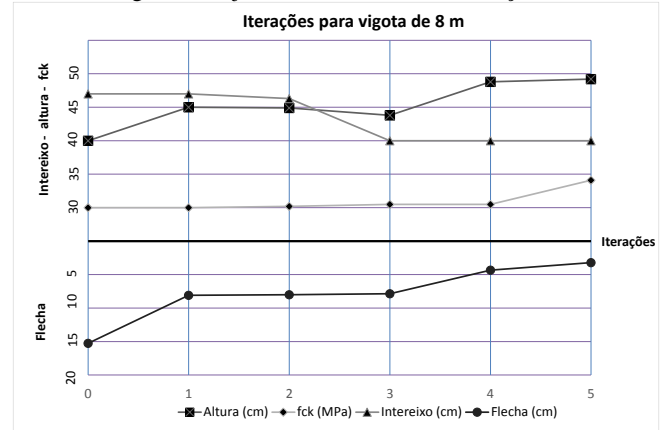
Na Figura 7 pode-se observar o ajuste de algumas variáveis em busca da solução ótima no decorrer de cada iteração (dados da Tabela 1). Também, se pode observar o comportamento de aproximação da função objetivo (flecha) para o valor final. O peso próprio da laje foi tido apenas como um parâmetro em observação. Para o vão de 8 m, o resultado obtido no peso próprio da laje foi de 650,19 kN.

Observou-se que o processo de otimização conseguiu

convergir para o valor de flecha limite definido. Contudo, diante da redução dos comprimentos dos intereixos no decorrer do processo de iteração, tem-se a preocupação com o peso final da laje.

De fato, se for considerada a região de influência para uma nervura apenas, o peso diminui com a redução do intereixo. Entretanto, se for analisada a composição total da laje, o valor do peso é inversamente proporcional à redução do intereixo das nervuras, uma vez que diminui a região composta por material de enchimento, contribuindo para o aumento do peso próprio.

Figura 7 – Ajustes das variáveis nas iterações



Fonte: Os Autores (2017).

##### 4.2 Otimização para minimização do peso próprio

Ao ser definida a função objetivo como minimização do peso próprio da laje, também foram mantidas as mesmas características para a seção de concreto armado, material de enchimento e os materiais de revestimento. Contudo, obteve-se para o peso da laje o valor de 500,88 kN, configurando uma redução na ordem de 23%.

No desenvolvimento do processo de otimização com objetivo de minimizar o peso total da laje, o cálculo da flecha final passou a ser considerado como uma restrição de cálculo. Os valores obtidos no processo iterativo são mostrados na Tabela 2 e na Figura 8 é ilustrado o comportamento das variáveis na busca do menor peso total da laje.

Tabela 2 – Otimização com valores de partida do pré-dimensionamento

Objetivo --> Menor Peso total						
Vão de 8 m – Ação acidental de 1,5 kN/m <sup>2</sup>						
Valores de partida --> Pré-dimensionamento						
Iteração	Altura (cm)	$f_{ck}$ (MPa)	Intereixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha (cm)	Peso (kN)
0	40,0	30,0	47,0	1,929	15,27	533,35
1	80,0	30,0	46,9	1,426	0,302	814,96
2	60,0	30,0	47,4	1,547	1,586	670,65
3	56,5	30,0	47,3	1,547	2,247	646,87
4	54,7	30,0	47,3	1,547	2,700	634,92
5	53,1	30,0	47,2	1,709	3,200	623,76
6	56,2	30,2	65,0	1,929	3,200	550,98
7	52,4	36,2	65,0	1,929	3,200	531,79
8	49,7	41,5	65,0	2,494	3,200	517,77
9	46,5	49,8	65,0	2,494	3,200	501,24
10	46,4	50,0	65,0	2,494	3,200	500,88

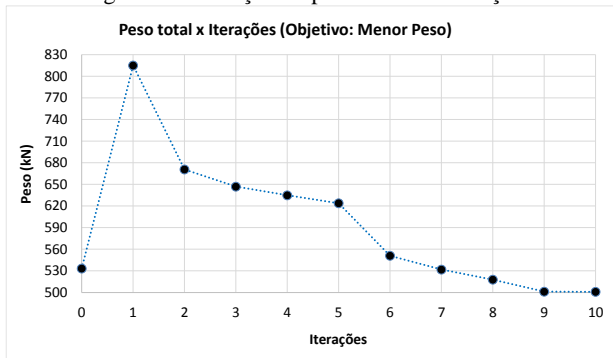
Fonte: Os Autores (2017).

