

MÉTODOS ITERATIVOS DE TERCEIRA E QUARTA ORDEM ASSOCIADOS À TÉCNICA DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR

ITERATIVE METHODS OF THIRD AND FOURTH ORDER ASSOCIATED WITH THE LINEAR ARC LENGTH TECHNIQUE

Luiz Antonio Farani de Souza¹, Emerson Vitor Castelani², Wesley Vagner Inês Shirabayashi³, Roberto Dalledone Machado⁴

¹Doutor em Métodos Numéricos, Universidade Tecnológica Federal do Paraná, Apucarana, PR.
E-mail: lasouza@utfpr.edu.br

²Doutor em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.
E-mail: emersonvitor@gmail.com

³Doutor em Matemática Aplicada, Universidade Estadual de Maringá, Maringá, PR.
E-mail: wvishirabayashi@uem.br

⁴Doutor em Engenharia Mecânica, Universidade Federal do Paraná, Curitiba, PR.
E-mail: roberto.dalledonemachado@gmail.com.

RESUMO

Técnicas de continuação acopladas ao esquema iterativo de Newton-Raphson são bastante utilizadas na análise por Elementos Finitos de problemas de estruturas com comportamento não linear, cujas soluções para uma dada precisão são obtidas por meio da resolução de sistemas de equações não lineares. Neste artigo, são desenvolvidos algoritmos baseados nos métodos de Potra-Pták, Ponto Médio e Chun, associados à técnica de Comprimento de Arco Linear, para a solução de problemas de treliças planas e espaciais com não linearidade geométrica, cujos caminhos de equilíbrio apresentam pontos limites de força e deslocamento. As análises não lineares são efetuadas por meio do método dos Elementos Finitos Posicional. Os resultados numéricos alcançados evidenciam o melhor desempenho dos códigos computacionais implementados, em comparação com as análises feitas com os métodos tradicionais de Newton-Raphson Padrão e Modificado e de Broyden, quanto ao tempo de processamento, números totais de passos de força e iterações acumuladas até a convergência para a solução, número médio de iterações por passo de força e estimador médio da taxa de convergência.

Palavras-chave: treliça, Elementos Finitos Posicional, Comprimento de Arco Linear, não linearidade geométrica, trajetória de equilíbrio.

ABSTRACT

Path-following techniques coupled with the Newton-Raphson iterative scheme are widely used in the Finite Element analysis of structures problems with nonlinear behavior, whose solutions for a given precision are obtained by solving a nonlinear equations systems. In this paper we develop algorithms based on the Potra-Pták, Midpoint and Chun methods, associated with a Linear Arc-Length technique, for the solution of problems of plane and space trusses with geometric nonlinear, whose equilibrium paths present force and displacement limits points. Nonlinear analyses are performed using the Positional Finite Element method. The numerical results achieved show the best performance of the implemented computer codes, in comparison with the analyses made with the Modified and Standard Newton-Raphson and Broyden traditional methods, as to the processing time, total numbers of load steps, accumulated iterations until convergence to the solution, average number of iterations by load step and average convergence rate estimator.

Keywords: truss, Positional Finite Element, Linear Arc Length, geometric nonlinear, equilibrium path.

1 – INTRODUÇÃO

Treliça é um sistema estrutural eficiente que pode sustentar carregamentos consideráveis com uma quantidade menor de materiais. Desde o início do seu uso comercial, esse sistema tem sido cada vez mais popular, especialmente em grandes áreas abertas com poucos ou nenhum suporte intermediário, como ilustrado na Figura 1. Aplicações bem-sucedidas de sistemas estruturais em forma de treliça abrangem estádios, edifícios públicos, centros de exposições, hangares de avião e pontes suspensas (SEÇER, 2009).

As treliças quando submetidas a grandes esforços exibem comportamento não linear e problemas de instabilidade podem surgir, tais como *snap-through* e *snap-*

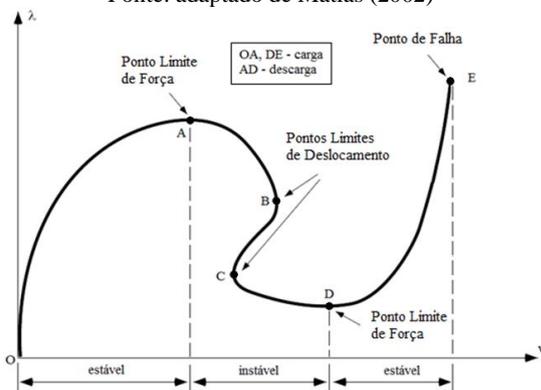
back. A trajetória de equilíbrio é amplamente utilizada na análise estrutural para identificar os pontos limites de equilíbrio relacionados à instabilidade. Em geral, essa trajetória é representada por uma curva deslocamento *versus* força, em que cada ponto na curva representa uma configuração de equilíbrio da estrutura (LACERDA; MACIEL; SCUDELARI, 2014).

Figura 1 – Sistema estrutural em forma de treliça. Fonte: Seçer (2009)



Para se realizar a análise não linear de estruturas com maior precisão, é de fundamental importância que sejam empregados métodos que possam considerar, de maneira apropriada, os efeitos de grandes rotações e grandes deslocamentos. Uma metodologia eficiente de solução deve ser capaz de superar os problemas numéricos associados ao comportamento não linear, e de traçar a trajetória de equilíbrio completa do sistema estrutural em análise (RODRIGUES; VARELA; SOUZA, 2008; MAXIMIANO; SILVA; SILVEIRA, 2014). Na Figura 2 pode ser vista a resposta não linear de um sistema estrutural, em que um determinado componente de deslocamento pode incrementar ou sofrer decréscimos ao longo da trajetória. Na figura 2 estão identificados Pontos Limites de Força (A, D), Pontos Limites de Deslocamento (B, C) e Ponto de Falha (E) (MATIAS, 2002).

Figura 2 – Trajetória de equilíbrio de um sistema estrutural. Fonte: adaptado de Matias (2002)



Uma dificuldade inerente ao método convencional de Newton-Raphson, que tem como estratégia a manutenção do parâmetro de Força Constante durante o ciclo de iterações, é a solução próxima a pontos limites na trajetória de equilíbrio divergir devido ao mau condicionamento da matriz de rigidez tangente, ou simplesmente porque, para o nível de força estabelecido, não há solução (SILVEIRA; ROCHA; GONÇALVES, 1999). Com o propósito de resolver esses problemas de convergência, técnicas de continuação associadas a esse método têm sido desenvolvidas, dentre elas: Controle de Deslocamento (BATOZ; DHAT, 1979), Controle de Deslocamento Generalizado (YANG; SHIEH, 1990; YANG; KUO, 1994) e Controle de Comprimento de Arco (RIKS, 1972; RIKS,

1979; RAMM, 1981; CRISFIELD, 1991). Na técnica de controle de Força Constante, o parâmetro de força é mantido invariável durante o ciclo iterativo. A ideia dos métodos de continuação é tratar esse parâmetro como uma variável, a partir da adição de uma condição de restrição ao sistema de equações que descreve o equilíbrio estrutural para a determinação do mesmo.

O método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados para resolver problemas não lineares na Engenharia Estrutural. Modificações nesse método podem ser feitas: resolver o sistema de equações não lineares de forma inexata, ou seja, resolvê-lo por algum método iterativo com uma dada precisão, como no método de Newton Inexato; aproximar a matriz Jacobiana por Diferenças Finitas; e substituir a Jacobiana por outra matriz com alguma propriedade, como nos métodos quase-Newton. No método de Newton-Raphson é resolvido um sistema linear a cada iteração, cuja matriz de rigidez é a Jacobiana avaliada no iterado corrente. Uma das vantagens desse método é a taxa de convergência quadrática, sob condições adequadas. Além disso, é conhecido na literatura o raio ótimo de convergência desse método –isso significa que, dada uma sequência gerada pelo método de Newton-Raphson cujo ponto inicial esteja fora da bola de centro em uma solução e raio ótimo, não se tem garantia que esta sequência irá convergir para a respectiva solução. Entretanto, tomado qualquer ponto inicial dentro desta bola, não só é garantida a convergência, mas também a taxa de convergência quadrática (EUSTÁQUIO, 2013).

