

## APLICAÇÃO DO MÉTODO DOS MODOS INCOMPATÍVEIS NA ANÁLISE DE PEÇAS FLETIDAS

*USING THE INCOMPATIBLE DISPLACEMENT MODE FOR FLEXURAL ANALYSIS*

Sebastião Simão da Silva<sup>1</sup>, William Taylor Matias Silva<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Mestre em Engenharia Civil, Instituto Federal de Educação, Ciência e Tecnologia da Paraíba, PB.  
E-mail: sebastiao\_simao@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Doutor em Engenharia Civil, Universidade de Brasília, DF. E-mail: taylor@unb.br.

### RESUMO

Elementos isoparamétricos de baixa ordem são incapazes de representar de forma precisa o estado tensão oriundo da flexão. Dentre as várias técnicas conhecidas na literatura para melhorar o desempenho destes elementos, uma das mais simples tanto do ponto de vista teórico como de implementação computacional é o método dos deslocamentos incompatíveis ou não conformes. Entretanto, ao se consultar a literatura observa-se que a formulação desse método, geralmente, é descrita sem muitos detalhes. Este trabalho tem por objetivo apresentar de forma pormenorizada a inclusão dos modos incompatíveis no elemento hexaédrico isoparamétrico de oito nós com o intuito de melhorar seu desempenho na análise de peças fletidas. Dessa maneira, descreve-se passo a passo a obtenção da matriz de rigidez e das forças internas do elemento hexaédrico enriquecido para sua implementação computacional. Analisa-se uma viga engastada e uma placa quadrada sujeitas a diferentes carregamentos e com diferentes malhas. Comparam-se os resultados numéricos com os resultados obtidos utilizando o elemento hexaédrico de oito nós padrão e com os valores teóricos.

**Palavras-chave:** Método dos modos incompatíveis, Elementos finitos de sólido 3D, Código computacional.

### ABSTRACT

Low order isoparametric elements are unable to accurately represent the bending stress state. Among the several techniques known in the literature to improve the performance of these elements, one of the simplest both theoretically and computational implementation is the method of incompatible modes. However, when consulting the literature it is observed that the formulation of this method is generally described without much detail. The aim of this work is to present in detail the inclusion of the incompatible modes in the eight node isoparametric hexahedral element. In this way, it is described step-by-step the obtaining of the stiffness matrix and the internal forces of the enriched hexahedral element for its computational implementation. A clamped beam and a thin square plate subjected to different loads and with different meshes is analyzed. The numerical results are compared with the results obtained using the standard eight-node hexahedral element and theoretical values.

**Keywords:** Incompatible displacement mode, 3D finite element, Computed code.

### 1 – INTRODUÇÃO

Um das imprecisões dos elementos finitos isoparamétricos de baixa ordem é a incapacidade desses elementos de representar adequadamente o estado de tensão oriundo da flexão, o que leva a uma estimativa excessiva da rigidez de peças fletidas. Neste caso, em uma análise de elementos finitos pode-se melhorar os resultados com malhas refinadas ou com o uso de elementos de alta ordem. Às vezes, a necessidade de refinar a malha em regiões onde há variações bruscas nos gradientes de deslocamentos leva a problemas numéricos de mal condicionamento da matriz de rigidez global. Por outro lado, o uso de uma malha refinada com elementos de alta ordem pode tornar o custo computacional proibitivo.

Para melhorar o desempenho dos elementos de baixa ordem Wilson *et al.* (1973) introduziram o método dos deslocamentos incompatíveis sem que isso implicasse em aumento significativo de armazenamento e tempo computacional. Posteriormente, Taylor, Beresford e Wilson (1976) melhoraram essa formulação ao propor a integração numérica no centroide dos elementos das

parcelas correspondentes aos modos incompatíveis para o cálculo da matriz de rigidez e das forças internas.

Em Wilson (2002) descreve-se uma resenha histórica sobre o desenvolvimento do método dos deslocamentos incompatíveis e a contribuição de diversos autores para o seu melhoramento. O desenvolvimento do método dos modos incompatíveis além de outras formulações permitiu o melhoramento do desempenho dos elementos finitos padrão e, dessa forma, tem reduzido a necessidade do emprego de integração reduzida com o uso de elementos isoparamétricos de alta ordem.

Os elementos incompatíveis têm sido usados em diversos tipos de análises. Por exemplo, Crisfield e Moita (1996) utilizaram esses elementos para realizar análise não linear geométrica do contínuo. Gharzeddine e Ibrahimbegovic (2000) empregaram os elementos incompatíveis para deformação finita, hiperelasticidade. Já Liu, Cao e Zhao (2014) aplicaram elementos finitos incompatíveis 3D na análise dinâmicas de mecanismos dinâmicos de multicorpos.

A principal contribuição deste trabalho é a descrição minuciosa da inclusão dos modos incompatíveis no

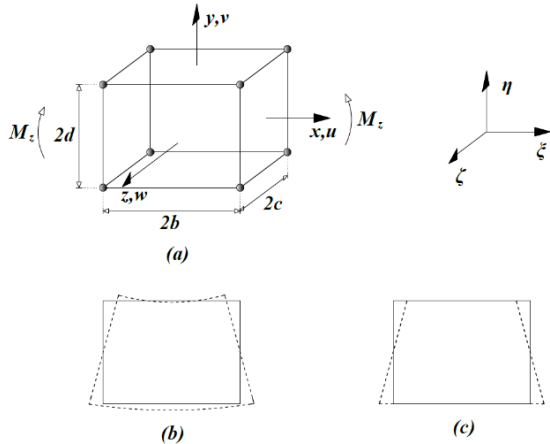
elemento isoparamétrico de oito nós, uma vez que na literatura técnica, esta inclusão é descrita sem muitos detalhes. A descrição passo a passo, tem como objetivo a facilitação da implementação computacional.

Finalmente, apresenta-se a formulação do elemento hexaédrico linear incompatível e o algoritmo para o cálculo da matriz de rigidez e das forças internas. Para avaliar o seu desempenho, faz-se uma simulação numérica de uma viga engastada sujeita a diferentes tipos de carregamentos. Com a mesma finalidade, analisa-se uma placa quadrada engastada em todas as bordas e sujeita a uma carga concentrada no seu centro. No exemplo da viga são obtidos resultados teóricos e computacionais de deslocamentos na extremidade livre e de tensões, avaliadas nos pontos de Gauss próximos ao engaste. Por outro lado, valores de deslocamentos analíticos e numéricos são calculados no centro da placa quadrada.

## 2 – ERROS NO ELEMENTO PADRÃO E SEU MELHORAMENTO COM MODOS INCOMPATÍVEIS

Uma das principais deficiências associadas aos elementos finitos de baixa ordem é sua inabilidade em representar o estado de deformação resultante de uma flexão pura. Esta situação é ilustrada na Figura 1a na qual um elemento sólido de oito nós está sujeito a uma flexão pura  $M_z$  sobre as faces normais ao eixo- $x$ , e no plano  $x$ - $y$ . Para esse tipo de carregamento, os deslocamentos exatos do elemento são mostrados na Figura 1b, enquanto que os deslocamentos obtidos mediante uma análise com o elemento finito são visualizados na Figura 1c. Neste último caso, percebe-se que a resposta é mais rígida quando comparado com aquela exata obtida no primeiro caso. Isto acontece porque o campo de deslocamentos aproximados não contém todos os termos necessários, quadráticos, nas funções de forma. Assim, o elemento é inadequado para representar a resposta à flexão.