Como se observa, foi possível chegar a um novo valor para o peso total da laje, mantendo o limite estabelecido para a flecha limite.

Destaca-se, ainda, que o número de iterações para a otimização convergir ao valor ótimo foi superior à situação apresentada na seção anterior.

Além do que foi exposto nesta seção, foram realizadas otimizações admitindo-se uma sobrecarga de 2,0 kN/m<sup>2</sup>. Nessa situação percebe-se que a área de aço efetiva foi de 2,294 cm<sup>2</sup> e devido a diferença de 0,10 cm na altura total da laje, o peso total para a laje com ação acidental de 2,0 kN/m<sup>2</sup> foi superior à sobrecarga de 1,5 kN/m<sup>2</sup>.

Figura 8 – Variação do peso total nas iterações



Fonte: Os Autores (2017).

#### 4.3 Influência dos valores de partida das variáveis

Devido às variações existentes na quantidade de ciclos no processo de otimização, foram testadas outras possibilidades para o início das iterações. Essa análise tem como interesse validar a influência dos valores de partida tanto para o número total de iterações, quanto para os resultados obtidos após a convergência.

Na Tabela 3 constam os valores de partida para a altura (36 cm) e entreixo (45 cm) inferiores aos obtidos no pré-dimensionamento (h = 40 cm; entreixo = 47 cm). Na Tabela 4 consta o valor de partida para a altura superior (h = 44 cm) ao obtido no pré-dimensionamento.

Tabela 3 – Otimização com valores de partida abaixo do pré-dimensionamento

GRG2 - Objetivo --> Menor Peso total							
Vão de 8 m							
Partida --> Abaixo do pré-dimensionamento							
Partida	Iteração	Altura (cm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	Entreixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha (cm)	Peso (kN)
Partida	0	36,0	30,0	45,0	2,494	22,15	514,62
1ª	1	76,0	30,0	44,9	1,426	0,39	808,23
2ª	2	56,0	30,0	45,4	1,547	2,28	657,90
3ª	3	53,0	30,0	45,3	1,547	3,13	636,64
4ª	4	52,8	30,0	45,3	1,547	3,20	635,24
5ª	5	56,2	30,2	65,0	1,929	3,20	550,99
6ª	6	52,4	36,2	65,0	1,929	3,20	531,76
7ª	7	49,7	41,5	65,0	2,494	3,20	517,74
8ª	8	46,5	49,8	65,0	2,494	3,20	501,21
9ª	9	<b>46,4</b>	<b>50,0</b>	<b>65,0</b>	<b>2,494</b>	<b>3,20</b>	<b>500,88</b>

Fonte: Os Autores (2017).

Tabela 4 – Otimização com valores de partida acima do pré-dimensionamento

Partida --> Acima do pré-dimensionamento							
Partida	Iteração	Altura (cm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	Entreixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha (cm)	Peso (kN)
Partida	0	44,0	30,0	47,0	1,929	9,150	561,39
1ª	1	84,0	30,0	46,9	1,235	0,230	843,08
2ª	2	64,0	30,0	47,4	1,426	1,090	698,28
3ª	3	60,0	30,0	47,3	1,547	1,584	671,20
4ª	4	56,0	30,0	47,2	1,547	2,370	643,91
5ª	5	54,0	30,0	47,2	1,547	2,930	630,15
6ª	6	53,1	30,0	47,1	1,709	3,200	624,19
7ª	7	56,2	30,2	65,0	1,929	3,200	550,98
8ª	8	52,4	36,2	65,0	1,929	3,200	531,79
9ª	9	49,7	41,5	65,0	2,494	3,200	517,77
10ª	10	46,5	49,8	65,0	2,494	3,200	501,25
11ª	11	<b>46,4</b>	<b>50,0</b>	<b>65,0</b>	<b>2,494</b>	<b>3,200</b>	<b>500,88</b>

Fonte: Os Autores (2017).