Até a década de 1980, os métodos iterativos que possuíam ordem de convergência maior que a do método de Newton-Raphson exigiam o cálculo de derivadas de ordens superiores. Dessa maneira, quanto maior era a ordem de convergência, maior era também o custo computacional, de modo a tornar o uso prático desses métodos restrito a alguns casos. Há métodos que possuem taxa de convergência cúbica, como os métodos de Potra-Pták (POTRA; PTÁK, 1984) e do Ponto Médio (FRONTINI; SORMANI, 2004), e métodos com convergência de quarta ordem, como o método de Chun (CHUN, 2006).

A equação que governa o equilíbrio estático de um sistema estrutural com comportamento não linear geométrico é descrita pela Equação 1:

$$\mathbf{g} = \lambda \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}) = \mathbf{0}, \quad (1)$$

Em que: \mathbf{g} é o vetor de forças desequilibradas, \mathbf{F}_{int} é o vetor de forças internas (avaliado em função do vetor de coordenadas nos pontos nodais da estrutura \mathbf{d}), e λ é o parâmetro de força responsável pelo escalonamento do vetor de referência \mathbf{F}_r . A solução do sistema dado em (1) é obtida por meio de um esquema iterativo e incremental. Para uma sequência do parâmetro de força λ , uma sequência do respectivo incremento de coordenadas nodais \mathbf{d} é calculada.

Com a consideração de que λ passa a ser uma incógnita e varia ao longo das iterações, tem-se o problema estrutural não linear conforme a Equação 2:

$$\mathbf{K}^{(k-1)} \delta \mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{g}^{(k)} = \lambda^{(k)} \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{int}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (2)$$

Em que: \mathbf{K} é a matriz de rigidez representativa do sistema estrutural. Os parâmetros totais de força (λ) e do vetor de coordenadas nodais (\mathbf{d}) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são atualizados pelas Equações 3 e 4, respectivamente:

$$\lambda^{(k)} = \lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (3)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}^{(k)}. \quad (4)$$

Com a combinação das Equações 2 e 3 chega-se à expressão para $\delta\mathbf{d}^{(k)}$ segundo a Equação 5 (CRISFIELD, 1991):

$$\delta\mathbf{d}^{(k)} = \delta\mathbf{d}_g^{(k)} + \delta\lambda^{(k)}\delta\mathbf{d}_r^{(k)}, \quad (5)$$

Em que: $\delta\lambda^{(k)}$ é o subincremento do parâmetro de força que deve ser avaliado ao longo do ciclo iterativo, e $\delta\mathbf{d}_g^{(k)}$ e $\delta\mathbf{d}_r^{(k)}$ são obtidos, respectivamente, pelas Equações 6 e 7:

$$\delta\mathbf{d}_g^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1}\mathbf{g}^{(k-1)}, \quad (6)$$

$$\delta\mathbf{d}_r^{(k)} = \mathbf{K}^{(k-1)-1}\mathbf{F}_r. \quad (7)$$

Os parâmetros incrementais do parâmetro de força ($\Delta\lambda$) e do vetor de coordenadas nodais ($\Delta\mathbf{d}$) no passo de força $t+\Delta t$ e iteração k são avaliados pelas Equações 8 e 9, respectivamente:

$$\Delta\lambda^{(k)} = \Delta\lambda^{(k-1)} + \delta\lambda^{(k)}, \quad (8)$$

$$\Delta\mathbf{d}^{(k)} = \Delta\mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}^{(k)}. \quad (9)$$

Para a concepção de treliças mais leves e eficientes dentro dos padrões de segurança e qualidade, é fundamental o estudo dessas estruturas próximas ao colapso devido a grandes modificações que ocorrem na geometria e a perda de linearidade na relação deformação-tensão. Neste artigo são implementados algoritmos com os métodos iterativos de Potra-Pták, Ponto Médio, Chun, Newton-Raphson Padrão (NR), Newton-Raphson Modificado (NRM) e de Broyden, associados à técnica de continuação Comprimento de Arco Linear, para a solução de treliças planas e espaciais com comportamento não linear geométrico (grandes deslocamentos e rotações) por meio do Método dos Elementos Finitos Posicional.

Desenvolvida originalmente por Coda (2003), a formulação de Elementos Finitos Posicional é uma abordagem alternativa para problemas não lineares, que considera as posições nodais como variáveis do sistema não linear em vez dos deslocamentos.

Os algoritmos desenvolvidos para a solução do problema não linear descrito na Equação 2 foram implementados usando o *software* Matlab, versão 8.6 R2015b (MATLAB, 2015). Os testes computacionais foram realizados em um computador Core i7-3537U com 8 GB de memória.

Os resultados numéricos alcançados nas simulações de problemas de referência encontrados na literatura evidenciam o melhor desempenho dos métodos de Potra-Pták, do Ponto Médio e de Chun adaptados ao problema não linear estrutural, em comparação com as análises feitas com

os métodos tradicionais de Newton-Raphson Padrão, de Newton-Raphson Modificado e de Broyden. Avaliou-se nas simulações os seguintes parâmetros: o tempo de processamento em segundos (t); os números totais de passos de força (NP) e iterações acumuladas (k_{total}) até a convergência para a solução; o número médio de iterações por passo de força ($k_{médio}$); e o estimador médio da taxa de convergência ($p_{médio}$) e o desvio padrão (dp). Além disso, foram obtidas as trajetórias de equilíbrio das estruturas com pontos limites de força e de deslocamento.

2 – ELEMENTO FINITO DE TRELIÇA ESPACIAL

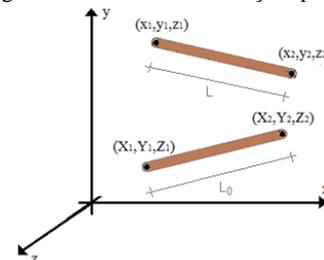
O elemento de treliça é descrito pela formulação de Elementos Finitos Posicional (CODA; GRECO, 2004). Esse elemento transmite somente forças axiais e tem área da seção transversal constante A . As coordenadas (X_1, Y_1, Z_1) e (X_2, Y_2, Z_2) representam a configuração inicial do elemento de barra (também conhecida como coordenadas de referência). Após uma mudança de configuração devido a deslocamentos da treliça, a barra passa a ter novas coordenadas (x_1, y_1, z_1) e (x_2, y_2, z_2), conforme o desenho esquemático na Figura 3.

O comprimento inicial (ou referencial) L_0 e o comprimento atual L da barra são calculados, respectivamente, pelas Equações 10 e 11:

$$L_0 = \sqrt{(X_2 - X_1)^2 + (Y_2 - Y_1)^2 + (Z_2 - Z_1)^2}, \quad (10)$$

$$L = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}. \quad (11)$$

Figura 3 – Elemento de treliça espacial



A matriz de rigidez tangente \mathbf{K}_{el} e o vetor de forças internas \mathbf{F}_{el} elementares são obtidos conforme as Equações 12 e 13, respectivamente:

$$\mathbf{K}_{el} = \frac{EA}{L_0^3}\mathbf{B} + \frac{EA\varepsilon_G}{L_0}\mathbf{C}, \quad (12)$$

$$\mathbf{F}_{el} = \frac{EA\varepsilon_G}{L_0}\mathbf{d}, \quad (13)$$

Em que: EA é a rigidez axial, L_0 é o comprimento indeformado da barra e ε_G é a deformação de Green dada pela Equação 14:

$$\varepsilon_G = \frac{L^2 - L_0^2}{2L_0^2}. \quad (14)$$

Na Equação 12, as matrizes \mathbf{B} e \mathbf{C} são definidas, respectivamente, pelas Equações 15 e 16:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix}, \quad (15)$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{d}\mathbf{d}^T, \quad (16)$$

Em que: \mathbf{I}_3 é a matriz identidade de ordem 3 e $\mathbf{d} = [x_1-x_2, y_1-y_2, z_1-z_2, x_2-x_1, y_2-y_1, z_2-z_1]^T$.