Figura 1 – (a) Elemento finito sólido de oito nós; (b) Deslocamentos exatos; (c) Deslocamentos via elemento finito



A resposta exata do problema mostrado na Figura 1b é obtida pela Teoria da Elasticidade. Nesta formulação analítica é estabelecido que os deslocamentos reais produzem uma energia de deformação no sistema que é gerada pelas deformações normais  $\mathcal{E}x$  e  $\mathcal{E}y$ . Entretanto, as

funções de interpolação para o elemento finito de baixa ordem padrão fazem com que o elemento finito armazene uma energia de deformação gerada tanto pelas deformações normais quanto por uma parcela de deformação de cisalhamento  $\gamma_{xy}$ . Em outras palavras, a aproximação do estado de flexão pura resulta em considerável parcela fictícia de deformações de cisalhamento, a qual é frequentemente chamada “deformação parasítica” (COOK, 1975). Esta deformação indesejada, pois faz com que o elemento finito apresente um aumento artificial da rigidez. Em Krishnamoorthy (2001) encontra-se a solução analítica para o campo de deslocamentos representado na Figura 1b usando a Teoria da Elasticidade para o estado plano de tensão.

## 3 – FORMULAÇÃO DO ELEMENTO FINITO SÓLIDO INCOMPATÍVEL

Nesta seção apresenta-se passo a passo a inclusão dos modos incompatíveis no elemento hexaédrico isoparamétrico de oito nós e os fluxogramas para a implementação computacional.

### 3.1 Geometria e campo de deslocamentos

Seja o elemento finito hexaédrico de oito nós mostrado na Figura 1. A geometria do elemento pode ser interpolada fazendo o uso da Equação 1.

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ \vdots \\ x_8 \\ y_8 \\ z_8 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Ou na forma matricial pela Equação 2.

$$x = N p \quad (2)$$

Em que:  $x$  são as coordenadas de qualquer ponto do elemento,  $N$  é a matriz das funções de forma, e  $p$  as coordenadas nodais.

De maneira similar, os deslocamentos em qualquer ponto no interior do elemento podem ser interpolados conforme descrito pela Equação 3.

$$\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & 0 & \dots & N_8 & 0 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & 0 & \dots & 0 & N_8 & 0 \\ 0 & 0 & N_1 & 0 & 0 & N_2 & \dots & 0 & 0 & N_8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \\ \vdots \\ u_8 \\ v_8 \\ w_8 \end{bmatrix} \quad (3)$$

Ou na forma matricial pela Equação 4.

$$u_u = N d \quad (4)$$

Em que:  $u_u$  são os deslocamentos em qualquer ponto do elemento, e  $d$  dos deslocamentos nodais.

As funções de interpolação do elemento hexaédrico isoparamétrico são dadas pela Equação 5.

$$N_i = \frac{1}{8}(1-\xi_i\xi)(1-\eta_i\eta)(1-\zeta_i\zeta) \quad i=1,\dots,8 \quad (5)$$

Acrescenta-se aos deslocamentos no interior do elemento uma parcela de deslocamentos não conforme  $u_a$  dada pela Equação 6.

$$u = u_u + u_a = N d + M \alpha \quad (6)$$

Em que:  $M$  é a matriz que contém as funções de interpolação para os modos incompatíveis, expressa pela Equação 7.

$$M = \begin{bmatrix} M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_1 & M_2 & M_3 \end{bmatrix} \quad (7)$$

Os coeficientes da matriz  $M$  são dados pela Equação 8.

$$M_1 = 1 - \xi^2 \quad (8a)$$

$$M_2 = 1 - \eta^2 \quad (8b)$$

$$M_3 = 1 - \zeta^2 \quad (8c)$$

Por último,  $\alpha$  é um vetor de deslocamentos generalizados da formulação incompatível. Cabe salientar que estes deslocamentos não possuem relação com os nós do elemento. Este vetor é descrito pela Equação 9.

$$\alpha^T = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4 \ \alpha_5 \ \alpha_6 \ \alpha_7 \ \alpha_8 \ \alpha_9] \quad (9)$$

Uma vez que se está trabalhando com coordenadas naturais, é necessário realizar um mapeamento entre estas coordenadas e o sistema de referência cartesiano. Isto é feito por meio da Equação 10.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} = J \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (10)$$

Em que:  $J$  é a matriz Jacobiana, a qual é dada pela Equação 11.

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \zeta} & \frac{\partial y}{\partial \zeta} & \frac{\partial z}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (11)$$

Por outro lado, a relação entre os sistemas cartesianos e natural é dada pela Equação 12.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = J^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (12)$$

Em que:  $J^{-1}$  é a inversa da matriz Jacobiana.

Nas equações posteriores, as componentes dessa matriz serão expressas conforme a Equação 13.

$$J^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{11} & \bar{J}_{12} & \bar{J}_{13} \\ \bar{J}_{21} & \bar{J}_{22} & \bar{J}_{23} \\ \bar{J}_{31} & \bar{J}_{32} & \bar{J}_{33} \end{bmatrix} \quad (13)$$

### 3.2 Relação deformação-deslocamento

A relação entre as deformações e os deslocamentos é expressa pela Equação 14.

$$\varepsilon = \varepsilon_u + \varepsilon_a = B d + B_a \alpha^* \quad (14)$$

Em que:  $B$  é a matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de forma;  $B_a$  é a matriz que contém as derivadas cartesianas das funções de interpolação dos modos incompatíveis; e  $\alpha^*$  é o vetor de deslocamentos generalizados, porém, com algumas componentes com posições alteradas.

A matriz  $B$  é dada pela Equação 15.

$$B = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial x} & 0 & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \dots & 0 & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial z} \\ \frac{\partial N_1}{\partial y} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & 0 & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial y} & 0 \\ 0 & \frac{\partial N_1}{\partial z} & \frac{\partial N_1}{\partial y} & \dots & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial y} & \frac{\partial N_8}{\partial y} \\ \frac{\partial N_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial N_8}{\partial z} & 0 & \frac{\partial N_8}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (15)$$

Por sua vez, o vetor  $\alpha^*$  é dado pela Equação 16.

$$\alpha^{*T} = [\alpha_1 \ \alpha_4 \ \alpha_7 \ \alpha_2 \ \alpha_5 \ \alpha_8 \ \alpha_3 \ \alpha_6 \ \alpha_9] \quad (16)$$

Observa-se que algumas posições das componentes desse vetor foram alteradas em relação ao vetor  $\alpha$  descrito na Equação 9. Esta alteração está relacionada com a posição das componentes do vetor de deformação de acordo com a notação de Voigt. Desta maneira, o vetor de deformação é escrito pela Equação 17.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial z} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (17)$$

Por meio das Equações 6, 7 e 17 obtém-se as componentes de deformação correspondentes aos modos incompatíveis, de acordo com a Equação 18.

