

## UM MODELO NUMÉRICO PARA SIMULAÇÃO DO PROCESSO DE FISSURAÇÃO EM MEIOS PARCIALMENTE FRÁGEIS

*A NUMERICAL MODEL FOR SIMULATION OF CRACKING PROCESS IN QUASI-BRITTLE MEDIUM*

**Leandro Lopes da Silva<sup>1</sup>, Roque Luiz da Silva Pitangueira<sup>2</sup>, Samuel Silva Penna<sup>3</sup>, Felício Bruzzi Barros<sup>4</sup>**  
Universidade Federal de Minas Gerais, Departamento de Engenharia de Estruturas, Avenida Antonio Carlos, 6.627, Pampulha, Belo Horizonte, MG, Brasil.

<sup>1</sup>Mestre em Engenharia de Estruturas. E-mail: eng.leandrolopes@yahoo.com.br

<sup>2</sup>Doutor em Engenharia de Estruturas. E-mail: roque@dees.ufmg.br

<sup>3</sup>Doutor em Engenharia de Estruturas. E-mail: spenna@dees.ufmg.br

<sup>4</sup>Doutor em Engenharia de Estruturas. E-mail: felicio@dees.ufmg.br.

### RESUMO

Este artigo apresenta um modelo numérico para simulação do processo de fissuração em meios parcialmente frágeis. A análise fisicamente não linear se inicia empregando-se o Método dos Elementos Finitos Padrão – MEF, com o qual se simula a degradação inicial do meio de forma distribuída por meio de modelos constitutivos que consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo. O estágio limiar de nucleação de fissuras é indicado pela singularidade do tensor acústico, característica que fornece a condição clássica de localização de deformações. A presença das trincas é simulada com método cinemático que incorpora as descontinuidades por meio de interpolações enriquecidas, com base no Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEFG, ao passo que a propagação destas trincas é também indicada pela singularidade do tensor acústico. As forças de coesão atuantes nos planos das trincas são simuladas ao se incorporar ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, que consiste na relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca e baseia-se no conceito de fissura coesiva. Este modelo apresenta a vantagem da não necessidade de definição prévia da região de nucleação e do caminho da trinca ou de redefinição da malha durante o processamento. As implementações foram realizadas na plataforma INSANE – *Interactive Structural ANalysis Environment*.

**Palavras-chave:** processo de fissuração, degradação distribuída, nucleação de fissuras, MEFG, propagação de trincas.

### ABSTRACT

This paper presents a numerical model for simulation of cracking process in quasi-brittle medium. The physically nonlinear analysis begins using the Standard Finite Element Method – FEM, through which the initial medium degradation is simulated in a distributed manner employing constitutive models that consider the medium, even though degraded, remains continuous. The threshold stage of cracks nucleation is indicated by singularity of the acoustic tensor, which provides the classical strain localization condition. The presence of cracks is simulated through kinematic method that incorporates the discontinuities by using enriched interpolations based on the Generalized Finite Element Method – GFEM, whereas the cracks propagation is also indicated by singularity of the acoustic tensor. The cohesive forces acting on the crack plane are simulated incorporating to the enrichment process a discrete constitutive model, which is the relationship between stresses and displacements in the crack path and is based on the concept of cohesive crack. This model has the advantage of not having to pre-set nucleation region and crack path nor having to redefine the mesh during processing. The implementations have been performed on the INSANE – *Interactive Structural ANalysis Environment* platform.

**Keywords:** cracking process, distributed degradation, cracks nucleation, GFEM, cracks propagation.

### 1 – INTRODUÇÃO

Os materiais parcialmente frágeis são assim classificados por exibirem na relação tensão-deformação um endurecimento moderado até o limite de resistência à tração, seguido de um ramo de amolecimento, caracterizado pelo decréscimo gradual das tensões (KARIHALOO, 1995). No caso do concreto, este ramo é devido aos mecanismos de tenacidade na zona de processo de fratura, que, segundo Shah; Swartz; Ouyang (1995), referem-se à presença de microfissuras e aos obstáculos na propagação das trincas.

Visando simular o comportamento de estruturas de concreto considerando as diferentes fases de degradação, propôs-se um modelo numérico para análise do processo de fissuração em meios parcialmente frágeis.

A partir dos conceitos das mecânicas do dano e da fratura, processa-se a análise em três estágios, a saber: degradação distribuída, nucleação de fissuras e propagação de trincas.

O fenômeno de degradação distribuída é simulado por meio de modelos constitutivos que consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo, mas que as propriedades do material em estudo se modificam nas regiões submetidas a esforços superiores a determinados parâmetros de resistência. Esta abordagem permite modelar a deterioração sem a consideração da existência de trincas discretas. A continuidade do processo de análise, no entanto, pode implicar num nível de degradação que justifique a introdução de trincas.

Este estágio limiar é dito nucleação de fissuras e é avaliado por meio de uma medida de nucleação. Por ser

desejável que tal medida seja comum a qualquer modelo constitutivo, ou seja, que esta medida seja independente de peculiaridades de um modelo constitutivo particular, definiu-se como medida de nucleação a singularidade do tensor acústico, uma medida que envolve as grandezas do modelo constitutivo adotado e que, conforme Klein; Gao (1998) e Jirásek (2007a), caracteriza a condição clássica de localização de deformações.

As trincas são consideradas no decorrer da análise por meio do Método dos Elementos Finitos Generalizados – MEEG (BABUSKA; CALOZ; OSBORN, 1994; DUARTE; ODEN, 1995, 1996), um método numérico que permite o enriquecimento das funções de Partição da Unidade (PU) de tal maneira que as descontinuidades passam a ser incorporadas nas interpolações, embutindo-se nos elementos os efeitos da presença das trincas nos campos de deslocamentos, de deformações e de tensões.

As forças de coesão atuantes nos planos das trincas são simuladas ao se incorporar ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, que consiste na relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca e baseia-se no conceito de fissura coesiva, em particular no modelo de Hillerborg; Modeer; Petersson (1976), no qual todas as deformações inelásticas, que ocorrem na zona de processo de fratura, são representadas em uma linha por meio das forças coesivas que agem na trinca.