3 – MÉTODO DE COMPRIMENTO DE ARCO LINEAR

A metodologia para a solução de problemas estruturais não lineares deve ser capaz de traçar a trajetória de equilíbrio completa da estrutura (identificação e passagem pelos pontos limites existentes). Para tal, utiliza-se um processo incremental-iterativo que consiste de duas etapas (LEON *et al.*, 2011):

1) A partir da última configuração de equilíbrio da estrutura, seleciona-se um subincremento de força (definido como o subincremento de força inicial $-\delta\lambda^{(0)}$), que satisfaça alguma equação de restrição imposta ao problema. Após a seleção desse parâmetro determina-se o incremento inicial do vetor de coordenadas nodais $\Delta\mathbf{d}^{(0)}$; e

2) na segunda etapa de solução, procura-se por meio de uma estratégia de continuação corrigir a solução incremental inicialmente proposta na etapa anterior, com o objetivo de restaurar o equilíbrio da estrutura. Se as iterações envolverem coordenadas nodais (\mathbf{d}) e o parâmetro de força (λ), então uma equação adicional de restrição é requerida. O formato dessa equação é o que distingue as várias estratégias de iteração.

No método do Comprimento de Arco Linear, proposto por Riks (1972, 1979), a trajetória de iteração é mantida sempre ortogonal à direção tangente inicial em cada passo. A expressão para o incremento inicial do parâmetro de força, solução predita, é dada pela Equação 17:

$$\Delta\lambda^{(0)} = \frac{\Delta l}{\|\delta\mathbf{d}_r\|}, \quad (17)$$

Em que: Δl representa o incremento de comprimento de arco. Como proposto por Crisfield (1991), esse incremento pode ser utilizado como um parâmetro de controle no passo de força corrente, de acordo com a Equação 18:

$$\Delta l = {}^t\Delta l \left(\frac{Nd}{{}^t k} \right)^{1/2}, \quad (18)$$

Em que: ${}^t\Delta l$ representa o incremento de comprimento de arco no passo de força anterior, Nd é o número de iterações desejadas para a convergência do processo iterativo corrente, e ${}^t k$ é o número de iterações que foi necessário para convergir no passo de força anterior. No processo iterativo subsequente, a equação de restrição (Equação 19) usada para calcular $\delta\lambda^{(k)}$ é obtida fazendo com que a solução iterativa ($\delta\mathbf{d}^{(k)}$) seja ortogonal à solução incremental predita ($\Delta\mathbf{d}^{(0)}$):

$$\delta\mathbf{d}^{(k)T} \Delta\mathbf{d}^{(0)} = 0. \quad (19)$$

Com a substituição da Equação 5 na Equação 19, obtém-se a Equação 20 para a determinação da correção do subincremento de força ($k > 1$):

$$\delta\lambda^{(k)} = - \frac{\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g^{(k)}}{\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r^{(k)}}. \quad (20)$$

No início do passo de força corrente, o tamanho do incremento do vetor coordenadas nodais é predito por $\Delta\mathbf{d}^{(0)} = \Delta\lambda^{(0)} \delta\mathbf{d}_r^{(0)}$, e impõe-se que os incrementos do vetor de coordenadas nodais sejam ortogonais ao da primeira iteração nas iterações subsequentes. O sinal do incremento inicial do parâmetro força ($\Delta\lambda^{(0)}$) pode ser positivo ou negativo. A escolha correta do sinal é de suma importância na definição das sequências de soluções (\mathbf{d} , λ) que permitam o avanço contínuo na resposta força-deslocamento. O procedimento utilizado neste trabalho consiste na análise do produto interno entre o incremento de coordenadas nodais obtido no passo de força anterior (${}^t\Delta\mathbf{d}$) e o incremento de coordenadas nodais corrente ($\delta\mathbf{d}_r$): se ${}^t\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r > 0$, então o preditor $\Delta\mathbf{d}^{(0)}$ tem o mesmo sentido de $\delta\mathbf{d}_r$; caso contrário, o preditor tem sentido oposto. O critério de convergência é expressado pela norma da força residual e da força total aplicada segundo a Equação 21:

$$\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|. \quad (21)$$

Em que: tol é a tolerância fornecida pelo usuário. O vetor de deslocamentos da iteração k ($\mathbf{u}^{(k)}$) é determinado conforme a Equação 22:

$$\mathbf{u}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k)} - {}^0\mathbf{d}, \quad (22)$$

Em que: ${}^0\mathbf{d}$ é o vetor de coordenadas nodais no passo de força 0, estrutura indeformada.

4 – MÉTODOS DE SOLUÇÃO

Nesta seção são apresentados os algoritmos e as formulações referentes aos métodos iterativos do Ponto Médio, de Potra-Pták e de Chun, associados à técnica de continuação, para solucionar o problema não linear estrutural dado pela Equação 2. Admite-se que, dada uma estimativa inicial para a solução (${}^t\mathbf{d}^{(0)}$), o problema é determinar uma sequência de correções até que uma solução seja obtida com a precisão desejada.

4.1 Método do Ponto Médio (PM)

O método do Ponto Médio (FRONTINI; SORMANI, 2004) é adaptado para o problema não linear estrutural, cujo esquema iterativo é dado pelas Equações 23 a 26:

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \frac{1}{2} \delta\mathbf{d}_1^{(k)}, \quad (23)$$

$$\delta\mathbf{d}_1^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} [\delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)})], \quad (24)$$

$$\mathbf{K}(\mathbf{y}^{(k)}) \delta\mathbf{d}_2^{(k)} = \delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (25)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}_2^{(k)}. \quad (26)$$

Este método possui convergência cúbica sem a necessidade do uso de derivadas de segunda ordem. O algoritmo é apresentado a seguir.

Algoritmo 1: Método do Ponto Médio associado à técnica de Comprimento de Arco Linear

1. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \Delta\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{\text{máx}}$
3. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{d})]^{-1} \mathbf{F}_r$
4. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta l / \|\delta\mathbf{d}_r\|$
5. Se $\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r < 0$
6. $\Delta\lambda \leftarrow -\Delta\lambda$
7. Fim-Se
8. $\Delta\mathbf{d}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda \delta\mathbf{d}_r$
9. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d}^{(0)}$
10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, i_{\text{máx}}$
12. $\delta\mathbf{d}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
13. $\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$
14. $\delta\mathbf{d}_1 \leftarrow 1/2 (\delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_1 \delta\mathbf{d}_r)$
15. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_1)$
16. $\delta\mathbf{d}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
17. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
18. $\delta\lambda_2 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$
19. $\delta\mathbf{d}_2 \leftarrow \delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_2 \delta\mathbf{d}_r$
20. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_2$
21. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_2$
22. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
23. Se $\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|$
24. Terminar a execução do Para
25. Fim-Se
26. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
27. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
28. Fim-Para
29. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$
30. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$
31. $\Delta l \leftarrow \Delta l (Nd/k)^{0.5}$
32. Fim-Para

4.2 Método de Potra-Pták (PP)

Os autores Potra e Pták (1984) desenvolveram um método de dois passos baseado no método de Newton-Raphson, que consiste de duas avaliações da função dada e de apenas o cálculo de derivadas de primeira ordem. Com convergência cúbica e um índice de eficiência maior que o do método de Newton-Raphson (SOLEYMANI *et al.*, 2012), o esquema iterativo para o método de Potra-Pták adaptado ao problema estrutural é dado pelas Equações 27 a 33:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})\delta\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{F}_1^{(k)} + \mathbf{F}_2^{(k)}, \quad (27)$$

$$\mathbf{F}_1^{(k)} = \delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (28)$$

$$\mathbf{F}_2^{(k)} = \delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}), \quad (29)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}_1^{(k)}, \quad (30)$$

$$\delta\mathbf{d}_1^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_1^{(k)}, \quad (31)$$

$$\delta\mathbf{d}_2^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_2^{(k)}, \quad (32)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta\mathbf{d}_1^{(k)} + \delta\mathbf{d}_2^{(k)}. \quad (33)$$

O algoritmo referente ao Método de Potra-Pták associado à técnica de Comprimento de Arco Linear é apresentado em seguida.