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial x} \alpha_1 + \frac{\partial M_2}{\partial x} \alpha_2 + \frac{\partial M_3}{\partial x} \alpha_3 \quad (18a)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial M_1}{\partial y} \alpha_4 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \alpha_5 + \frac{\partial M_3}{\partial y} \alpha_6 \quad (18b)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial M_1}{\partial z} \alpha_7 + \frac{\partial M_2}{\partial z} \alpha_8 + \frac{\partial M_3}{\partial z} \alpha_9 \quad (18c)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial y} \alpha_1 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \alpha_2 + \frac{\partial M_3}{\partial y} \alpha_3 + \frac{\partial M_1}{\partial x} \alpha_4 + \frac{\partial M_2}{\partial x} \alpha_5 + \frac{\partial M_3}{\partial x} \alpha_6 \quad (18d)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial M_1}{\partial z} \alpha_4 + \frac{\partial M_2}{\partial z} \alpha_5 + \frac{\partial M_3}{\partial z} \alpha_6 + \frac{\partial M_1}{\partial y} \alpha_7 + \frac{\partial M_2}{\partial y} \alpha_8 + \frac{\partial M_3}{\partial y} \alpha_9 \quad (18e)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial M_1}{\partial z} \alpha_1 + \frac{\partial M_2}{\partial z} \alpha_2 + \frac{\partial M_3}{\partial z} \alpha_3 + \frac{\partial M_1}{\partial x} \alpha_7 + \frac{\partial M_2}{\partial x} \alpha_8 + \frac{\partial M_3}{\partial x} \alpha_9 \quad (18f)$$

A Equação 18 pode ser colocada em forma matricial de acordo com a Equação 19.

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{yz} \\ \gamma_{zx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_4 \\ \alpha_7 \\ \alpha_3 \\ \alpha_6 \\ \alpha_9 \end{bmatrix} \quad (19)$$

Na Equação 19 observa-se o reposicionamento dos coeficientes do vetor  $\alpha$  para manter a compatibilidade com as componentes do vetor de deformação. Finalmente, define-se a matriz deformação-deslocamento para os modos incompatíveis por meio da Equação 20.

$$\mathbf{B}_\alpha = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} \\ \frac{\partial M_1}{\partial y} & \frac{\partial M_1}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial y} & \frac{\partial M_2}{\partial x} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial y} & \frac{\partial M_3}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial M_1}{\partial z} & \frac{\partial M_1}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial z} & \frac{\partial M_2}{\partial y} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial z} & \frac{\partial M_3}{\partial y} \\ \frac{\partial M_1}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_1}{\partial x} & \frac{\partial M_2}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_2}{\partial x} & \frac{\partial M_3}{\partial z} & 0 & \frac{\partial M_3}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (20)$$

Uma vez que coordenadas naturais são utilizadas na definição das funções de forma para os modos incompatíveis, é necessário fazer o mapeamento deste sistema para o cartesiano. Para tanto, a inversa da matriz Jacobiana avaliada no centroide do elemento será utilizada, dada pela Equação 21.

$$\mathbf{J}_0^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{0,11} & \bar{J}_{0,12} & \bar{J}_{0,13} \\ \bar{J}_{0,21} & \bar{J}_{0,22} & \bar{J}_{0,23} \\ \bar{J}_{0,31} & \bar{J}_{0,32} & \bar{J}_{0,33} \end{bmatrix} \quad (21)$$

As derivadas das funções de forma incompatíveis podem ser dadas pela Equação 22.

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{J}_{0,11} & \bar{J}_{0,12} & \bar{J}_{0,13} \\ \bar{J}_{0,21} & \bar{J}_{0,22} & \bar{J}_{0,23} \\ \bar{J}_{0,31} & \bar{J}_{0,32} & \bar{J}_{0,33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \\ \frac{\partial}{\partial \zeta} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Utilizando sucessivamente a Equação 22 obtém-se as derivadas cartesianas dos modos incompatíveis por meio da Equação 23.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,12} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,13} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (23a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,22} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,23} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (23b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,32} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,33} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (23c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,22} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,23} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (23d)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,12} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,13} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (23e)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} \frac{\partial v}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,32} \frac{\partial v}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,33} \frac{\partial v}{\partial \zeta} \quad (23f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{J}_{0,21} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,22} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,23} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (23g)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{J}_{0,31} \frac{\partial u}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,32} \frac{\partial u}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,33} \frac{\partial u}{\partial \zeta} \quad (23h)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{J}_{0,11} \frac{\partial w}{\partial \xi} + \bar{J}_{0,12} \frac{\partial w}{\partial \eta} + \bar{J}_{0,13} \frac{\partial w}{\partial \zeta} \quad (23i)$$

Substituindo as Equações 7 e 8 na Equação 6 chega-se à parcela dos deslocamentos incompatíveis  $u_\alpha$ .

Substituindo este resultado na Equação 23 produz-se à Equação 24.

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \bar{J}_{0,11}(-2\xi\alpha_1) + \bar{J}_{0,12}(-2\eta\alpha_2) + \bar{J}_{0,13}(-2\zeta\alpha_3) \quad (24a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \bar{J}_{0,21}(-2\xi\alpha_4) + \bar{J}_{0,22}(-2\eta\alpha_5) + \bar{J}_{0,23}(-2\zeta\alpha_6) \quad (24b)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = \bar{J}_{0,31}(-2\xi\alpha_7) + \bar{J}_{0,32}(-2\eta\alpha_8) + \bar{J}_{0,33}(-2\zeta\alpha_9) \quad (24c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \bar{J}_{0,21}(-2\xi\alpha_1) + \bar{J}_{0,22}(-2\eta\alpha_2) + \bar{J}_{0,23}(-2\zeta\alpha_3) \quad (24d)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \bar{J}_{0,11}(-2\xi\alpha_4) + \bar{J}_{0,12}(-2\eta\alpha_5) + \bar{J}_{0,13}(-2\zeta\alpha_6) \quad (24e)$$

$$\frac{\partial v}{\partial z} = \bar{J}_{0,31}(-2\xi\alpha_4) + \bar{J}_{0,32}(-2\eta\alpha_5) + \bar{J}_{0,33}(-2\zeta\alpha_6) \quad (24f)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \bar{J}_{0,21}(-2\xi\alpha_7) + \bar{J}_{0,22}(-2\eta\alpha_8) + \bar{J}_{0,23}(-2\zeta\alpha_9) \quad (24g)$$

$$\frac{\partial u}{\partial z} = \bar{J}_{0,31}(-2\xi\alpha_1) + \bar{J}_{0,32}(-2\eta\alpha_2) + \bar{J}_{0,33}(-2\zeta\alpha_3) \quad (24h)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \bar{J}_{0,11}(-2\xi\alpha_7) + \bar{J}_{0,12}(-2\eta\alpha_8) + \bar{J}_{0,13}(-2\zeta\alpha_9) \quad (24i)$$

Fazendo a comparação entre a Equação 24 e a Equação 19 chega-se à expressão final matriz deformação-deslocamento,  $B\alpha$ , descrita na Equação 25.