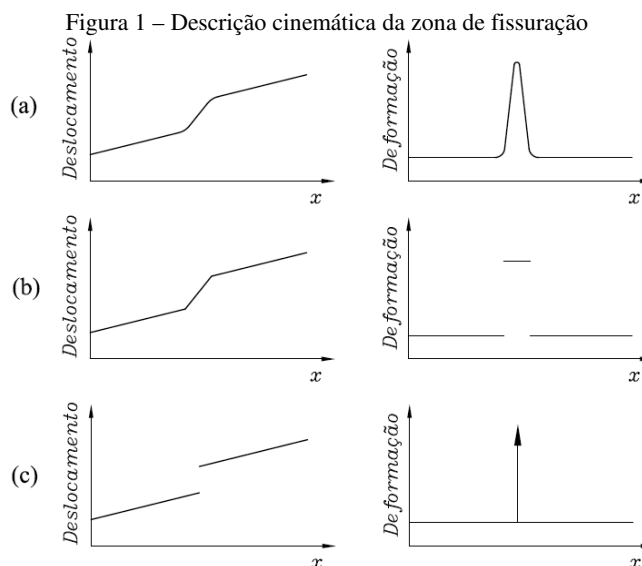
Uma análise com as características descritas é dita análise fisicamente não linear, com a qual é possível simular o comportamento de estruturas de forma mais realista, porém, tal análise só é possível com o uso de recursos computacionais adequados.

O sistema computacional INSANE – *Interactive Structural ANalysis Environment*, um projeto de *software* livre, implementado em linguagem Java segundo o paradigma de Programação Orientada a Objetos, dispõe de diversos recursos para análise fisicamente não linear e pôde ser aperfeiçoado para o modelo numérico proposto, por ser um ambiente computacional segmentado, amigável a mudanças e escalável em complexidade.

Este artigo está organizado em 5 seções. Na seção 2 apresenta-se o processo de fissuração segundo abordagens das Mecânicas da Fratura e do Dano Contínuo. A partir destas abordagens, apresentam-se os métodos numéricos que compõem o modelo proposto para simulação deste processo. Na seção 3, apresenta-se a lógica computacional do modelo, implementada no sistema INSANE. Na seção 4, apresenta-se uma simulação numérica para ilustrar o modelo numérico implementado. Finalmente, na seção 5, são apresentadas as considerações finais.

## 2 – PROCESSO DE FISSURAÇÃO

Segundo Jirásek (2001), a formação de uma fissura é um processo transitório de formação e coalescência de microfissuras dentro da estrutura material. No estudo da Mecânica da Fratura, divide-se este processo em três estágios, apresentados na Figura 1 segundo a descrição do comportamento cinemático da região da fissuração.



Fonte: Jirásek (2001).

Na Figura 1a tem-se o estágio denominado Falha Difusa. Neste estágio, os campos de deslocamentos e de deformações ainda são contínuos. A localização de deformações é manifestada por meio de uma alta concentração de deformações em uma banda estreita, com uma transição contínua a partir das deformações mais baixas na região adjacente à banda. Segundo Wolff (2010), em termos físicos, esta representação corresponde a uma zona de processo de fratura com uma alta concentração de defeitos próximos ao seu centro.

Na Figura 1b tem-se o estágio denominado Descontinuidade Fraca. Neste estágio, a evolução do processo leva à formação de uma região de localização de deformações representada por uma banda de tamanho pequeno, mas finita, separada do restante do corpo por duas descontinuidades fracas, ou seja, por saltos no campo de deformações. Observa-se que, apesar da mudança brusca de inclinação, o campo de deslocamentos permanece contínuo. Segundo Wolff (2010), em termos físicos, a banda entre as descontinuidades fracas corresponde a uma zona de processo de fratura com uma densidade de microfissuras quase constante.

Na Figura 1c tem-se o estágio denominado Descontinuidade Forte. Neste estágio, ocorre o colapso da banda de localização de deformações, incorporando-se uma descontinuidade forte, ou seja, um salto no campo de deslocamentos. Consequentemente, o campo de deformações é formado por uma parte regular, obtida pela diferenciação padrão do campo de deslocamentos, e outra parte singular, na qual o campo de deformações torna-se infinito. Segundo Wolff (2010), em termos físicos, descontinuidade forte corresponde a uma microfissura com as faces muito fechadas.

No modelo proposto, empregam-se modelos constitutivos que tratam a degradação de forma distribuída para simulação do estágio inicial de degradação e para investigação do estágio de localização de deformações, a partir do tensor acústico, e o MEEG para simulação do estágio de incorporação de descontinuidades fortes.

## 2.1 Estágio de Degradação Distribuída

Para simulação do estágio de degradação distribuída, empregam-se modelos constitutivos que consideram que o meio, apesar de degradado, permanece contínuo, mas que as propriedades do material em estudo se modificam nas regiões submetidas a esforços superiores a determinados parâmetros de resistência.

Vários são os modelos constitutivos propostos segundo esta abordagem, aplicáveis a materiais parcialmente frágeis. Neste contexto, destacam-se os modelos de fissuras distribuídas e os modelos de dano.

Segundo Rots (1988), os modelos de fissuras distribuídas consideram que a região fissurada é formada por um conjunto de pequenas fissuras paralelas entre si. Para tanto, representam esta região por meio de um conjunto de elementos finitos com comportamento ortotrópico. Conforme Pitangueira (1998), um elemento finito ortotrópico é definido posicionando-se o sistema local do seu tensor constitutivo no sistema definido pelas direções perpendicular e paralela ao plano de fissuração e adotando-se valores diferentes para os módulos de elasticidade destas direções. Desta forma, a rigidez dos elementos da região fissurada representa uma degradação gradual, o que permite que os efeitos da fissuração sejam reproduzidos numericamente sem a necessidade de modificações na geometria ou na discretização do modelo.

Conforme Pituba (1998), os modelos de dano admitem que a perda progressiva de rigidez do material é devida ao processo de microfissuração. Estes modelos são classificados como escalares ou anisotrópicos em função da variável representativa de dano ser, respectivamente, de natureza escalar ou tensorial. Nos modelos de dano, definem-se as variáveis de dano e suas dependências com os tensores constitutivo e de flexibilidade secantes no sentido de representar a danificação. Segundo Carol; Rizzi; Willam (2001), conceitos como tensão e deformação efetivas, equivalência de deformações, de tensões e de energia, são usados para estabelecer os sentidos físicos dos modelos de degradação do material que são as bases das relações secantes com as variáveis de dano. Dentre as diversas propostas para a evolução do dano, destacam-se as funções escalares de evolução e as superfícies limites de dano. As funções de evolução são definidas em termos de variáveis capazes de medir o estado de tensão e/ou de deformação do material, computando-se assim o estado de degradação. Dentre estas variáveis, destaca-se a medida de deformação equivalente definida segundo o modelo de dano. Em alternativa, com o domínio elástico do material delimitado por uma superfície, escrita em termos de parâmetros físicos do meio e de medidas de tensão e/ou de deformação, o valor do dano pode ser obtido por meio de algoritmos de retorno em termos de variáveis de dano.