Na Tabela 5 é apresentado valor de partida da altura total da laje superior (h = 56 cm) ao valor esperado com o dimensionamento. Assim, a flecha inicial nessa condição é de 2,354 cm, enquanto que para o vão de 8 m o limite é de 3,20 cm.

Por exemplo, observando-se o peso na Tabela 2 o valor inicial foi com 533,35 kN e foram necessárias 10 iterações. Na Tabela 3 iniciou-se com 514,62 kN (9 iterações) e, na Tabela 4, o início se deu com 561,39 kN (11 iterações). Por fim, na Tabela 5, o valor inicial foi de 645,51 kN, com 8 iterações.

Com relação à análise feita nesta seção, pode-se dizer que a quantidade de iterações realizadas pelo método de otimização é sensível aos valores de partida. Contudo, não se consegue fazer uma definição sobre iniciar com valores mais próximos do valor objetivo ser ou não vantagem no processo.

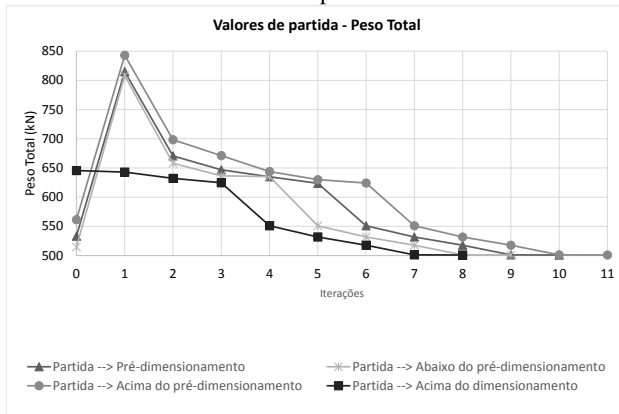
Tabela 5 – Otimização com valores de partida acima do dimensionamento

Partida --> Acima do dimensionamento							
Partida	Iteração	Altura (cm)	f <sub>ck</sub> (MPa)	Entreixo (cm)	As (cm <sup>2</sup> )	Flecha (cm)	Peso (kN)
Partida	0	56,00	30,0	47,0	1,547	2,354	645,51
1ª	1	55,60	30,0	47,0	1,547	2,448	642,84
2ª	2	54,10	30,0	47,0	1,547	2,871	632,15
3ª	3	53,10	30,0	47,0	1,709	3,200	624,71
4ª	4	56,20	30,2	65,0	1,929	3,200	550,99
5ª	5	52,40	36,2	65,0	1,929	3,200	531,8
6ª	6	49,70	41,5	65,0	2,494	3,200	517,78
7ª	7	46,50	49,8	65,0	2,494	3,200	501,26
8ª	8	<b>46,40</b>	<b>50,0</b>	<b>65,0</b>	<b>2,494</b>	<b>3,200</b>	<b>500,88</b>

Fonte: Os Autores (2017).

Para a investigação feita nesta seção, observa-se que independentemente dos valores de partida, os valores encontrados ao final da otimização convergem para um cenário idêntico. Na Figura 9 pode-se visualizar a influência dos valores de partida no número de iterações até a convergência da flecha final, considerando uma otimização para o menor peso próprio.

Figura 9 – Influência dos valores de partida na obtenção do menor peso



Fonte: Os Autores (2017).

#### 4.4 Sistema não protendido x protendido

A seguir são apresentados os resultados para uma variedade de simulações feitas com relação aos vãos das lajes. Para situações com mesmo comprimento de vão e condição de vinculação das lajes foram calculadas as soluções ótimas para vigotas treliçadas, com e sem protensão. Para todos os resultados dispostos a seguir, o método de otimização utilizado é o GRG2 e todas as lajes dimensionadas estão nos domínios 2 ou 3.

Foram realizadas otimizações com o objetivo de que a flecha limite fosse alcançada e, em um segundo momento, otimizações para que se obtivessem os menores pesos para as lajes. Os valores apresentados a seguir estão resumidos apenas aos valores de partida e o resultado obtido no procedimento de otimização. A princípio pretendia-se obter resultados para vãos de 6 a 12 m, contudo, devido às limitações impostas às vigotas treliçadas, por exemplo, o espaço para colocação de barras adicionais com no máximo duas barras com diâmetro de 10 mm e os tipos de treliças disponíveis, impediram o processo de otimização de convergir para valores em que todas as restrições pudessem ser atendidas.