$$B_{\alpha} = \begin{bmatrix} -2\xi\bar{J}_{0,11} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0,12} & 0 & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0,13} & 0 & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{0,21} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0,22} & 0 & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0,23} & 0 \\ 0 & 0 & -2\xi\bar{J}_{0,31} & 0 & 0 & -2\eta\bar{J}_{0,32} & 0 & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0,33} \\ -2\xi\bar{J}_{0,21} & -2\xi\bar{J}_{0,11} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0,22} & -2\eta\bar{J}_{0,12} & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0,23} & -2\zeta\bar{J}_{0,13} & 0 \\ 0 & -2\xi\bar{J}_{0,31} & -2\xi\bar{J}_{0,21} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0,32} & -2\eta\bar{J}_{0,22} & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0,33} & -2\zeta\bar{J}_{0,23} \\ -2\xi\bar{J}_{0,31} & 0 & -2\xi\bar{J}_{0,11} & -2\eta\bar{J}_{0,32} & 0 & -2\eta\bar{J}_{0,12} & -2\zeta\bar{J}_{0,33} & 0 & -2\zeta\bar{J}_{0,13} \end{bmatrix} \quad (25)$$

### 3.3 Matrizes de rigidez

A energia de deformação de um corpo elástico é dada pela Equação 26.

$$U = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\epsilon}^T C \boldsymbol{\epsilon} dV \quad (26)$$

Em que:  $C$  é a matriz constitutiva do elemento sólido.

Substituindo a Equação 14 na Equação 26, a expressão da energia pode ser reescrita pela Equação 27.

$$U = \frac{1}{2} \int_V [d^T B_u^T + \alpha^{*T} B_{\alpha}^T] C [B_u d + B_{\alpha} \alpha^*] dV \quad (27)$$

Ao derivar a energia de deformação dada na Equação 27 em relação aos deslocamentos  $d$  e aos parâmetros  $\alpha^*$  obtêm-se as equações de equilíbrio do elemento expressas pela Equação 28.

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{u\alpha} \\ K_{\alpha u} & K_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d \\ \alpha^* \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} q \\ \theta \end{bmatrix} \quad (28)$$

Em que:  $q$  é o vetor das forças nodais equivalentes.

As submatrizes do sistema são dadas pela Equação 29.

$$K_{uu} = \int_V B^T C B dV \quad (29a)$$

$$K_{u\alpha} = \int_V B^T C B_{\alpha} dV \quad (29b)$$

$$K_{\alpha u} = \int_V B_{\alpha}^T C B dV \quad (29c)$$

$$K_{\alpha\alpha} = \int_V B_{\alpha}^T C B_{\alpha} dV \quad (29d)$$

Aplicando-se a condensação estática na Equação 29 obtêm-se os modos incompatíveis e a matriz de rigidez equivalente do elemento, de acordo com a Equação 30.

$$\alpha^* = K_{\alpha\alpha}^{-1} K_{\alpha u} d \quad (30a)$$

$$K = K_{uu} - K_{u\alpha} K_{\alpha\alpha}^{-1} K_{\alpha u} \quad (30b)$$

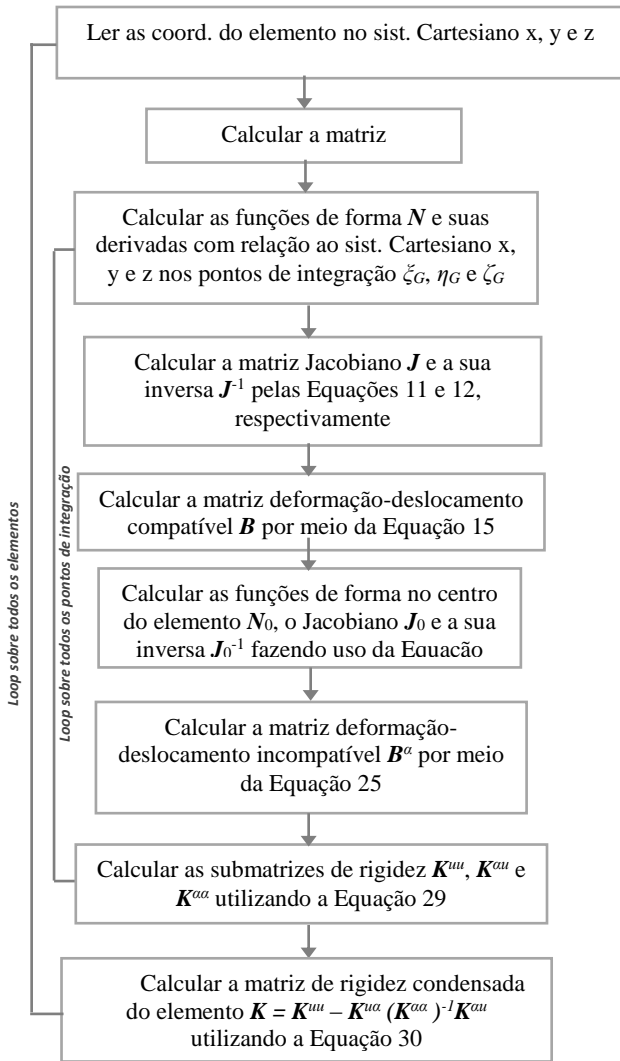
Calcula-se a matriz de rigidez do elemento incompatível por meio de integração numérica usando quadratura de Gauss, de acordo com a Equação 31.

$$K = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) |J|_{ijk} \quad (31)$$

Em que:  $i, j, k$  são as posições dos pontos de Gauss no sistema de coordenadas naturais,  $W$  são os respectivos pesos associados a esses pontos, e  $|J|_{ijk}$  é o determinante da matriz Jacobiana avaliado em cada ponto de Gauss.

Na Figura 2 é mostrado um fluxograma detalhado para o cálculo numérico da matriz de rigidez do elemento. Conforme pode-se observar, enquanto um laço mais externo é executado sobre cada elemento, outro mais interno é efetuado sobre cada ponto de Gauss.

Figura 2 – Fluxograma para cálculo da matriz de rigidez



### 3.4 Tensões e forças internas

A tensão em cada ponto de Gauss é determinada por meio da Equação 32.

$$\sigma = C \epsilon = C(\epsilon_a + \epsilon_u) \quad (32)$$

Substituindo a Equação 15 na Equação 32, as tensões podem ser reescritas pela Equação 33.

$$\sigma = C B d + C B_a \alpha^* \quad (33)$$

As forças internas são dadas pela Equação 34.