Algoritmo 2: Método de Potra-Pták associado à técnica de Comprimento de Arco Linear

1. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \Delta\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0$
2. Para $NP \leftarrow 1, \dots, n_{\text{máx}}$
3. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{d})]^{-1} \mathbf{F}_r$
4. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta l / \|\delta\mathbf{d}_r\|$
5. Se $\Delta\mathbf{d}^T \delta\mathbf{d}_r < 0$
6. $\Delta\lambda \leftarrow -\Delta\lambda$
7. Fim-Se
8. $\Delta\mathbf{d}^{(0)} \leftarrow \Delta\lambda \delta\mathbf{d}_r$
9. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d}^{(0)}$
10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, i_{\text{máx}}$
12. $\delta\mathbf{d}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
13. $\delta\lambda_1 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$
14. $\delta\mathbf{d}_1 \leftarrow \delta\mathbf{d}_g + \delta\lambda_1 \delta\mathbf{d}_r$
15. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_1$
16. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_1$
17. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
18. $\delta\mathbf{y}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
19. $\delta\lambda_2 \leftarrow -(\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{y}_g) / (\Delta\mathbf{d}^{(0)T} \delta\mathbf{d}_r)$
20. $\delta\mathbf{d}_2 \leftarrow \delta\mathbf{y}_g + \delta\lambda_2 \delta\mathbf{d}_r$
21. $\Delta\mathbf{d} \leftarrow \Delta\mathbf{d} + \delta\mathbf{d}_2$
22. $\Delta\lambda \leftarrow \Delta\lambda + \delta\lambda_2$
23. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta\lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
24. Se $\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|$
25. Terminar a execução do Para
26. Fim-Se
27. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta\mathbf{d})$
28. $\delta\mathbf{d}_r \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
29. Fim-Para
30. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta\mathbf{d}$
31. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta\lambda$
32. $\Delta l \leftarrow \Delta l (Nd/k)^{0.5}$
33. Fim-Para

4.3 Método de Chun

Chun (2006) apresentou um método iterativo para resolução de equações não lineares com convergência de quarta ordem que não requer o cálculo de derivadas de segunda ordem. A formulação deste método estendido para o problema estrutural é descrita pelas Equações 34 a 42:

$$\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})\delta\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{F}_1^{(k)} + 2\mathbf{F}_2^{(k)} - \mathbf{F}_3^{(k)}, \quad (34)$$

$$\mathbf{F}_1^{(k)} = \delta\lambda_1^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)}), \quad (35)$$

$$\mathbf{F}_2^{(k)} = \delta\lambda_2^{(k)} \mathbf{F}_r + \mathbf{g}(\mathbf{y}^{(k)}), \quad (36)$$

$$\mathbf{F}_3^{(k)} = \mathbf{K}(\mathbf{y}^{(k)})[\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_2^{(k)}, \quad (37)$$

$$\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_1^{(k)}, \quad (38)$$

$$\delta \mathbf{d}_1^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_1^{(k)}, \quad (39)$$

$$\delta \mathbf{d}_2^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_2^{(k)}, \quad (40)$$

$$\delta \mathbf{d}_3^{(k)} = [\mathbf{K}(\mathbf{d}^{(k-1)})]^{-1} \mathbf{F}_3^{(k)}, \quad (41)$$

$$\mathbf{d}^{(k)} = \mathbf{d}^{(k-1)} + \delta \mathbf{d}_1^{(k)} + 2 \delta \mathbf{d}_2^{(k)} - \delta \mathbf{d}_3^{(k)}. \quad (42)$$

O algoritmo referente ao Método de Chun associado à técnica de Comprimento de Arco Linear é apresentado a seguir.

Algoritmo 3: Método de Chun associado à técnica de Comprimento de Arco Linear

1. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \Delta \mathbf{d} \leftarrow \mathbf{0}, \lambda \leftarrow 0$
2. Para $\text{NP} \leftarrow 1, \dots, n_{\text{máx}}$
3. $\delta \mathbf{d}_r \leftarrow [\mathbf{K}(\mathbf{d})]^{-1} \mathbf{F}_r$
4. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta l / \|\delta \mathbf{d}_r\|$
5. Se $\Delta \mathbf{d}^T \delta \mathbf{d}_r < 0$
6. $\Delta \lambda \leftarrow -\Delta \lambda$
7. Fim-Se
8. $\Delta \mathbf{d}^{(0)} \leftarrow \Delta \lambda \delta \mathbf{d}_r$
9. $\Delta \mathbf{d} \leftarrow \Delta \mathbf{d}^{(0)}$
10. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta \mathbf{d})$
11. Para $k \leftarrow 1, \dots, i_{\text{máx}}$
12. $\delta \mathbf{d}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
13. $\delta \lambda_1 \leftarrow -(\Delta \mathbf{d}^{(0)T} \delta \mathbf{d}_g) / (\Delta \mathbf{d}^{(0)T} \delta \mathbf{d}_r)$
14. $\delta \mathbf{d}_1 \leftarrow \delta \mathbf{d}_g + \delta \lambda_1 \delta \mathbf{d}_r$
15. $\Delta \mathbf{d} \leftarrow \Delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{d}_1$
16. $\Delta \lambda \leftarrow \Delta \lambda + \delta \lambda_1$
17. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta \mathbf{d})$
18. $\delta \mathbf{d}_g \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{g}$
19. $\delta \lambda_2 \leftarrow -(\Delta \mathbf{d}^{(0)T} \delta \mathbf{d}_g) / (\Delta \mathbf{d}^{(0)T} \delta \mathbf{d}_r)$
20. $\delta \mathbf{d}_2 \leftarrow \delta \mathbf{d}_g + \delta \lambda_2 \delta \mathbf{d}_r$
21. Calcular $\mathbf{K}_2 \leftarrow \mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta \mathbf{d})$
22. $\delta \mathbf{d}_3 \leftarrow \mathbf{K}_2^{-1} \delta \mathbf{d}_2$
23. $\Delta \mathbf{d} \leftarrow \Delta \mathbf{d} + 2 \delta \mathbf{d}_2 - \delta \mathbf{d}_3$
24. $\mathbf{g} \leftarrow (\lambda + \Delta \lambda) \mathbf{F}_r - \mathbf{F}_{\text{int}}(\mathbf{d} + \Delta \mathbf{d})$
25. Se $\|\mathbf{g}\| \leq \text{tol} \|\mathbf{F}_r\|$
26. Terminar a execução do Para
27. Fim-Se
28. Calcular $\mathbf{K}(\mathbf{d} + \Delta \mathbf{d})$
29. $\delta \mathbf{u}_r \leftarrow \mathbf{K}^{-1} \mathbf{F}_r$
30. Fim-Para
31. $\mathbf{d} \leftarrow \mathbf{d} + \Delta \mathbf{d}$
32. $\lambda \leftarrow \lambda + \Delta \lambda$
33. $\Delta l \leftarrow \Delta l (Nd/k)^{0,5}$
34. Fim-Para

4.4 Determinação dos parâmetros $\delta \lambda_1^{(k)}$ e $\delta \lambda_2^{(k)}$

Os autores Yang e Kuo (1994) propuseram uma equação de restrição que deveria ser respeitada nas duas etapas de solução não linear (solução predita e no ciclo de iterações). Essa equação, adaptada neste trabalho, é dada pela Equação 43:

$$\mathbf{C}_i^T \delta \mathbf{d}^{(k)} + k_i \delta \lambda^{(k)} = H_i, \quad (43)$$