No sistema INSANE, Penna (2011) desenvolveu um arcabouço teórico e computacional para modelos constitutivos. Vários modelos clássicos para tratar a degradação do meio material foram abordados no contexto desta estrutura e implementados neste arcabouço, com destaque para diversos modelos de dano e os modelos de fissuras distribuídas.

Desta forma, por meio deste arcabouço, permite-se o emprego de variados modelos constitutivos na simulação do estágio de degradação distribuída.

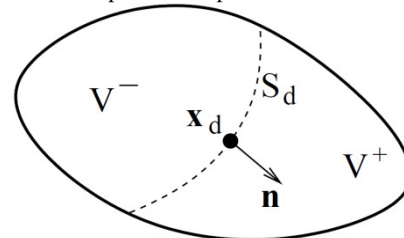
## 2.2 Nucleação de Fissuras

Conforme Figura 1, a formação de uma fissura é um processo transitório que pode, para fins de estudo, ser dividido em três estágios: Falha Difusa, Descontinuidade Fraca e Descontinuidade Forte.

No estágio de Descontinuidade Fraca, tem-se a formação de uma região de localização de deformações delimitada por duas descontinuidades fracas. Este estágio antecede o estágio de Descontinuidade Forte, no qual a região de localização de deformações colapsa e forma uma trinca discreta. Desta forma, o fenômeno de localização de deformações pode ser investigado para caracterizar o estágio limiar de nucleação de fissuras. Segundo Klein; Gao (1998), de fato, este fenômeno pode ser avaliado para indicar o surgimento de trincas. Desta forma, define-se uma medida capaz de identificar este fenômeno, denominada medida de nucleação de fissuras.

Para tanto, conforme Jirásek (2007a), parte-se da análise de um ponto  $\mathbf{x}_d$  da superfície  $S_d$  da descontinuidade no início da perda de continuidade do campo de deformações. Esta superfície divide o corpo nos subdomínios  $V^+$  e  $V^-$  e tem a sua direção caracterizada por um vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  orientado para  $V^+$ , conforme ilustrado na Figura 2.

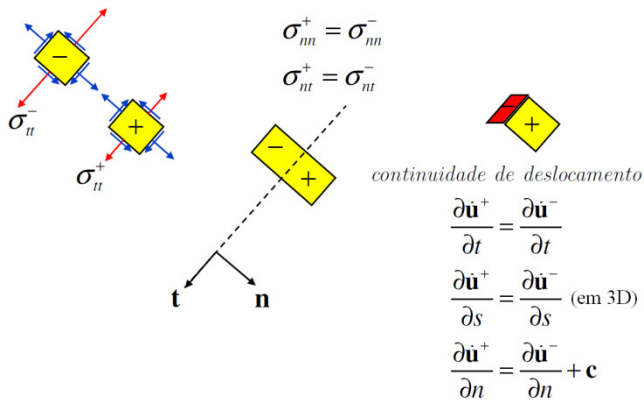
Figura 2 – Corpo cortado por uma descontinuidade



Fonte: Jirásek (2007a).

Se o ponto  $\mathbf{x}_d$  é abordado segundo os subdomínios  $V^+$  e  $V^-$ , aqueles campos que são descontínuos através de  $S_d$  tendem a valores diferentes em cada um destes lados. Segundo Jirásek (2007a), ainda que as taxas de tensão e de deformação sejam descontínuas através de  $S_d$ , os correspondentes saltos não são completamente arbitrários. O salto na taxa de tensão  $[[\boldsymbol{\sigma}]]$  é restrito pela condição de continuidade de tensão, ao passo que o salto na taxa de deformação  $[[\boldsymbol{\epsilon}]]$  é restrito pela condição de continuidade de deslocamento. Se estes tensores são decompostos em seus componentes no plano e fora do plano (com respeito ao plano tangente à superfície da descontinuidade), a condição de continuidade de tensão significa que as taxas de tensão fora do plano devem ser contínuas, ao passo que a condição de continuidade de deslocamento implica que as taxas de deformação no plano devem ser contínuas, conforme ilustrado na Figura 3. Desta forma, os saltos podem aparecer somente nas taxas de tensão no plano e nas taxas de deformação fora do plano.

Figura 3 – Condições de continuidade



Fonte: Jirásek (2007b).

Segundo Jirásek (2001), as taxas de deformação no plano tangente à superfície da descontinuidade devem ser contínuas, pois, no estágio de Descontinuidade Fraca, o campo de deslocamentos permanece contínuo.

A partir da Figura 3, as condições de continuidade de tensão e de deslocamento podem ser escritas, respectivamente, como:

$$\mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^+ = \mathbf{n} \cdot \dot{\boldsymbol{\sigma}}^- \quad (1)$$

$$\left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^+ = \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^- + \mathbf{c} \otimes \frac{\partial n}{\partial \mathbf{x}} = \left( \frac{\partial \dot{\mathbf{u}}}{\partial \mathbf{x}} \right)^- + \mathbf{c} \otimes \mathbf{n} \quad (2)$$

Em que:  $\mathbf{c}$  é um tensor de primeira ordem arbitrário.

Em teoria de pequenas deformações, com as deformações definidas como a parte simétrica do gradiente de deslocamento, a Equação 2 é facilmente reescrita em termos das taxas de deformação:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^+ = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- + (\mathbf{c} \otimes \mathbf{n})_{sim} \quad (3)$$

Em seguida, relacionam-se as taxas de tensão e de deformação por meio da lei constitutiva. A lei tensão-deformação na forma de taxa é normalmente escrita como:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4)$$

Em que:  $\mathbf{D}$  é o tensor constitutivo tangente de quarta ordem.

Substituindo-se a Equação 4 na condição de continuidade de tensão, Equação 1, e valendo-se da condição de continuidade de deslocamento, Equação 3, obtém-se:

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- + \overbrace{\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} : (\mathbf{c} \otimes \mathbf{n})_{sim}}^{(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{c}} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} : \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^- \quad (5)$$

Ou,

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{c} = 0 \quad (6)$$

Para atribuir ao tensor  $\mathbf{c}$  um significado físico mais específico, Jirásek (2007a) o apresenta sob a forma:

$$\mathbf{c} = \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{m} \quad (7)$$

Em que:  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \|\mathbf{c}\|$  é a magnitude do termo salto na Equação 2;  $\mathbf{m} = \mathbf{c}/\|\mathbf{c}\|$  é um tensor de primeira ordem unitário denominado vetor de polarização.