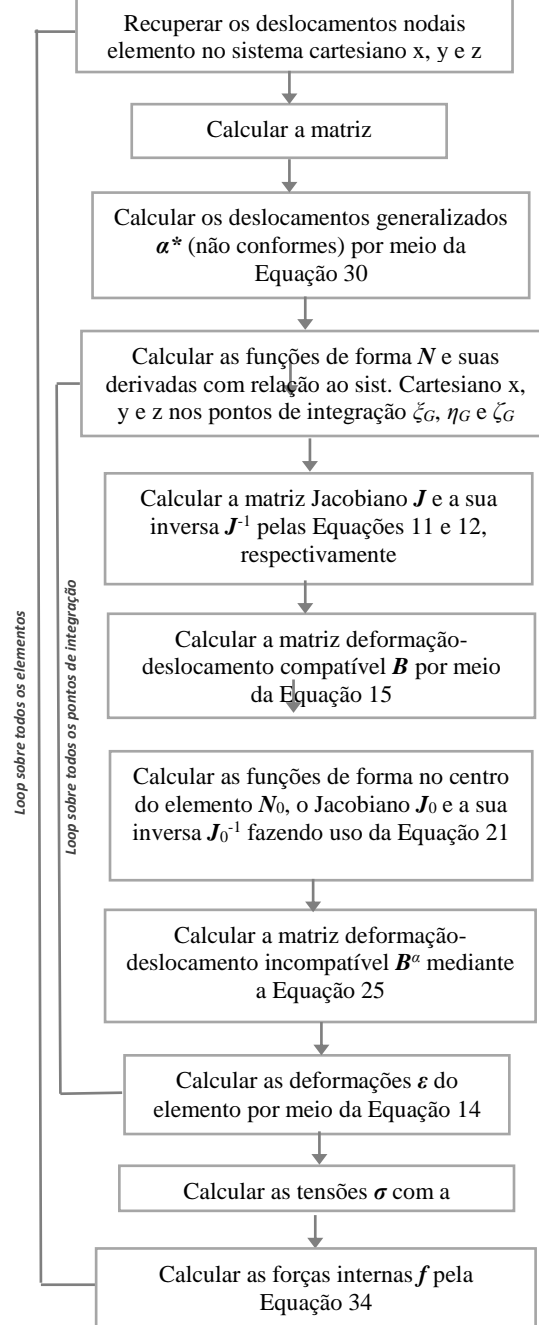
$$f = \int_V B^T \sigma dV \quad (34)$$

Calcula-se o vetor de forças internas do elemento por meio de integração numérica usando quadratura de Gauss pela Equação 35.

$$f = \sum_i \sum_j \sum_k W_i W_j W_k f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i) |J|_{ijk} \quad (35)$$

Na Figura 3 é mostrado o fluxograma para a obtenção do vetor de forças internas do elemento.

Figura 3 – Fluxograma para cálculo das tensões e forças internas



## 4 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

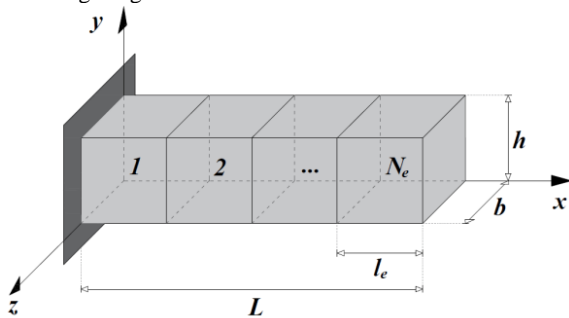
Nesta seção analisa-se uma viga engastada submetida a vários tipos de carregamentos, e uma placa quadrada engastada nas suas bordas e sujeita a uma carga pontual no seu centro.

### 4.1 Viga engastada

A peça possui comprimento  $L = 3 \text{ m}$ , largura  $b = 0,2 \text{ m}$  e altura  $h = 0,2 \text{ m}$  como mostrado na Figura 4. Adota-se um módulo de elasticidade  $E = 2 \cdot 10^{10} \cdot \text{Pa}$ , e o coeficiente de

Poisson  $\nu = 0,15$ . Como condições de contorno, impõe-se um engastamento perfeito em uma das faces do sólido. Esta estrutura será analisada como uma viga engastada sujeita a um esforço de flexão simples oriundo de três tipos de carregamentos: carga concentrada aplicada na extremidade livre; peso próprio e carga uniformemente distribuída aplicada na face superior do sólido, cujos valores estão descritos da Figura 5. Na Figura 4 mostra-se a discretização da estrutura com um número  $N_e$  de elementos. Cada elemento tem um comprimento  $l_e$ . Para realizar esta análise foram adotadas, de maneira arbitrária, quatro malhas com  $N_e = 3, 12, 25$  e  $30$  elementos.

Figura 4 – Viga engastada discretizada com elementos sólidos 3D



Por se tratar de um problema clássico, as soluções analíticas para as tensões  $\sigma^{teor}$  e os deslocamentos da extremidade livre  $v_{máx}^{teor}$  serão obtidas pela teoria de vigas de Euler-Bernoulli. Na Figura 5 são mostradas as vigas equivalentes para os três tipos de carregamentos comentados anteriormente. Assim, o valor teórico da tensão normal devida à flexão em uma fibra localizada a

uma distância  $y$  da superfície neutra é dado pela Equação 36.

$$\sigma^{teor} = \frac{M_z y}{I} \quad (36)$$

Em que:  $M_z$  é o momento fletor, e  $I$  o momento de inércia na seção transversal.

Esse valor teórico será comparado com o valor numérico obtido em qualquer um dos pontos de Gauss mais próximos da face engastada conforme mostrado na Figura 6. Portanto, o valor de  $y$  é dado pela Equação 37.

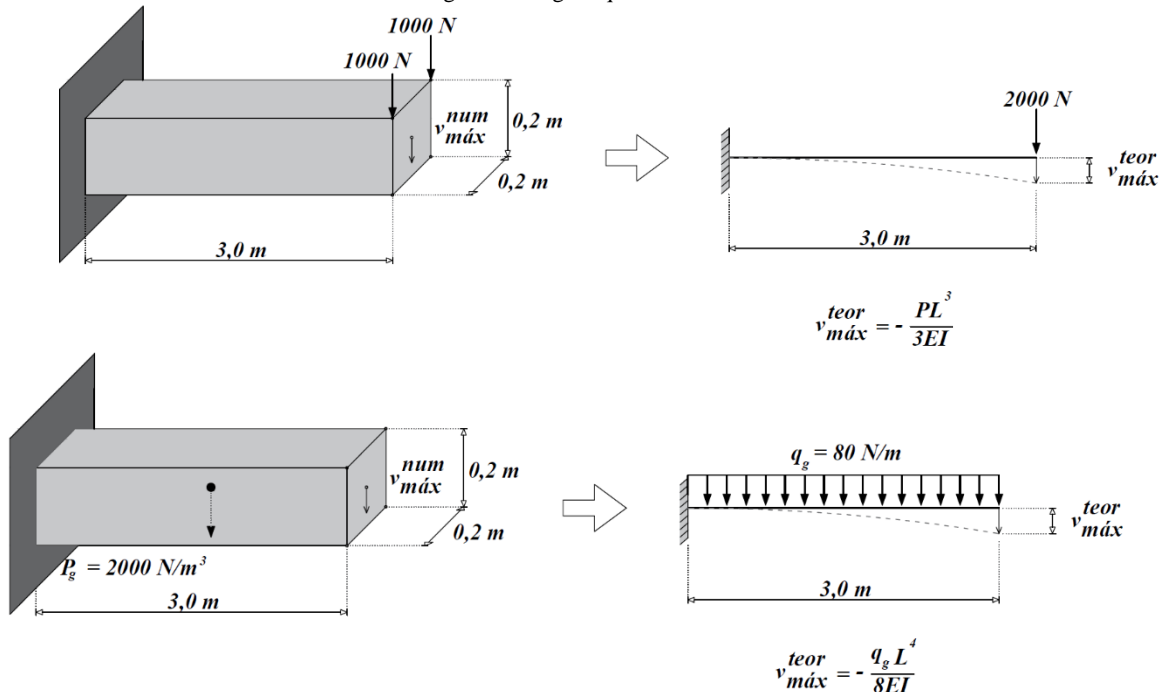
$$y = \frac{h}{2\sqrt{3}} \quad (37)$$

Por sua vez, o braço de alavanca  $d$  é dado pela Equação 38.