Em que: \mathbf{C}_i é um vetor cujos elementos são constantes, k_i é uma constante escalar e H_i é o parâmetro incremental de Comprimento de Arco. As expressões para $\delta \lambda_i^{(k)}$, com $i = 1, 2$, são dadas pelas Equações 44 e 45, respectivamente:

$$\delta \lambda_1^{(k)} = \frac{H_1 - \mathbf{C}_1^T (\delta \mathbf{d}_g^{(k)})}{\mathbf{C}_1^T \delta \mathbf{d}_r^{(k)} + k_1}, \quad (44)$$

$$\delta \lambda_2^{(k)} = \frac{H_2 - \mathbf{C}_2^T (\delta \mathbf{y}_g^{(k)})}{\mathbf{C}_2^T \delta \mathbf{d}_r^{(k)} + k_2}. \quad (45)$$

Fazendo $H_1 = H_2 = 0$, $\mathbf{C}_1 = \mathbf{C}_2 = \Delta \mathbf{u}^{(0)}$ e $k_1 = k_2 = 0$ nas Equações 44 e 45 chega-se à expressão para a determinação da correção do parâmetro de força (Equação 20), conforme a estratégia de Comprimento de Arco Linear proposta por Riks (1972, 1979).

5 – ESTIMADOR DA TAXA DE CONVERGÊNCIA

A taxa de convergência é determinada conforme a Equação 46 (HAUGEN, 1994).

$$p_k = \frac{\ln(\epsilon^{(k)} / \epsilon^{(k-1)})}{\ln(\epsilon^{(k-1)} / \epsilon^{(k-2)})}, \quad (46)$$

Em que: p_k é o estimador da taxa de convergência, $\epsilon^{(k)}$ é a norma do erro das forças desequilibradas e k é a k -ésima iteração.

6 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

Nesta seção são apresentados os resultados numéricos de problemas de treliças planas e espaciais encontrados na literatura, levando-se em conta na análise estática a não linearidade geométrica, com o intuito de aplicar e comparar os algoritmos implementados em ambiente Matlab.

O peso próprio das estruturas é desprezado nas análises. Ressalta-se, ainda, que não estão contabilizadas no tempo de processamento a geração da malha e a visualização dos resultados. Nas trajetórias de equilíbrio é apresentado um número menor de pontos para uma melhor distinção dos diferentes símbolos adotados de cada método.

6.1 Treliça plana com 8 barras

Este primeiro exemplo consiste de uma treliça plana simples com oito barras e nove nós sujeita a uma força horizontal no nó 1, conforme ilustrada na Figura 3. Esta estrutura foi estudada por Powell e Simons (1981) e Geers (1999). As barras têm rigidez axial adimensional $EA = 3,0 \times 10^6$. Os parâmetros utilizados nas simulações são: comprimento de arco inicial $\Delta l = 2,0$; número de iterações desejadas $Nd = 2$; incremento de força $\Delta F = 0,5$; número máximo de iterações $i_{\text{máx}} = 100$; e tolerância $\text{tol} = 1,0 \times 10^{-7}$. As curvas deslocamento horizontal no nó 1 versus força F com os métodos de Newton-Raphson Padrão (NR), Ponto Médio (PM), Potra-Pták (PP) e Chun são mostradas na Figura 4,

havendo boa concordância com pontos de equilíbrio extraídos da simulação efetuada por Geers (1999).

Figura 3 – Treliça plana com 8 barras

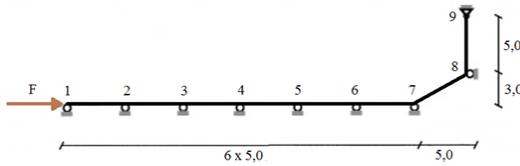
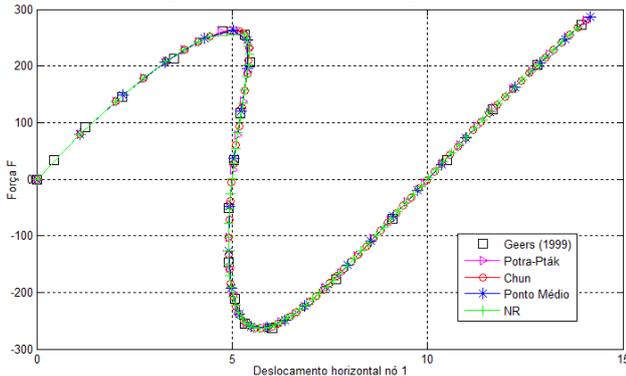


Figura 4 – Trajetórias de equilíbrio



Na Tabela 1 estão listados os números totais de passos de força (NP) e de iterações acumuladas (k_{total}) até a convergência para a solução, número médio de iterações por passo de força ($k_{médio}$), o tempo de processamento em segundos (t) e o estimador médio da taxa de convergência ($p_{médio}$) e o desvio padrão (dp), obtidos nas simulações com os algoritmos implementados

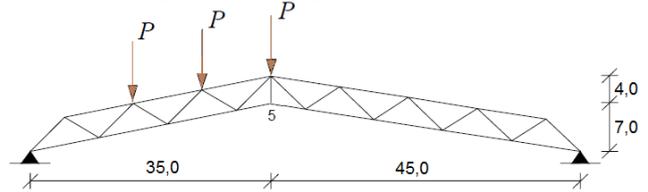
Tabela 1 – Resultados numéricos

| Métodos | NP (k_{total}) | $k_{médio}$ | t (s) | $p_{médio} \pm dp$ |
|---------|--------------------|-------------|-------|--------------------|
| NR | 745 (1.510) | 2,03 | 1,05 | $2,77 \pm 0,41$ |
| NRM | 11.320 (22.688) | 2,00 | 16,37 | $0,86 \pm 0,17$ |
| Broyden | 9.383 (18.803) | 2,00 | 19,06 | $0,90 \pm 0,31$ |
| PM | 29 (61) | 2,10 | 0,11 | $2,97 \pm 0,52$ |
| PP | 76 (160) | 2,11 | 0,16 | $3,36 \pm 0,80$ |
| Chun | 217 (448) | 2,07 | 0,40 | $3,36 \pm 0,72$ |

6.2 Treliça plana abatida e não simétrica com 33 barras

Considere na Figura 5 uma treliça plana abatida e não simétrica, com 18 nós e 33 elementos e submetida ao efeito de três forças concentradas de igual magnitude P. Esta estrutura foi estudada por Powell e Simons (1981) e Menin (2006). As barras possuem rigidez axial adimensional $EA = 9,0 \cdot 10^6$. Os parâmetros considerados nas análises para a técnica de continuação são: $\Delta l = 2,0$; $Nd = 2$; $tol = 1,0 \cdot 10^{-7}$; $i_{máx} = 100$; e $\Delta P = 100,0$. Na Figura 6 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio, deslocamento vertical do nó 5 versus força P, obtidas com os algoritmos implementados, juntamente com a curva de equilíbrio obtida por Menin (2006). Na Tabela 2 aparecem os resultados numéricos (NP, k_{total} , $k_{médio}$, t e $p_k \pm dp$) comparando os métodos de solução.

Figura 5 – Treliça plana com 33 barras



6.3 Treliça espacial em forma de torre esbelta com 36 barras

Considere a treliça espacial em forma de torre com imperfeição geométrica e submetida a uma força vertical P no seu topo, conforme ilustrada na Figura 7. Esta estrutura foi analisada por Onate (1986) e Menin (2006). O modelo apresenta 13 nós e 36 barras, e na base da torre há 12 graus de liberdade restringidos em 4 apoios do tipo pino. Todos os elementos de barra possuem a mesma seção transversal, com rigidez axial adimensional $EA = 1,0 \cdot 10^4$. Os parâmetros considerados nas análises para a técnica de continuação são: $\Delta l = 5,0$; $Nd = 2$; $tol = 1,0 \cdot 10^{-8}$; $i_{máx} = 100$; e $\Delta P = 1,0$.