O ângulo entre os vetores unitários  $\mathbf{m}$  e  $\mathbf{n}$  caracteriza o modo de falha, que vai desde a divisão por tração (modo I), com  $\mathbf{m} = \mathbf{n}$ , até o deslizamento por cisalhamento (modo II), com  $\mathbf{m}$  perpendicular a  $\mathbf{n}$ . A partir das Equações 6 e 7 escreve-se:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \mathbf{m} = 0 \quad (8)$$

Uma vez que uma descontinuidade verdadeira é obtida somente se  $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} \neq 0$ , a Equação 8 se reduz a:

$$(\mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}) \cdot \mathbf{m} = 0 \quad (9)$$

Conforme Jirásek (2007a), a partir da Equação 9, conclui-se que, na formação inicial de uma descontinuidade fraca, o tensor de segunda ordem (Equação 10) é singular e o vetor de polarização  $\mathbf{m}$  é o autovetor deste tensor associado ao autovalor zero. Esta característica fornece a condição clássica de localização de deformações, dada pela Equação 11:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{n} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} \quad (10)$$

$$\det(\mathbf{Q}) = 0 \quad (11)$$

O tensor de segunda ordem  $\mathbf{Q}$  é denominado tensor de localização, por vezes referido como tensor acústico. Segundo Klein; Gao (1998) e Jirásek (2007a), do ponto de vista matemático, a singularidade do tensor acústico indica a chamada perda de elipticidade da equação diferencial governante.

O tensor acústico definido na Equação 10 depende do tensor de rigidez tangente  $\mathbf{D}$  e do vetor normal unitário  $\mathbf{n}$  da superfície da descontinuidade. Sob certas exceções, a rigidez tangente pode ser considerada como dependente somente do estado corrente do material e, portanto, conhecida. O vetor  $\mathbf{n}$ , no entanto, não é conhecido de antemão. Portanto, a análise de localização consiste na busca por um vetor unitário  $\mathbf{n}$  para o qual o tensor acústico se torne singular. Se tal vetor não existir, o campo de deformações deve permanecer contínuo. A singularidade do tensor acústico para um determinado vetor  $\mathbf{n}$  indica que um salto no campo de deformações pode se desenvolver através de uma superfície com normal  $\mathbf{n}$ .

Conforme destacado, o fenômeno de localização de deformações, caracterizado pela singularidade do tensor acústico, é investigado no modelo numérico proposto para indicar o estágio limiar de introdução de descontinuidades fortes.

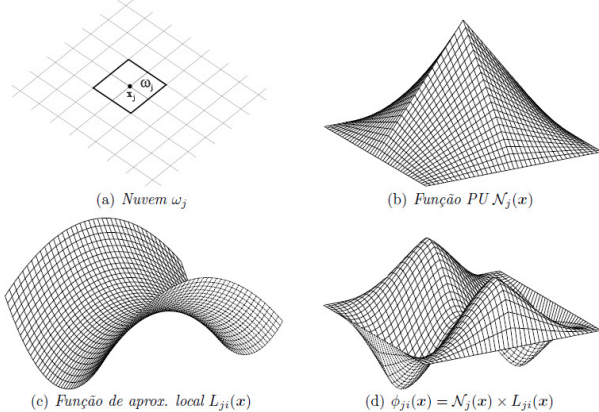
### 2.3 Incorporação de Descontinuidades Fortes

Para simulação do estágio de incorporação de descontinuidades fortes, emprega-se o MEFG.

Proposto de forma independente por Babuska; Caloz; Osborn (1994) e Duarte; Oden (1995, 1996), o MEFG pode ser entendido como uma variação do MEF. O emprego sob a denominação atual surge pela primeira vez em Melenk (1995). A estratégia utilizada no MEFG consiste em empregar as funções do tipo Partição da Unidade (PU) que enriquecidas definem as funções de forma. Conforme Barros (2002) e Alves (2012), a escolha das funções de PU depende do tipo de problema a ser analisado, contudo, o emprego das funções convencionais do MEF como funções de PU, além de facilitar a aplicação do método, garante estabilidade ao problema analisado, ao verificar diretamente as condições de contorno.

Para ilustrar a estratégia deste método considera-se uma malha convencional de elementos finitos bidimensionais definida a partir de um conjunto de  $n$  pontos nodais  $\{\mathbf{x}_j\}_{j=1}^n$ , conforme apresentado na Figura 4a. Define-se, então, a região ou nuvem  $\omega_j$  formada por todos os elementos que concorrem no ponto nodal  $\mathbf{x}_j$ .

Figura 4 – Estratégia de enriquecimento



Fonte: Barros; Proença; Barcellos (2004).

O conjunto das funções interpoladoras associadas ao nó  $\mathbf{x}_j$ , obtidas por meio do MEF, define a função  $N_j(\mathbf{x})$ , cujo suporte corresponde à região  $\omega_j$ , conforme Figura 4b.

No MEF, a função  $N_j(\mathbf{x})$ , por si só, define a função de forma, porém, no MEFG, esta função é uma alternativa para compor a função de PU, que enriquecida define a função de forma. Um conjunto  $J_j$  de funções de enriquecimento, denominadas funções de aproximação local, é composto por  $q_j$  funções linearmente independentes definidas para cada nó  $\mathbf{x}_j$ :

$$J_j \stackrel{\text{def}}{=} \{L_{j1}(\mathbf{x}), L_{j2}(\mathbf{x}), \dots, L_{jq_j}(\mathbf{x})\} = \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (12)$$

Com  $L_{j1}(\mathbf{x}) = 1$

Na Figura 4c é ilustrada uma função de aproximação local  $L_{ji}(\mathbf{x})$ .

Ao final do processo, a função de forma  $\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$  do MEFG, atrelada ao nó  $\mathbf{x}_j$ , é construída por meio do enriquecimento da função de PU pelos componentes do conjunto  $J_j$ , ou seja,  $\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$  é facilmente obtida pelo produto das funções básicas que formam a PU, obtidas por meio do MEF, e as funções de enriquecimento (Equação 13) sem somatório em  $j$ .

$$\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j} = N_j(\mathbf{x}) \times \{L_{ji}(\mathbf{x})\}_{i=1}^{q_j} \quad (13)$$

Na Figura 4d é ilustrado um componente  $\phi_{ji}(\mathbf{x})$  da função de forma  $\{\phi_{ji}\}_{i=1}^{q_j}$ .