$$d = (N_e - 1)l_e + \frac{l_e}{2} + \frac{l_e}{2\sqrt{3}} \quad (38)$$

Finalmente, o valor teórico do momento fletor  $M_z$  para a carga concentrada é  $Pd$  e para as cargas distribuídas  $q \cdot d^2/2$ . Foram implementados dois tipos de elementos hexaédricos linear de oito nós: um padrão e outro enriquecido com modos incompatíveis, denominados neste trabalho de H8-DESL e H8-INC, respectivamente. Os resultados numéricos dos deslocamentos são calculados por meio de uma média aritmética dos valores de  $v_{máx}^{num}$  obtidos nos quatro nós da face da extremidade livre do sólido.

Figura 5 – Vigas equivalentes



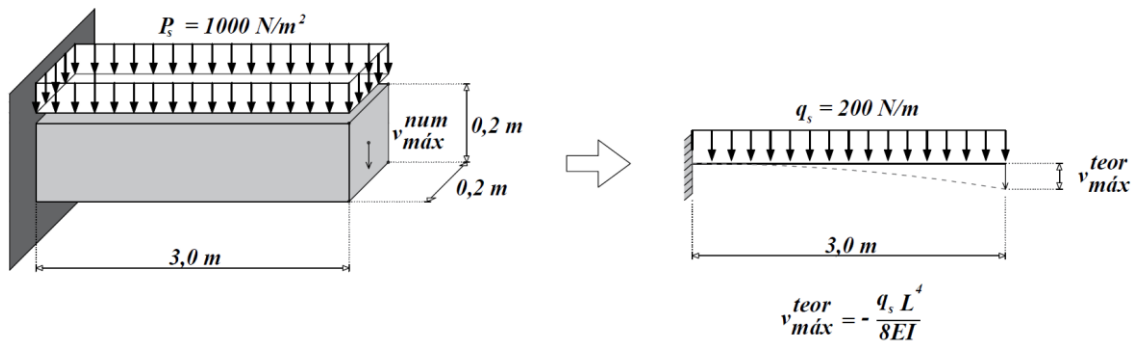
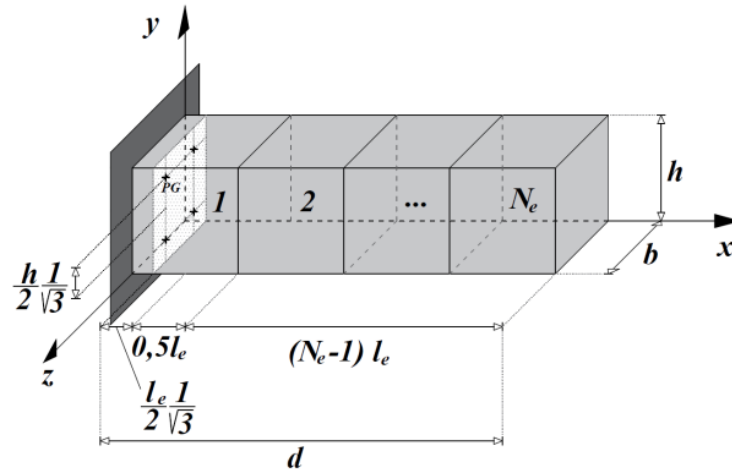


Figura 6 – Posição dos pontos de Gauss para o cálculo das tensões normais



De acordo com as Figuras 7, 8 e 9 observa-se que os deslocamentos obtidos com o elemento H8-INC são muito próximos do valor teórico, mesmo com uma malha de três elementos. Por outro lado, com o elemento H8-DESL os deslocamentos são muito díspares dos valores analíticos. Para este elemento, com o refinamento da malha observa-se uma lenta convergência assintótica para o valor analítico. Na Tabela 1 são apresentados os valores dos deslocamentos obtidos na simulação numérica para todos os casos de carregamentos e malhas. No caso de carga concentrada, observa-se que o erro relativo em

deslocamentos,  $\frac{|v_{máx}^{num} - v_{máx}^{teor}|}{|v_{máx}^{teor}|}$ , para o elemento H8-INC com

três elementos é 3,21% e diminui acentuadamente com as demais malhas. Para o elemento H8-DESL o erro relativo em deslocamentos calculado com a malha de 3 elementos é 91,58% e diminui para 12,22% com a malha de 30 elementos. Para os demais casos de carga, observa-se um comportamento idêntico tanto para o elemento H8-INC como para o H8-DESL, respectivamente. Entretanto, cabe salientar que o erro relativo em deslocamentos para o elemento H8-INC foi de apenas 0,50% com a malha de 3 elementos.

Nas Figuras 10, 11 e 12 observa-se que as tensões obtidas com o elemento H8-INC para a malha de 3 elementos não são próximas do valor teórico. Para as malhas de 12, 25 e 30 elementos obtém-se valores numéricos próximos do valor exato. Por sua vez, com o elemento H8-DESL as tensões são muito díspares dos valores analíticos. Para este elemento, com o refinamento

da malha observa-se uma lenta convergência assintótica para o valor analítico. Na Tabela 2 são apresentados os valores das tensões obtidas na simulação numérica para todos os casos de carregamentos e malhas. Em se tratando de carga concentrada, observa-se que o erro relativo em

tensões,  $\frac{|\sigma^{num} - \sigma^{teor}|}{|\sigma^{teor}|}$ , para o elemento H8-INC com três

elementos é 9,62% e diminui de forma progressiva nas demais malhas. Para o elemento H8-DESL o erro relativo em tensões, calculado com a malha de 3 elementos é 92,09% e diminui para 10,54% com a malha de 30 elementos. Para os demais casos de carga, verifica-se um comportamento semelhante e valores iguais dos erros relativo em tensões tanto para o elemento H8-INC como para o H8-DESL, respectivamente. Além disso, para o elemento H8-INC, nos casos de carregamentos distribuídos observa-se um aumento significativo do erro para as tensões, cujo maior valor foi de 15,81% para a malha de 3 elementos.