Figura 6 – Trajetórias de equilíbrio

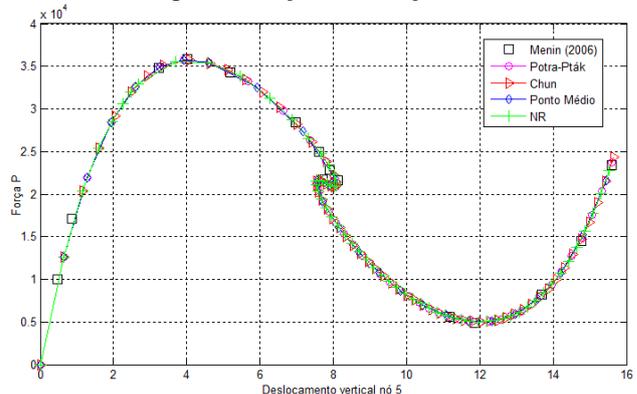
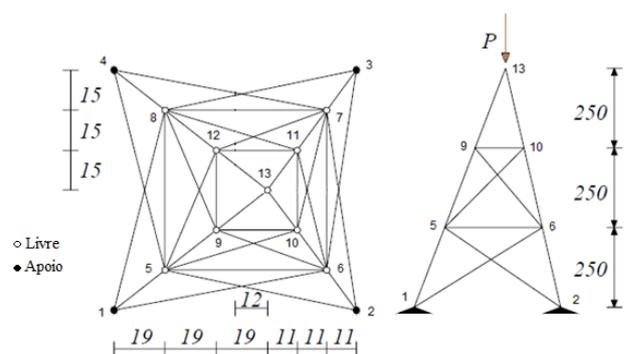


Tabela 2 – Resultados numéricos

| Métodos | NP (k_{total}) | $k_{médio}$ | t (s) | $p_{médio} \pm dp$ |
|---------|--------------------|-------------|-------|--------------------|
| NR | 581 (1179) | 2,03 | 3,33 | $2,61 \pm 0,30$ |
| NRM | 4484 (9006) | 2,01 | 24,90 | $0,85 \pm 0,13$ |
| Broyden | 4314 (8662) | 2,01 | 36,11 | $0,97 \pm 0,21$ |
| PM | 46 (96) | 2,09 | 0,45 | $2,67 \pm 0,45$ |
| PP | 95 (198) | 2,08 | 0,73 | $3,18 \pm 0,90$ |
| Chun | 123 (255) | 2,07 | 0,92 | $3,02 \pm 0,42$ |

Figura 7 – Treliça espacial em forma de torre esbelta com 36 barras



Na Figura 8 são mostradas as trajetórias de equilíbrio não linear (deslocamento horizontal no nó 13 *versus* força P), e pode-se observar boa concordância com os resultados obtidos por Menin (2006) (salienta-se que nas simulações com os métodos implementados foram obtidos mais pontos de equilíbrio nas curvas). Os valores numéricos para NP, k_{total} , $k_{médio}$, t e $p_k \pm dp$ são mostrados na Tabela 3.

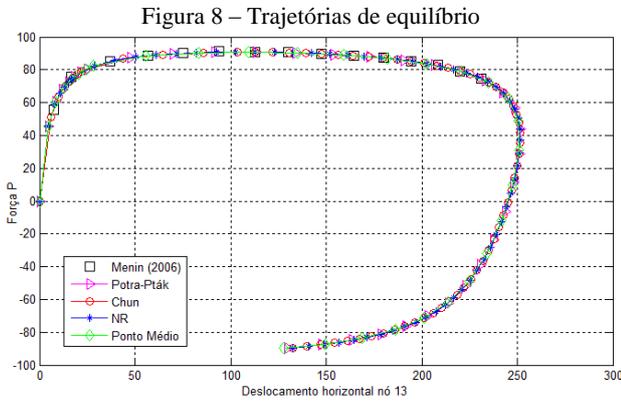


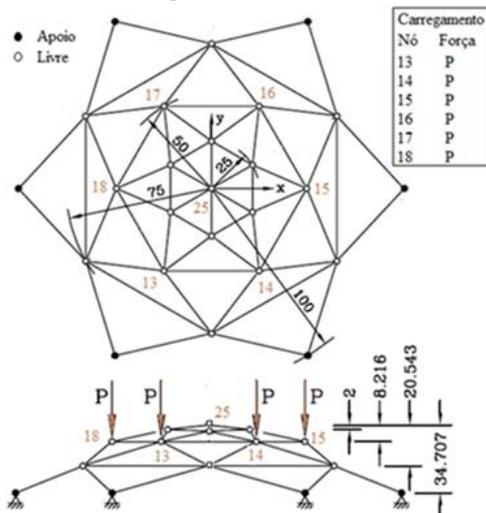
Tabela 3 – Resultados numéricos

| Métodos | NP (k_{total}) | $k_{médio}$ | t (s) | $p_{médio} \pm dp$ |
|---------|--------------------|-------------|-------|--------------------|
| NR | 758 (1525) | 2,01 | 5,02 | $2,60 \pm 0,28$ |
| NRM | 7296 (14652) | 2,01 | 43,82 | $0,85 \pm 0,12$ |
| Broyden | 7767 (15559) | 2,00 | 71,59 | $0,75 \pm 0,19$ |
| PM | 162 (325) | 2,01 | 1,53 | $1,23 \pm 0,11$ |
| PP | 198 (398) | 2,01 | 1,54 | $2,66 \pm 0,44$ |
| Chun | 605 (1218) | 2,01 | 4,66 | $3,45 \pm 0,29$ |

6.4 Treliza espacial do tipo cúpula com 60 barras

Considere na Figura 9 a estrutura articulada espacial do tipo cúpula submetida a seis forças verticais P de igual magnitude aplicadas nos nós 13 a 18. Esta estrutura foi estudada por Choong e Hangai (1993) e Matias (2002). A treliza possui 25 nós e 60 elementos com rigidez axial adimensional $EA = 1,0 \times 10^4$. Os parâmetros utilizados para a estratégia de continuação são: $\Delta l = 2,0$; $N_d = 2$; $tol = 1,0 \times 10^{-7}$; $i_{máx} = 100$; e $\Delta P = 1,0$.

Figura 9 – Modelo estrutural da treliza espacial em forma de cúpula com 60 barras



Na Figura 10 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio, deslocamento vertical no topo da cúpula *versus* força P, verificando-se boa concordância com a resposta obtida por Matias (2002). Na Tabela 4 são apresentados os resultados numéricos das simulações efetuadas. Na Figura 11 pode ser visualizado o gráfico da variação do estimador p_k em relação ao passo de força (NP).

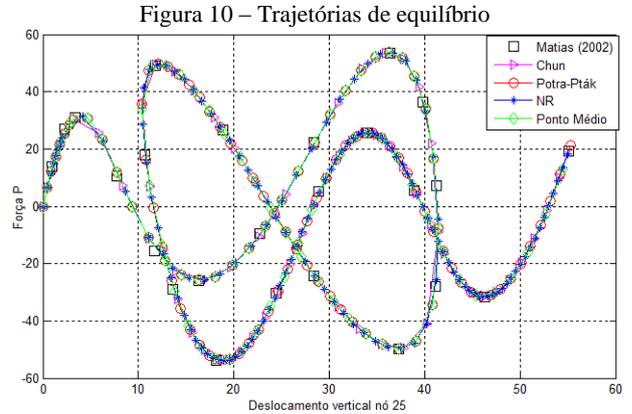
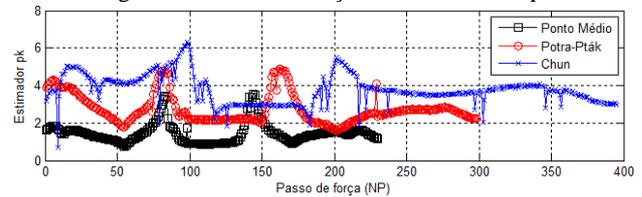