A partir desta estratégia, uma aproximação genérica do campo de deslocamentos  $\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x})$  pode ser obtida por meio da combinação linear das funções de forma:

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \left\{ \mathbf{u}_j + \sum_{i=2}^{q_j} L_{ji}(\mathbf{x}) \mathbf{b}_{ji} \right\} \quad (14)$$

Em que:  $\mathbf{u}_j$  é o grau de liberdade nodal convencional;  $\{\mathbf{b}_{ji}\}_{i=2}^{q_j}$  são os graus de liberdade nodal adicionais.

Esta estratégia pode ser utilizada para simulação do estágio de incorporação de descontinuidades fortes ao processo, tendo em vista que esta incorporação consiste em introduzir saltos no campo de deslocamentos, o que pode ser realizado construindo as funções de forma a partir de funções de enriquecimento do tipo degrau.

Neste modelo emprega-se a função degrau clássica de Heaviside  $H(\xi)$ , definida na forma (MOËS; DOLBOW; BELYTCHKO, 1999; MOHAMMADI, 2008):

$$H(\xi) = \begin{cases} 1, & \forall \xi > 0 \\ 0, & \forall \xi < 0 \end{cases} \quad (15)$$

Em que:  $\xi$  é a posição em relação à descontinuidade, assumida em  $\xi = 0$ .

Desta forma, adotando-se a função de Heaviside como função de enriquecimento na Equação 14, descreve-se o campo de deslocamentos decomposto em duas partes, uma contínua e uma descontínua (MOHAMMADI, 2008):

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N N_j(\mathbf{x}) \mathbf{u}_j + \sum_{j \in I_k} N_j(\mathbf{x}) H(\xi) \mathbf{b}_j \quad (16)$$

Em que:  $I_k$  é o conjunto dos nós enriquecidos com função degrau;  $\mathbf{b}_j$  é o parâmetro nodal adicional.

Logo, por meio desta lógica, têm-se embutidos os efeitos das descontinuidades nas interpolações enriquecidas dos elementos finitos que as contêm.

## 2.4 Coesão nos Planos da Trinca

Para simular as forças de coesão atuantes nos planos das trincas, incorpora-se ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, que consiste na relação entre tensões e deslocamentos no caminho da trinca. Para tanto, conforme Wells; Sluys (2001), reescreve-se o campo de deslocamentos na forma matricial e obtém-se o campo de deformações por meio do cálculo de seu gradiente:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N}\mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (17)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{H}\mathbf{B}\mathbf{b} + (\delta_{\Gamma_d}\mathbf{n})\mathbf{N}\mathbf{b} \quad (18)$$

Em que:  $\mathbf{N}$  é a matriz das funções de forma convencionais de MEF;

$\mathbf{a}$  é o vetor dos graus de liberdade nodais convencionais;

$\mathbf{b}$  é o vetor dos graus de liberdade nodais adicionais;

$\mathbf{B}$  é matriz de aproximação das deformações;

$\delta_{\Gamma_d}$  é a função delta de Dirac centralizada na trinca;

$\mathbf{n}$  é a matriz dos termos do vetor normal à trinca.

A função delta de Dirac aparece no campo de deformações devido ao salto imposto no campo de deslocamentos. O delta de Dirac é uma distribuição matemática que consiste em uma função  $\delta(x)$  que vale zero para qualquer  $x$ , exceto para  $x = 0$ , em que tende ao infinito, de tal maneira que o valor total de sua integral é 1.

Na sequência, considera-se a equação dos trabalhos virtuais desprezando-se as forças de corpo:

$$\int_{\Omega} \nabla^s \boldsymbol{\eta} : \boldsymbol{\sigma} d\Omega = \int_{\Gamma_u} \boldsymbol{\eta} \cdot \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \quad (19)$$

Em que:  $\Omega$  é o volume do corpo;

$\Gamma_u$  é o contorno do corpo submetido às forças externas;

$\boldsymbol{\eta}$  são as variações admissíveis de deslocamentos;

$\boldsymbol{\sigma}$  é o campo de tensões;

$\bar{\mathbf{t}}$  são as forças externas aplicadas em  $\Gamma_u$ .

Inserindo-se na Equação 19 as Equações 17 e 18 escritas nas variações dos graus de liberdade ( $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$ ) e valendo-se da propriedade de integração do delta de Dirac:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}'^T \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \mathbf{b}'^T \int_{\Omega} \mathbf{H}\mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma} d\Omega + \mathbf{b}'^T \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma = \\ = \mathbf{a}'^T \int_{\Gamma_u} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma + \mathbf{b}'^T \int_{\Gamma_u} \mathbf{H}\mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} d\Gamma \end{aligned} \quad (20)$$

Em que:  $\Gamma_d$  é a superfície da trinca;

$\mathbf{t} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{n})_{\Gamma_d}$  é a tensão coesiva atuante na trinca.

Valendo-se das relações constitutivas no domínio do contínuo e na descontinuidade, respectivamente:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{D}\dot{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{D}(\mathbf{B}\dot{\mathbf{a}} + \mathbf{H}\mathbf{B}\dot{\mathbf{b}}) \quad (21)$$

$$\dot{\mathbf{t}} = \mathbf{T}[[\dot{\mathbf{u}}]]_{x \in \Gamma_d} = \mathbf{T}\mathbf{N}\dot{\mathbf{b}} \quad (22)$$

Em que:  $\mathbf{T}$  é a matriz de rigidez tangente da relação tensão coesiva  $\times$  abertura da trinca.