Se comparada a proposta para vigota sem protensão com vigota protendida, e considerada a função objetivo de flecha final igual à flecha limite obtêm-se as variações apresentadas na Tabela 6. Ao ser definida a função objetivo para resultar em menor peso houve melhorias no sentido de aliviar as solicitações permanentes.

Tabela 6 – Variação percentual do sistema não protendido para protendido – objetivo de flecha final igual flecha limite

Variação % de convencional para protendida				
Otimização - GRG Não Linear - Objetivo: Flecha final = flecha limite				
Cenários				
Vão (m)	Altura	fck	Intereixo	Peso T
6	Redução de 19,1%	Aumento de 2,6%	Aumento de 12,3%	Redução de 24,3%
7	Redução de 12,2%	Redução de 10,9%	Aumento de 13,3%	Redução de 22,7%
8	Redução de 11,0%	Aumento de 3,5%	Manteve	Redução de 10,0%
9	Redução de 3,3%	Redução de 10,6%	Manteve	Redução de 5,0%
10	-	-	-	-

Fonte: Os Autores (2017).

Na Tabela 7 pode ser visualizada a variação do sistema não protendido para o protendido com o objetivo de se obter o menor peso total. Destaca-se que, nesse processo, o valor limite para o dimensionamento de vigotas treliçadas sem protensão ocorreu com 9 m, por necessitar de uma armadura superior às disponíveis para a sapata de concreto com largura de 12 cm.

Observa-se, na Figura 10, que, independentemente da função definida como objetivo, as vigotas treliçadas não protendidas apresentam altura total superior à das vigotas protendidas.

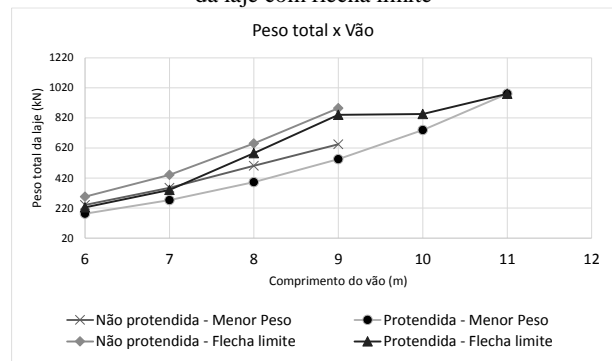
Para o vão de 6 m, a diferença fica em torno de 19%, enquanto que para o vão de 9 m essa diferença fica em torno de 3%. Em termos de peso total da laje, para vãos de 6 m tem-se uma variação de 24% da vigota não protendida para a protendida, enquanto que para o vão de 9 m essa variação fica em torno de 15%.

Tabela 7 – Variação percentual do sistema não protendido para protendido para o objetivo de menor peso

Variação % de convencional para protendida				
Otimização - GRG Não Linear - Objetivo: Menor Peso próprio total				
Vão (m)	Altura	fck	Intereixo	Peso T
6	Redução de 11,2%	Redução de 37,2%	Redução de 13,2%	Redução de 24,2%
7	Redução de 7,2%	Redução de 37,8%	Redução de 13,2%	Redução de 22,9%
8	Redução de 3,9%	Redução de 29,4%	Redução de 13,2%	Redução de 21,6%
9	Redução de 3,1%	Redução de 28,0%	Redução de 13,2%	Redução de 15,4%
10	-	-	-	-

Fonte: Os Autores (2017).

Figura 10 – Peso total das lajes com e sem protensão para a situação de atingir flecha limite e minimização do peso total da laje com flecha limite



Fonte: Os Autores (2017).

Essas variações são justificadas em razão do método de cálculo da vigota sem protensão ter liberdade para ajustar outras variáveis durante a busca do cenário ótimo, como alterar a área de aço. Porém, à medida que o vão aumenta, aumentar a área de aço não atende às verificações dos estados limites relativos ao dimensionamento.