Figura 7 – Valores de deslocamentos versus número de elementos – carga concentrada

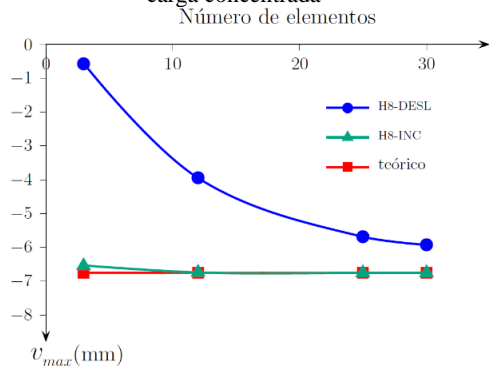


Figura 8 – Valores de deslocamentos versus número de elementos – carga de gravidade

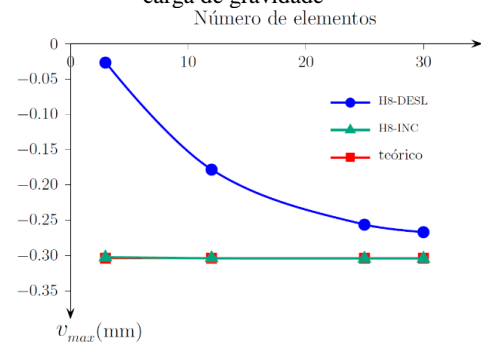


Figura 9 – Valores de deslocamentos versus número de elementos – carga de superfície

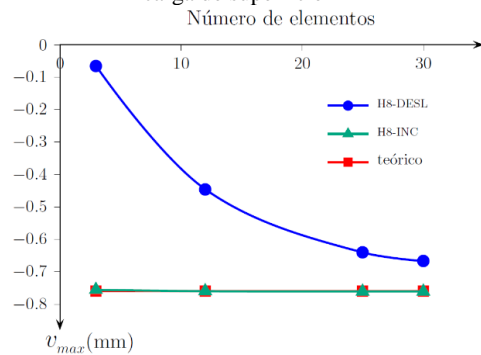


Figura 10 – Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos – carga concentrada

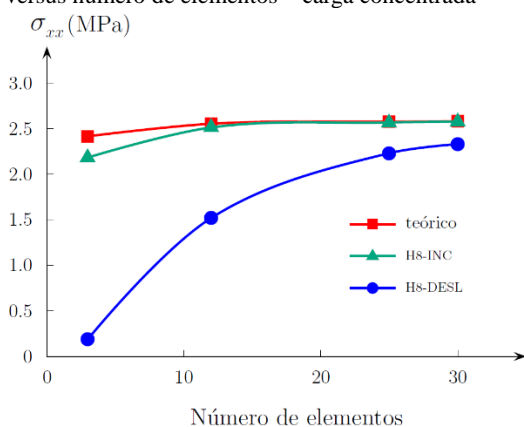


Figura 11 – Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos – carga de gravidade

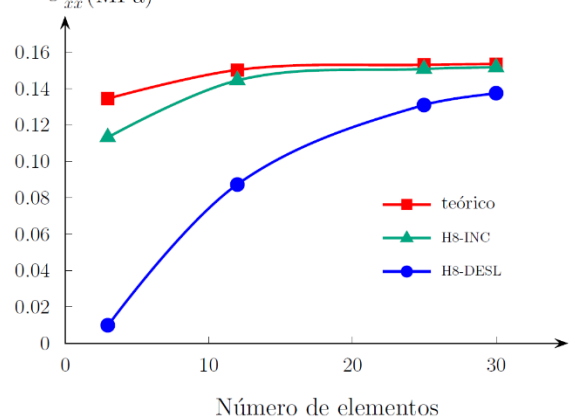


Figura 12 – Tensão normal no ponto de Gauss de referência versus número de elementos – carga de superfície

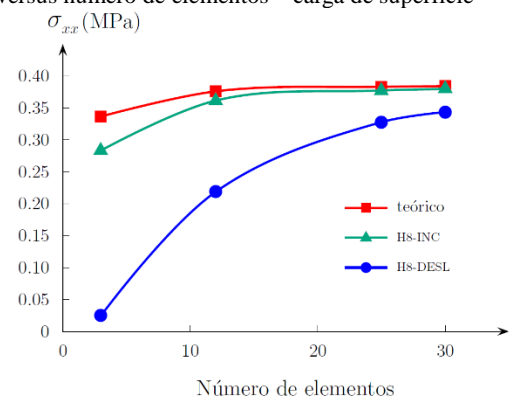


Tabela 1 – Valores dos deslocamentos (mm)

Nº. de elem.	Carga aplicada na extremidade livre			Erro relativo	
	Valor numérico H8-DESL	Valor numérico H8-INC	Valor teórico	H8-DESL	H8-INC
3	-0,5683	-6,5332	-6,75	91,58 %	3,21 %
12	-3,9492	-6,7414	-6,75	41,49 %	0,13 %
25	-5,6863	-6,7561	-6,75	15,76 %	0,09 %
30	-5,9249	-6,7563	-6,75	12,22 %	0,09 %
Peso próprio					
3	-0,02654	-0,30224	-0,30375	91,26 %	0,50 %
12	-0,17822	-0,30397	-0,30375	41,33 %	0,07 %
25	-0,25617	-0,30429	-0,30375	15,66 %	0,18 %
30	-0,26688	-0,30433	-0,30375	12,14 %	0,19 %
Carga de superfície					
3	-0,06635	-0,75561	-0,75937	91,26 %	0,50 %
12	-0,44556	-0,75991	-0,75937	41,32 %	0,07 %
25	-0,64044	-0,76071	-0,75937	15,66 %	0,18 %
30	-0,66720	-0,76082	-0,75937	12,14 %	0,19 %

Tabela 2 – Valores da tensão normal (MPa)

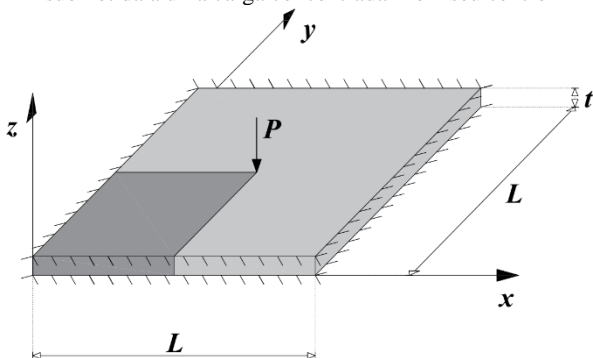
Carga aplicada na extremidade livre					
Nº. de elem.	Valor numérico		Valor teórico	Erro relativo	
	H8-DESL	H8-INC		H8-DESL	H8-INC
3	0,19091	2,18269	2,41506	92,09 %	9,62 %
12	1,51881	2,51179	2,55232	40,49 %	1,59 %
25	2,22974	2,56679	2,57611	13,45 %	0,36 %
30	2,32971	2,57465	2,57977	9,69 %	0,20 %
Peso próprio					
3	0,00993	0,1134	0,1347	92,63 %	15,81 %
12	0,08749	0,14466	0,15044	41,84 %	3,84 %
25	0,13115	0,15097	0,15326	14,43 %	1,50 %
30	0,13748	0,15193	0,1537	10,55 %	1,15 %
Carga de superfície					
3	0,02486	0,28349	0,33674	92,62 %	15,81 %
12	0,21876	0,36165	0,37611	41,84 %	3,84 %
25	0,32790	0,37742	0,38315	14,42 %	1,50 %
30	0,34373	0,37982	0,38424	10,54 %	1,15 %