Tabela 4 – Resultados numéricos

| Métodos | NP (k_{total}) | $k_{médio}$ | t (s) | $p_{médio} \pm dp$ |
|---------|------------------------------|-------------|--------|--------------------|
| NR | 1.665 (3.344) | 2,01 | 21,04 | $2,72 \pm 0,44$ |
| NRM | Não convergiu ⁽¹⁾ | | | |
| Broyden | 10.703 (21.436) | 2,00 | 203,51 | $1,11 \pm 0,39$ |
| PM | 230 (460) | 2,00 | 4,41 | $1,45 \pm 0,54$ |
| PP | 298 (599) | 2,01 | 4,54 | $2,72 \pm 0,77$ |
| Chun | 395 (795) | 2,01 | 5,84 | $3,76 \pm 0,78$ |

Figura 11 – Passo de força *versus* estimador p_k



6.5 Análise dos resultados

As estruturas articuladas analisadas são caracterizadas por um comportamento fortemente não linear, em que os caminhos de equilíbrio exibem Pontos Limites de Força (*snap-throughs*) e Pontos Limites de Deslocamento (*snap-backs*). Aqueles são pontos extremos (pontos de máximo ou mínimo) no caminho de equilíbrio, em que a tangente é horizontal, e estes são pontos no caminho de equilíbrio cuja tangente é vertical. Quando a estrutura atinge os pontos limites, a mesma pode tornar-se instável, por isso a identificação deles é de grande importância para um projeto de engenharia.

Os resultados numéricos com os métodos de Potra-Pták, Ponto Médio e Chun mostraram que a convergência para a resposta do problema é alcançada com uma quantidade inferior de incrementos de força e iterações acumuladas necessárias em comparação com os métodos clássicos de NR, NRM e Broyden, associados à estratégia de continuação Comprimento de Arco Linear.

Os métodos do Ponto Médio e de Potra-Pták apresentaram melhor eficiência computacional quanto ao tempo de processamento em todas as simulações. O custo maior da iteração desses métodos, em contraste com as iterações dos métodos de NR e NRM, é compensado com a redução do número passos de força e iterações necessárias para a convergência da solução. Isso implica na diminuição da quantidade de vezes em que os sistemas de equações lineares, gerados da discretização por Elementos Finitos, são solucionados no processo incremental e, ainda, diminuem-se as atualizações da matriz de rigidez \mathbf{K} e do vetor de forças internas \mathbf{F}_{int} durante o processamento. Nesses métodos de dois passos, são efetuadas a resolução de dois sistemas de equações lineares a cada iteração, ver a formulação dos métodos nas Seções 4.1 e 4.2.

Nota-se que na iteração dos métodos de Potra-Pták e de Chun é utilizada a mesma matriz de rigidez para a solução dos sistemas de equações lineares; assim, estes sistemas podem ser solucionados via decomposição, por exemplo, decomposição LU, visto que uma única fatoração no início da iteração é necessária.

Deve-se ressaltar, entretanto, que os problemas numéricos resolvidos são de pequena escala no contexto computacional atual, pois possuem menos de 100 graus de liberdade. Para sistemas dessa ordem de grandeza, métodos diretos costumam ser mais eficientes. Os métodos iterativos de solução são vantajosos quando os problemas tiverem um número maior de graus de liberdade e recursos de alocação de memória.

Na análise efetuada com o método de NRM no último problema estudado, verificou-se uma instabilidade numérica e a convergência para a solução não ocorreu. Com efeito, problemas de convergência com esse método podem ocorrer durante a análise, uma vez que a matriz de rigidez \mathbf{K} é computada somente no início do passo de força corrente, mantendo-se invariável ao longo do ciclo iterativo no mesmo. A convergência pode ser alcançada com a diminuição dos valores do incremento de comprimento de arco (Δl) e/ou incremento de força (ΔP).

As soluções dos problemas com o método de Broyden foram obtidas com o maior tempo de processamento. Nesse método, a matriz de rigidez \mathbf{K} é substituída pela matriz de aproximação \mathbf{B} que se atualiza a cada iteração no passo de força por meio da Equação 47.

$$\mathbf{B}^{(k)} = \mathbf{B}^{(k-1)} + \frac{(\mathbf{y}^{(k)} - \mathbf{B}^{(k-1)}\mathbf{s}^{(k)})\mathbf{s}^{(k)T}}{\mathbf{s}^{(k)T}\mathbf{s}^{(k)}}, \quad (47)$$

Em que: $\mathbf{s}^{(k)} = \delta \mathbf{d}^{(k)}$, $\mathbf{y}^{(k)} = \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k)}) - \mathbf{g}(\mathbf{d}^{(k-1)})$, e $\mathbf{B}^{(0)} = \mathbf{K}^{(0)}$. A desvantagem dos métodos quase-Newton é a perda da convergência quadrática do método de Newton-Raphson, sendo substituída, em geral, por uma convergência superlinear.

O procedimento utilizado para a mudança do sinal do incremento inicial de força $\Delta l^{(0)}$ (${}^t\Delta \mathbf{u}^T \delta \mathbf{u}_r$) mostrou-se eficiente, visto que conseguiu identificar e ultrapassar os pontos críticos existentes nos caminhos de equilíbrio, com a definição da direção correta do parâmetro de força. Além disso, o dispositivo para a verificação da mudança do sinal é de fácil implementação computacional; há outras

estratégias, como por exemplo, a variação do sinal do determinante da matriz de rigidez ou a variação do sinal de algum autovalor da mesma.

Para os problemas estudados foi determinado o estimador p_k a cada passo de força, utilizando-se a norma do vetor de forças desequilibradas. Observa-se na Figura 11 que o valor de p_k varia ao longo da simulação. A cada passo, tem-se um novo sistema de equações não lineares a ser resolvido com uma nova aproximação inicial ${}^t\mathbf{d}^{(0)}$. Analisando os valores obtidos para $p_{médio}$, vê-se que os métodos de Chun e Potra-Pták apresentaram, em geral, os maiores valores nas análises (maior taxa de convergência).

Com relação ao parâmetro $k_{médio}$ obtido nas simulações, nota-se que são necessárias duas iterações para alcançar a convergência em cada passo, em média, independentemente do método utilizado. O ganho dos algoritmos desenvolvidos está relacionado à qualidade da correção desse incremento na fase iterativa, ou seja, no tamanho do incremento de força λ .

Dessa maneira, não há mudanças substanciais no número de iterações para cada incremento de força nos exemplos numéricos analisados, e sim uma diminuição do número necessário de passos (NP) para se obter a trajetória de equilíbrio completa da estrutura.

A matriz de rigidez \mathbf{K} do sistema estrutural é caracterizada por um elevado índice de esparsidade. Pode-se obter uma melhor eficiência numérica dos modelos apresentados por meio de algoritmos que armazenam os coeficientes não nulos presentes na matriz e efetuam operações entre matrizes e vetores com estes coeficientes, evitando, dessa maneira, os cálculos redundantes com elementos nulos.

CONCLUSÃO

A partir dos exemplos numéricos estudados, destaca-se a boa concordância entre os resultados obtidos e os da literatura no que tange à obtenção das trajetórias de equilíbrio, validando os códigos computacionais desenvolvidos. A crescente simulação de modelos estruturais complexos –por meio do Método dos Elementos Finitos– tem exigido a manipulação de grande quantidade de dados, que é intrínseco ao método, bem como a procura da diminuição do tempo de resposta para a resolução do problema estrutural.

As análises não lineares efetuadas com os métodos do Ponto Médio e Potra-Pták, associados à técnica de Comprimento de Arco Linear, mostraram-se bastante promissoras, uma vez que para a classe de problemas testados não ocorreram instabilidades numéricas durante as simulações, além de alcançarem a solução com um menor número de passos de força e de iterações acumuladas e, conseqüentemente, com um menor tempo de processamento.