#### 4.5 Sistema protendido com um fio e dois fios de protensão

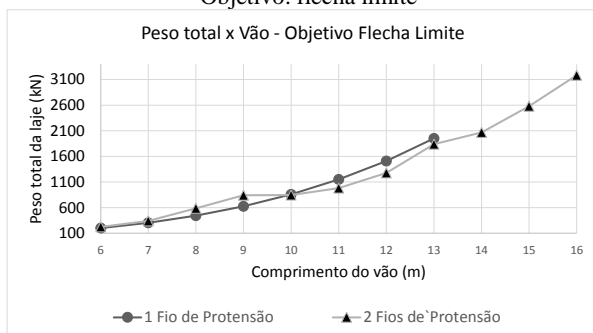
Esta seção apresenta o estudo da alteração na quantidade de fios de protensão utilizados nas vigotas treliçadas. Foram consideradas vigotas treliçadas com um fio de protensão com objetivo de compará-las ao sistema com dois fios

protendidos, exposto na seção anterior. Observou-se que ao ser aplicado apenas um fio de protensão, com vão máximo de 12 m, o limite de convergência deu-se decorrente ao não atendimento do estado limite de fissuração excessiva.

Na Figura 11 é possível fazer uma comparação visual entre os pesos para lajes com 1 e 2 fios de protensão, com a função objetivo referente ao atendimento das condições de flecha final igual à flecha limite.

A mudança ocorrida a partir do vão de 9 m é decorrência do método ter realizado uma variação com o aumento do intereixo. Logo, tem-se a redução do peso total da laje (Figura 11). Em contrapartida, a partir desse vão, o processo de otimização buscou reduzir gradativamente os valores de  $f_{ck}$ .

Figura 11 – Peso total das lajes com 1 e 2 fios de protensão  
Objetivo: flecha limite



Fonte: Os Autores (2017).

## CONCLUSÕES

O interesse principal do trabalho foi investigar em que condições o uso de vigotas treliçadas, para lajes nervuradas é mais adequado com ou sem a aplicação da protensão. Ao serem avaliados os resultados, para as limitações estabelecidas neste trabalho, observa-se que para lajes com vãos maiores que 9 m é tecnicamente inviável a adoção de um sistema composto por vigotas pré-moldadas, sem que haja a inserção de armadura adicional fora da sapata de concreto ou aplicação da protensão.

Observando todas as dimensões adotadas para os vãos, em termos de desempenho, percebeu-se que as vigotas treliçadas protendidas sempre conseguem respeitar as exigências de dimensionamento e serviço com menores valores de  $f_{ck}$ , altura total da laje e peso total. Entretanto, não se pode afirmar categoricamente que para toda obra esse sistema é o ideal, visto que existem casos em que o peso não é tão significativo. Vale ressaltar que, nas situações em que há ocorrência de vibrações, lajes com altura menor possuem menor inércia e são mais suscetíveis a propagação de ondas.

Diante dos resultados obtidos com a aplicação dos processos de otimização ressaltam-se os seguintes pontos:

- A altura total das lajes é a variável que possui maior influência tanto para o dimensionamento quanto para que sejam atendidas as condições de serviço exigidas pela norma ABNT NBR 6118:2014;
- A utilização da ferramenta de otimização GRG2 via planilha eletrônica possibilitou o ajuste simultâneo de parâmetros fundamentais no dimensionamento de nervuras pré-moldadas treliçadas ( $f_{ck}$ , intereixo, área de

aço, o domínio de dimensionamento), mantendo uma faixa de grandeza condizente com a realidade de técnica;

- Com a redução do peso próprio das lajes em torno de 24% para os vãos de 6 m, até cerca de 15% para os vãos de 9 m, ao ser considerado também o alívio de esforço para as vigas, pilares, e fundação, têm-se uma economia global significativa em construções de múltiplos pavimentos;
- O dimensionamento não se mostra muito favorável para as vigotas treliçadas não protendidas com sobrecargas acima de 2,0 kN/m<sup>2</sup> e vãos a partir de 8 m. Nessas condições é necessário aplicar protensão ou prever uma adição de armadura fora da sapata de concreto.