Separando-se, na Equação 20, os termos relativos à  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$  na forma de um sistema de equações, obtém-se:

$$\begin{aligned} \left[ \begin{array}{cc} \int_{\Omega} \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{H}\mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega \\ \int_{\Omega} \mathbf{H}\mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega & \int_{\Omega} \mathbf{H}^2 \mathbf{B}^T \mathbf{D}\mathbf{B} d\Omega + \int_{\Gamma_d} \mathbf{N}^T \mathbf{T}\mathbf{N} d\Gamma \end{array} \right] \begin{Bmatrix} d\mathbf{a} \\ d\mathbf{b} \end{Bmatrix} = \\ = \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{ext} \\ \mathbf{f}_b^{ext} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{f}_a^{int} \\ \mathbf{f}_b^{int} \end{Bmatrix} \quad (23) \end{aligned}$$

Em que:  $\mathbf{K}$  é a matriz de rigidez;

$d\mathbf{a}$  e  $d\mathbf{b}$  são deslocamentos incrementais;

$\mathbf{f}_a^{ext}$  e  $\mathbf{f}_b^{ext}$  compõem o vetor de forças equivalentes às forças externas e consistem, respectivamente, nos termos multiplicados por  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$  no lado direito da Equação 20;

$\mathbf{f}_a^{int}$  e  $\mathbf{f}_b^{int}$  compõem o vetor de forças equivalentes às tensões internas e consistem, respectivamente, nos termos multiplicados por  $\mathbf{a}'$  e  $\mathbf{b}'$  no lado esquerdo da Equação 20.

Logo, por meio do sistema incremental definido na Equação 23, incorpora-se ao processo de enriquecimento um modelo constitutivo discreto, o que permite simular as forças de coesão atuantes nos planos das trincas.

Na Equação 23, a rigidez tangente  $\mathbf{D}$  é função do modelo constitutivo distribuído empregado na análise, ao passo que a rigidez tangente  $\mathbf{T}$  é função de uma lei coesiva.

Neste modelo emprega-se uma lei coesiva definida no sistema local da trinca, cujos componentes normal ( $t_n$ ) e tangencial ( $t_s$ ) são, conforme Wells; Sluys (2001):

$$t_n = f_t \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) \quad (24)$$

$$t_s = d_{init} [[\mathbf{u}]]_s \quad (25)$$

Em que:  $f_t$  é a resistência à tração do material;

$G_f$  é a energia de fratura;

$\kappa$  é a máxima abertura da trinca  $[[\mathbf{u}]]_n$  alcançada na análise;

$d_{init}$  é a rigidez inicial da trinca ao cisalhamento;

$[[\mathbf{u}]]_s$  é o deslizamento tangencial relativo das faces da trinca.

Tomando-se os diferenciais das Equações 24 e 25, obtém-se a rigidez tangente  $\mathbf{T}$

$$\begin{Bmatrix} \dot{t}_n \\ \dot{t}_s \end{Bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{f_t^2}{G_f} \exp\left(-\frac{f_t}{G_f} \kappa\right) & 0 \\ 0 & d_{init} \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} [[\dot{\mathbf{u}}]]_n \\ [[\dot{\mathbf{u}}]]_s \end{Bmatrix} \quad (26)$$

A rigidez tangente  $\mathbf{T}$  é empregada quando a trinca experimenta carregamento. No caso de descarregamento, o comportamento é simulado por meio da rigidez secante,



obtida ao se dividir os componentes da lei coesiva, Equações 24 e 25, pelas correspondentes variáveis. Uma trinca pode ainda se apresentar completamente fechada. Neste caso, emprega-se uma rigidez suficientemente alta na direção normal à trinca para evitar a interpenetração de suas superfícies.

Observa-se que o modelo proposto é mais adequado para abertura de trinca em modo I predominante.

### 3 – LÓGICA COMPUTACIONAL

Nesta seção resume-se a lógica implementada no núcleo numérico do sistema INSANE para modelagem 2D do processo de fissuração, detalhada em Silva (2016).

No modelo proposto, a verificação do fenômeno de nucleação, bem como da propagação de trincas, somente é realizada em um sistema equilibrado, ou seja, na convergência de um passo da análise.

Observa-se que se permite a nucleação de mais de uma trinca na análise. Por esta razão, estabeleceu-se uma medida comum para nucleação de fissuras e para propagação das trincas, que consiste na singularidade do tensor acústico, discutida na subseção 2.2. Medidas diferentes poderiam resultar na nucleação de uma trinca em um elemento, no qual se deveria ter a propagação de uma trinca já existente. Por esta mesma razão, primeiro se verifica a propagação das trincas existentes e, posteriormente, a nucleação de fissuras.

Na análise, os segmentos da trinca são inseridos como linhas retas de aresta a aresta do elemento. Conforme Wolff (2010), uma vez que, no contexto teórico de fissura coesiva, a energia total de fratura é dissipada com a separação entre as superfícies da fissura e não com a criação destas superfícies, o resultado numérico do método aqui descrito não é particularmente sensível a quando exatamente uma trinca é estendida, ou mesmo ao valor do comprimento desta extensão.

Na convergência de um passo da análise, verifica-se a propagação de trinca por trinca do modelo, bem como o fenômeno de nucleação em elemento por elemento da malha, com exceção daqueles já cortados por uma ou mais trincas. Ressalta-se que é facultada ao usuário a restrição da análise a uma única trinca.

Em função do tamanho do passo da análise não linear e do refinamento da malha, é possível que o sistema equilibrado resulte na introdução de uma trinca em uma fila de elementos simultaneamente, ao invés de em somente um elemento. Desta forma, o elemento em que se identifica o fenômeno de nucleação pode na verdade fazer parte de uma fila de elementos nucleados, não sendo o único no qual a trinca deverá ser introduzida neste instante. Desta forma, se inicia pela busca desta fila de elementos nucleados, da qual se assume como o elemento inicial aquele que apresentar a maior deformação principal.

Esta lógica evita que a análise seja dependente do primeiro elemento identificado pertencente a uma fila de elementos nucleados.

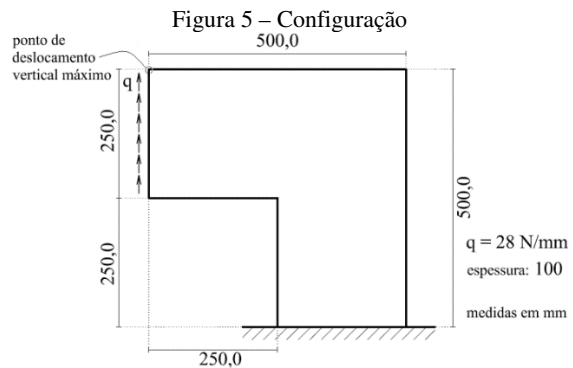
Nos elementos identificados na nucleação, bem como naqueles que indicam propagação, introduz-se segmentos da trinca. Para tanto, constrói-se o segmento determinando

sua direção, dispondo pontos de integração ao longo de seu comprimento para armazenamento dos parâmetros do modelo constitutivo discreto, discutido na subseção 2.4, e determinando e enriquecendo os nós do elemento necessários para sua simulação, conforme subseção 2.3.