4.2 – Placa quadrada

A placa possui lado de comprimento  $L = 100\text{ mm}$  e espessura  $t = 1\text{ mm}$  como mostrado na Figura 13. Adota-se o módulo de elasticidade  $E = 10^4\text{ N/mm}^2$ , e o coeficiente de Poisson  $\nu = 0,3$ . Como condições de contorno, impõe-se engastamento perfeito nas bordas da placa. A placa será submetida a uma carga concentrada  $P = 20\text{ N}$  aplicada no seu centro. Devido à simetria, apenas um quarto da estrutura foi discretizada, área hachurada mais escura da Figura 13. Adotou-se quatro malhas com  $N_e = 4 \cdot (2 \times 2 \times 1)$ ,  $16 \cdot (4 \times 4 \times 1)$ ,  $64 \cdot (8 \times 8 \times 1)$  e  $256 \cdot (16 \times 16 \times 1)$  elementos. A solução analítica para os deslocamentos no centro da placa pode ser encontrada em Timoshenko e Woinowsky-Krieger (1959), dada pela Equação 39.

$$w = 0,0056 PL^2 \frac{12(1-\nu^2)}{Et^3} = -1,22304\text{mm} \quad (39)$$

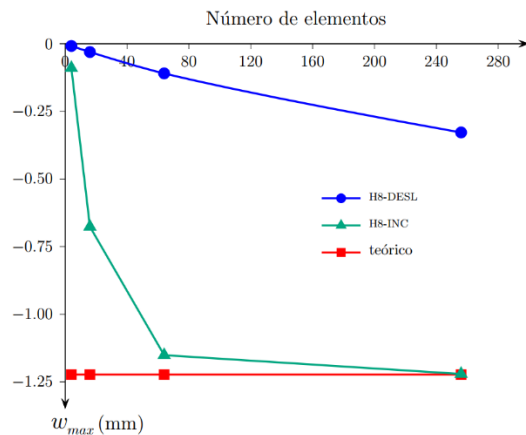
Figura 13 – Placa quadrada engastada em todas as bordas e submetida a uma carga concentrada  $P$  em seu centro



Na Figura 14 observa-se que os deslocamentos obtidos com o elemento H8-INC são próximos do valor teórico, com malhas mais refinadas: 64 e 256 elementos. Para o caso de malhas grosseiras os resultados não foram bons, isto porque os modos incompatíveis foram obtidos para simular flexão pura. Entretanto, os esforços seccionais

de um elemento de placa são compostos por flexão e torção ao longo dos eixos  $x$  e  $y$ , o que gera um estado multiaxial de tensões. Por outro lado, com o elemento H8-DESL os resultados de deslocamentos não conseguem representar do ponto de vista quantitativo o comportamento físico da placa, isto porque são elementos apropriados para simular o comportamento de componentes estruturais sujeitos a tração ou compressão simples.

Figura 14 – Valores de deslocamentos versus número de elementos



Na Tabela 3 são apresentados os valores dos deslocamentos para todas as malhas. Observa-se que o erro relativo em deslocamentos, para o elemento H8-INC com duzentos e cinquenta e seis elementos é de apenas 0,17%. Para esta mesma discretização, o elemento H8-DESL apresenta um erro relativo em deslocamentos muito alto: 73,16%.

Tabela 3 – Valores dos deslocamentos (mm)

Carga aplicada no centro da placa					
Nº. de elem.	Valor numérico		Valor teórico	Erro relativo	
	H8-DESL	H8-INC		H8-DESL	H8-INC
4	-0,00835	-0,08972	-1,22304	99,32 %	92,66 %
16	-0,03076	-0,67638	-1,22304	97,48 %	44,70 %
64	-0,10980	-1,15123	-1,22304	91,02 %	5,87 %
256	-0,32825	-1,22092	-1,22304	73,16 %	0,17 %

CONCLUSÕES

Neste trabalho apresentou-se, de forma detalhada, a formulação do método dos modos incompatíveis para elementos lineares hexaédricos de baixa ordem. Foram descritos fluxogramas para o cálculo da matriz de rigidez e das forças internas para fins de implementação computacional. O artigo traz de forma clara a dedução da matriz de deformação para os modos incompatíveis  $B_a$  do elemento sólido 3D de oito nós. O desempenho do elemento H8-INC para obtenção dos deslocamentos é excelente mesmo quando se utiliza malhas com poucos elementos. Para a malha mais grosseira com que se discretizou a viga engastada e considerando todos os tipos de carregamentos, o maior erro relativo encontrado para os deslocamentos foi de 3,21%. No caso da placa quadrada,

por estarem presentes esforços internos mais complexos, observa-se que os erros relativos em deslocamentos envolvidos são elevados para as malhas com quatro e dezesseis elementos: 92,66% e 44,70%, respectivamente. Esses percentuais se reduzem drasticamente quando se utilizam 64 e 256 elementos: 5,87% e 0,17%, respectivamente. No que se refere às tensões, para obter resultados com maior precisão é necessário o emprego de malhas um pouco mais refinadas. Assim, para o caso da viga engastada discretizada com três elementos, considerando todas as tipologias de carga analisadas, observa-se um erro relativo máximo de 15,81%. O menor erro relativo em tensão ocorre para o caso da carga concentrada na extremidade livre e quando se utiliza uma malha de trinta elementos, com valor de 0,20%. O método dos modos incompatíveis é vantajoso dada a sua simplicidade teórica e a facilidade de implementação computacional. Além disso, tal elemento é bastante adequado para a análise de peças sujeitas à flexão.

## REFERÊNCIAS

- COOK, R. D. Avoidance of parasitic shear in plane element. **Journal of the Structural Division**, ASCE, 101, 6, p. 1239-11253, 1975.
- CRISFIELD, M. A.; MOITA, G. F. A co-rotational formulation for 2-D continua including incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, 39, p. 2619-2633, 1996. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19960815\)39:15<2619::AID-NME969>3.0.CO;2-N](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19960815)39:15<2619::AID-NME969>3.0.CO;2-N).
- GHARZEDDINE, F.; IBRAHIMBEGOVIC, A. Incompatible mode method for finite deformation quasi-incompressible elasticity. **Computational Mechanics**, 24.6, p. 419-425, 2000. <https://doi.org/10.1007/s004660050001>.
- KRISHNAMOORTHY, C. S. **Finite Element Analysis, Theory and Programming**, 2<sup>nd</sup> ed. Tata McGraw Hill Comp. Ltd., New Delhi, 2001.
- LIU, S. B.; CAO, D. Z.; ZHAO, Z. H. The Study on 3D Incompatible Element in Flexible Multibody System Dynamics. **Applied Mechanics and Materials**, v. 543-547, p. 1282-1285, 2014. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.494-495.1282>. <https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.543-547.1282>.
- TAYLOR, R. L.; BERESFORD, P. J.; WILSON, E. L. A Non-Conforming Element for Stress Analysis. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, p. 1211-1220, 1976.
- TIMOSHENKO, S.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of Plates and Shells**, 2<sup>nd</sup> ed. McGraw-Hill, New York, 1959.
- WILSON, E. L. **Three-Dimensional Static and Dynamic Analysis of Structures**. ISBN 0-923907-00-9, Third Edition, Berkeley, CA, USA, 2002.
- WILSON, E. L.; TAYLOR, R. L.; DOHERTY, W. P.; GHABOUSSI, J. **Incompatible displacement models, Numerical and Computer Methods in Structural Mechanics**. Eds. Fenves *et al.*, Academic Press, New York, 43-57, 1973.