O desafio existente para uma empresa do ramo de vigotas treliçadas pré-moldadas produzir soluções com o uso da protensão, está associado fundamentalmente ao investimento inicial em equipamentos e espaço físico. O processo de produção, montagem e concretagem é muito semelhante para o sistema sem ou com protensão. Por fim, todas as condições que podem ser alcançadas com as vigotas pré-moldadas treliçadas não protendidas, podem ser alcançadas com o uso da protensão, o caminho inverso, contudo, nem sempre é realizável.

## REFERÊNCIAS

- ABADIE, J.; CARPENTIER, J. **Some numerical experiments with the GRG method for nonlinear programming**, Paper HR7422, Electricité de France, 1967.
- ALBUQUERQUE, A. T.; MOTA, J. E.; CARACAS, J. E.; NOBRE, E. G. **Lajes Treliçadas Protendidas (Pré-Tração)**. **Anais...** 1º Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto Pré-moldado, São Carlos, 2005.
- ALBUQUERQUE, A. T. **Otimização de pavimentos de edifícios com estruturas de concreto pré-moldado utilizando algoritmos genéticos**. Tese (Doutorado). EESC, USP, 2007.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118**: Projeto de estruturas de concreto – Procedimento. Rio de Janeiro, 2014.
- \_\_\_\_\_. **NBR 14859-1**: Lajes pré-fabricadas de concreto – Parte 1: Vigotas, minipainéis e painéis – Requisitos. Rio de Janeiro, 2016.
- \_\_\_\_\_. **NBR 14859-2**: Lajes pré-fabricadas de concreto – Parte 2: Elementos inertes para enchimento e fôrma – Requisitos. Rio de Janeiro, 2016.
- \_\_\_\_\_. **NBR 14859-3**: Lajes pré-fabricadas de concreto – Parte 3: Armadura treliçadas eletrossoldadas para lajes pré-fabricadas – Requisitos. Rio de Janeiro, 2016.
- AVILLA JUNIOR, J. **Contribuição ao projeto e execução de lajes lisas nervuradas pré-fabricadas com vigotas treliçadas**. Dissertação (Mestrado). EESC, USP, 2009.
- DROPPA JÚNIOR, A. **Análise estrutural de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo vigota com armação treliçada**. São Carlos. Dissertação (Mestrado). EESC, USP, 1999.



EL DEBS, M. K. **Concreto pré-moldado: fundamentos e aplicações**. São Carlos. 2 ed. REENGE, EESC, USP, 2017.

FORNI, D. **Custos de lajes formadas por vigotas treliçadas considerando a produção, o transporte, a montagem e a concretagem**. Dissertação (Mestrado). Universidade Federal de Uberlândia, 2005.

LASDON; L. S., WAREN, A. D; JAIN; A., RATNER, M. Design and Testing of a Generalized Reduced Gradient Code for Nonlinear Programming. **ACM Transactions on Mathematical Software**. v. 4, n. 1, p. 34-50, 1978. <https://doi.org/10.1145/355769.355773>.

LIMA, M. C. V.; CASTILHO, V. C.; GESUALDO, F. A. R. Vigotas treliçadas protendidas: análise experimental e estudo de escoramento. **Anais...** 3º Encontro Nacional de Pesquisa-Projeto-Produção em Concreto Pré-moldado. São Carlos, 2013.

MAGALHÃES, F. L. **Estudo dos momentos fletores negativos nos apoios de lajes formadas por elementos pré-moldados tipo nervuras com armação treliçada**. Dissertação (Mestrado). EESC, USP, 2001.

MERLIN, A. J.; EL DEBS, M. K.; TAKEYA, T.; NETO, N. M. Análise do Efeito da Protensão em Lajes Pré-moldadas com Armação Treliçada. **Anais...** 1º Encontro Nacional de Pesquisa – Projeto – Produção em Concreto Pré-moldado, São Carlos, 2005.

NAAMAN, A. E. **Prestressed Concrete Analysis and Design: Fundamentals**. 3 ed. Michigan: Ed. Techno Press 3000, USA, 2012.

WILDE D. J., BEIGHTLER, C. S. **Foundations of Optimization**. Prentice Hall. Englewood Cliffs. N.J. 1967.

WOLFE, P. Methods of nonlinear programming. **Recent Advances in Mathematical Programming**. New York: McGraw Hill, p. 67-86, 1963.