Na Figura 6 é apresentado o fluxograma do processo de nucleação e propagação de trincas implementado.

### 4 – SIMULAÇÃO NUMÉRICA

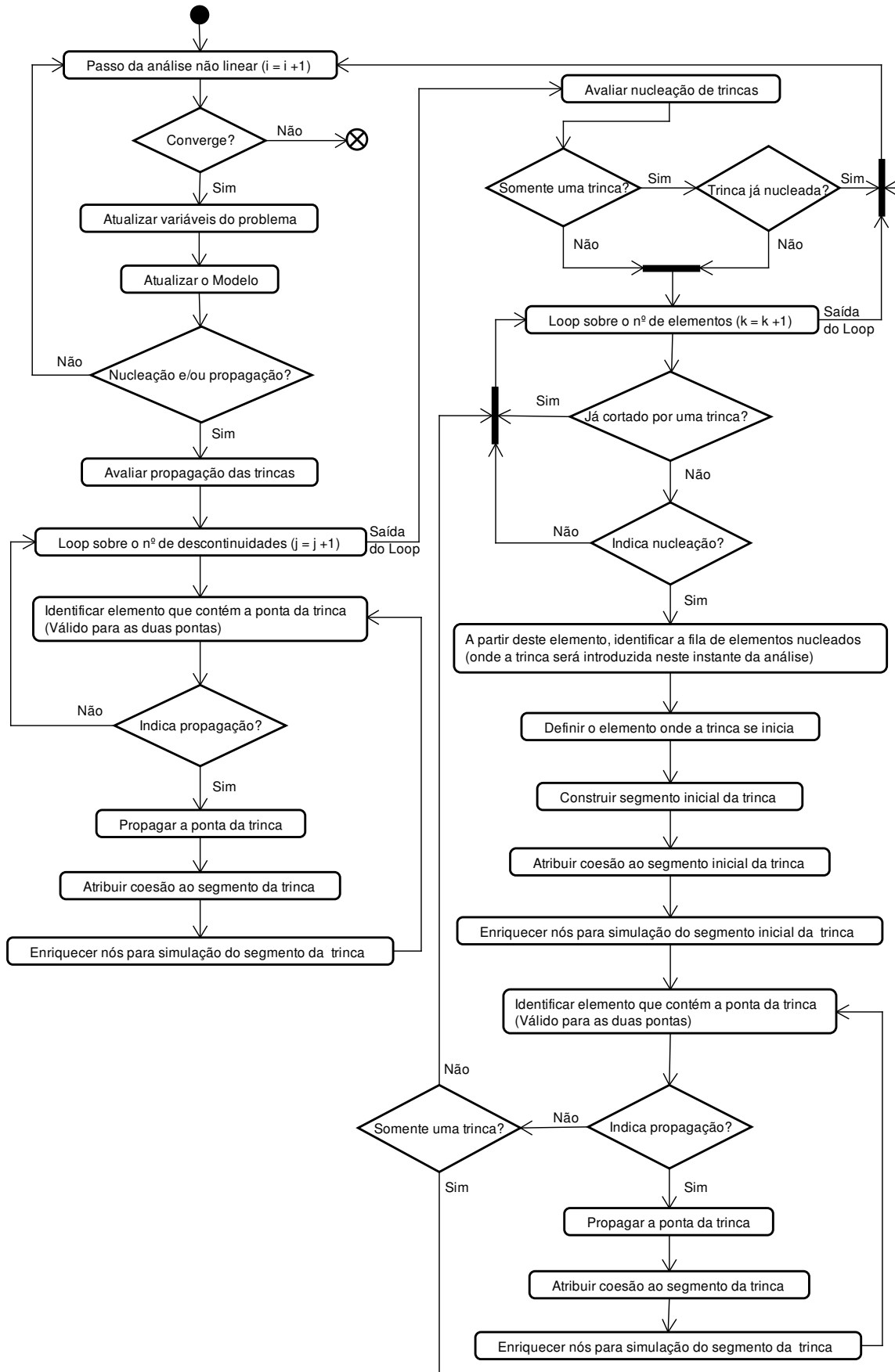
Winkler; Hofstetter; Lehar (2004) realizaram ensaios experimentais em painéis de concreto em forma de “L”, como ilustrado na Figura 5, e simulações numéricas com um modelo constitutivo de fissuração distribuída formulado nas bases da teoria da plasticidade. Este painel é aqui modelado em estado plano de tensão adotando-se 3 malhas de elementos finitos triangulares de três nós T3: uma malha grosseira, com 182 elementos com dimensão média de 50 mm; uma intermediária, com 362 elementos com dimensão média de 35 mm; e uma refinada, com 636 elementos com dimensão média de 25 mm.



Fonte: Winkler; Hofstetter; Lehar (2004).

Na análise, adotou-se o modelo constitutivo de dano volumétrico proposto por Penna (2011), com os seguintes parâmetros do material: Módulo de elasticidade elástico  $E_0 = 25.850,0 \text{ N/mm}^2$  e coeficiente de Poisson  $\nu = 0,18$ . Para acompanhamento da evolução do dano, adotaram-se leis polinomiais para tração e compressão, definidas em Penna (2011). A lei de evolução de dano para tração é descrita pelos seguintes parâmetros: Limite de resistência equivalente  $f_c = 1,43 \text{ N/mm}^2$ , valor da deformação equivalente a partir do qual o processo de dano se inicia  $\kappa_0 = 0,000215$  e módulo de elasticidade equivalente  $\tilde{E} = 13.463,0 \text{ N/mm}^2$ , ao passo que, para compressão:  $f_c = 16,0 \text{ N/mm}^2$ ,  $\kappa_0 = 0,0022$  e  $\tilde{E} = 13.463,0 \text{ N/mm}^2$ . Os parâmetros do modelo constitutivo discreto, por sua vez, são determinados pelo núcleo numérico a partir dos parâmetros do material e do estado corrente do meio no estágio de introdução da trinca. Para solução do modelo, empregou-se o método de controle direto de deslocamento, com incremento de 0,01 mm do deslocamento vertical máximo, tolerância para erro do resíduo de forças de  $1 \cdot 10^{-3}$  e carga de referência  $q = 28,0 \text{ N/mm}$ .