De fato, nas simulações não lineares de problemas de estruturas em um processo incremental e iterativo, resolver o sistema de equações lineares gerado a cada iteração é, em geral, o passo mais caro e que demanda maior tempo e esforço computacional durante o processamento. Mesmo com o impacto que o setor da microeletrônica tem causado

no desenvolvimento de componentes computacionais, com destaque a sistemas mais compactos de memória e processadores cada vez mais rápidos, ainda assim, essas poderosas máquinas por si só nem sempre conseguem tratar adequadamente os diversos modelos estruturais, quer por falta de memória, quer por excessivo tempo de resposta.

Neste trabalho foi feita uma adaptação na equação de restrição proposta por Yang e Kuo (1994) para o cálculo do subincremento de força; com os valores admitidos para os parâmetros C_i , k_i e H_i chega-se à estratégia de Comprimento de Arco Linear. As formulações de outras técnicas de continuação podem ser obtidas com a atribuição de outros valores a esses parâmetros, como Norma Mínima dos Deslocamentos Residuais, Resíduo Ortogonal, Deslocamento Generalizado, Comprimento de Arco Cilíndrico.

Como pesquisa futura sugere-se: a consideração do efeito da não linearidade física por meio da teoria da Mecânica do Dano; e adaptar outros métodos de solução ao problema não linear estrutural – métodos da família Chebyshev-Halley e método de Jarratt.

AGRADECIMENTOS

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática da UEM e à UTFPR pelo apoio para a realização desta pesquisa.

REFERÊNCIAS

BATOZ, J. L.; DHAT, G. Incremental displacement algorithms for nonlinear problems. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 14, n. 8, p. 1262-1267, 1979. <https://doi.org/10.1002/nme.1620140811>.

CHOONG, K. K.; HANGAI, Y. Review on methods of bifurcation analysis for geometrically nonlinear structures. **Bulletin of IASS**, v. 34, n. 112, p. 133-149, 1993.

CHUN, C. A new iterative method for solving nonlinear equations. **Applied Mathematics and Computation**, v. 178, n. 2, p. 415-422, 2006. <https://doi.org/10.1016/j.amc.2005.11.055>.

CODA, H. B. **Análise não linear geométrica de sólidos e estruturas: uma formulação posicional baseada no MEF**. Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2003. Texto complementar para concurso de professor titular, SET-EESC-USP.

CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33-35, p. 3541-3557, 2004. <https://doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>.

CRISFIELD, M. A. **Non-Linear Finite Element Analysis of Solids and Structures**. Volume 1: Essentials. New York: John Wiley & Sons Ltd., 1991.

EUSTÁQUIO, R. G. **Classe de métodos Chebyshev-Halley inexacta livre de tensores com convergência cúbica para resolução de sistemas não lineares e um estudo sobre raio de convergência**. Tese (Doutorado), Programa de Pós-Graduação em Métodos Numéricos em Engenharia, Universidade Federal do Paraná, 2013.

FRONTINI, M.; SORMANI, E. Third-order methods from quadrature formulae for solving systems of nonlinear equations.

Applied Mathematics and Computation, v. 149, n. 3, p. 771-782, 2004. [https://doi.org/10.1016/S0096-3003\(03\)00178-4](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00178-4).

GEERS, M. G. D. Enhanced solution control for physically and geometrically non-linear problems. Part ii – comparative performance analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 2, p. 205-230, 1999. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990920\)46:2<205::AID-NME669>3.0.CO;2-S](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990920)46:2<205::AID-NME669>3.0.CO;2-S). [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990920\)46:2<177::AID-NME668>3.0.CO;2-L](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990920)46:2<177::AID-NME668>3.0.CO;2-L).

HAUGEN, B. **Buckling and Stability Problems for Thin Shell Structures using High-Performance Finite Elements**. PhD Dissertation, University of Colorado, Boulder, CO, 1994.

LACERDA, E. G. M.; MACIEL, D. N.; SCUDELARI, A. C. Geometrically static analysis of trusses using the arc-length method and the positional formulation of Finite Element Method. In: XXXV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, 2014. **Anais...** Evandro Parente Jr. (ed.), ABMEC, Fortaleza, CE, Brazil, 2014.

LEON, S. E.; PAULINO, G. H.; PEREIRA, A.; MENEZES, I. F. M.; LAGES, E. N. A Unified Library of Nonlinear Solution Schemes. **Applied Mechanics Reviews**, v. 64, n. 4, p. 040803-040803-26, 2011. <https://doi.org/10.1115/1.4006992>.

MATIAS, W. T. El control variable de los desplazamientos en el análisis no lineal elástico de estructuras de barras. **Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería**, v. 18, n. 4, p. 549-572, 2002.

MATLAB, **version 8.6.0 (R2015b)**. Natick, Massachusetts: The MathWorks Inc., 2015.

MAXIMIANO, D. P.; SILVA, A. R. D.; SILVEIRA, R. A. M. Iterative strategies associated with the normal flow technique on the nonlinear analysis of structural arches. **Revista Escola de Minas (Impresso)**, v. 67, n. 2, p. 143-150, 2014. <https://doi.org/10.1590/S0370-44672014000200003>.

MENIN, R. C. G. **Aplicação da descrição cinemática co-rotacional na análise não-linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas**. Tese (Doutorado), Universidade de Brasília, Faculdade de Tecnologia, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, 2006.

ONATE, E. **Una formulación incremental para problemas de no linealidad geométrica por el metodo de los elementos finitos**. UPC: Barcelona, Espanha, 1986.

POTRA, F. A.; PTÁK, V. Nondiscrete Induction and Iterative Processes. **Research Notes in Mathematics**, 103, 1984.

POWELL, G.; SIMONS, J. Improved iteration strategy for nonlinear structures. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 17, n. 10, p. 1455-1467, 1981. <https://doi.org/10.1002/nme.1620171003>.

RAMM, E. **Strategies for tracing the non-linear response near limit-points, nonlinear finite element analysis in structural mechanics**. Wunderlich, W. (ed.). Berlin: Springer-Verlag, p. 63-89, 1981. https://doi.org/10.1007/978-3-642-81589-8_5.

RIKS, E. The application of Newton's methods to the problems elastic stability. **Journal of Applied Mechanics**, v. 39, n. 4, p. 1060-1065, 1972. <https://doi.org/10.1115/1.3422829>.

RIKS, E. An incremental approach to the solution of snapping and buckling problems. **International Journal of Solids and**

Structures, v. 15, n. 7, p. 529-551, 1979.

[https://doi.org/10.1016/0020-7683\(79\)90081-7](https://doi.org/10.1016/0020-7683(79)90081-7).

RODRIGUES, P. F. N.; VARELA, W. D.; SOUZA, R. A.

Análise de Estratégias de Solução do Problema Não-Linear.

Revista de Ciência & Tecnologia, v. 8, n. 2, p. 36-49, 2008.

SEÇER, M. Inelastic and large deformation analyses of plane trusses. **Technology**, v. 12, n.3, p. 175-184, 2009.

SILVEIRA, R. A. M.; ROCHA, G.; GONÇALVES, P. B.

Estratégias numéricas para análises geometricamente não lineares. In: XV Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Águas de Lindóia, 1999. **Anais...** Águas de Lindóia: 1999.

SOLEYMANI, F.; SHARMA, R.; LI, X.; TOHIDI, E. An optimized derivative-free form of the Potra–Pták method.

Mathematical and Computer Modelling, v. 56, n. 5-6, p. 97-104, 2012. <https://doi.org/10.1016/j.mcm.2011.12.005>.

YANG, Y. B.; KUO, S. R. **Theory & Analysis of Nonlinear Framed Structures**. Singapore: Prentice-Hall, 1994.

YANG, Y. B.; SHIEH, M. S. Solution method for nonlinear problems with multiple critical points. **American Institute of Aeronautics and Astronautics Journal**, v. 28, n.12, p. 2110-2116, 1990. <https://doi.org/10.2514/3.10529>.