Figura 6 – Fluxograma do processo de nucleação e propagação de trincas





Nas Figuras 7 e 8 são apresentadas, respectivamente, a deformada, com fator de escala igual a 100, e o padrão de evolução do dano por tração ao longo do domínio, obtidos com a malha refinada, nos passos 9 (19,6 N/mm), 10 (21,3 N/mm), 25 (14,3 N/mm) e 200 (3,4 N/mm).

Figura 7 – Deformada

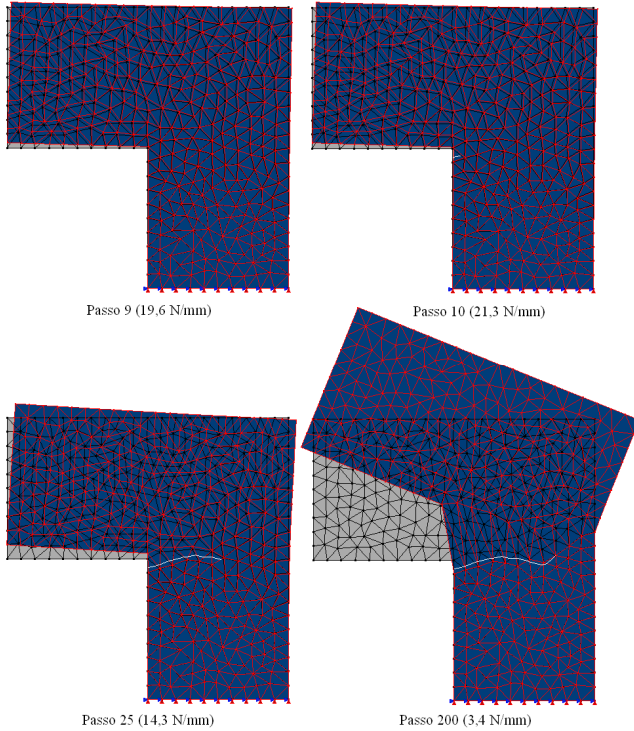
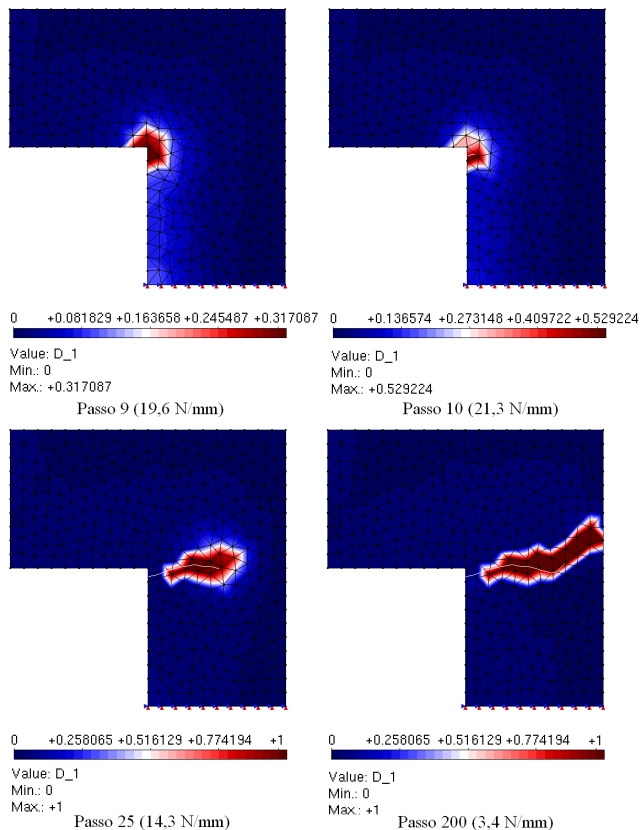
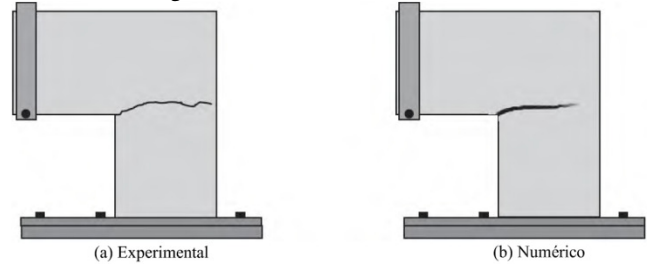


Figura 8 – Isofaixas de evolução do dano por tração



Nas Figuras 7 e 8 são destacados o salto no campo de deslocamentos provocado pela presença da trinca e o caminho da trinca ao longo da região de maior danificação. O padrão de dano observado é similar àquele obtido por Winkler; Hofstetter; Lehar (2004), ilustrado na Figura 9.

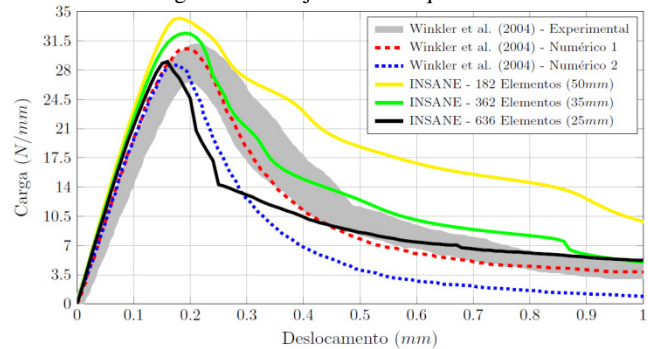
Figura 9 – Padrão de dano observado



Fonte: Winkler; Hofstetter; Lehar (2004).

Na Figura 10 são apresentadas as trajetórias de equilíbrio do ponto de deslocamento vertical máximo, comparando-as com os resultados de Winkler; Hofstetter; Lehar (2004).

Figura 10 – Trajetórias de equilíbrio



Observa-se que as trajetórias de equilíbrio obtidas apresentam diferenças significativas entre si tanto no limite de carga, quanto no regime pós-crítico. Isto se justifica pela forte dependência de malha do modelo, no qual o tamanho do elemento influi, por exemplo, na identificação do fenômeno de localização de deformações e no comprimento dos segmentos da trinca. Esta dependência é menos pronunciada com o refinamento da malha.

Os comportamentos obtidos com as malhas intermediária e refinada se assemelham ao observado nos experimentos, porém, a refinada resultou em um comportamento mais frágil que o experimento no intervalo de deslocamentos de 0,15 mm a 0,4 mm, o que pode ser justificado por uma estimativa da coesão aquém dos mecanismos de tenacidade à fratura, não observada com as malhas grosseira e intermediária pela introdução tardia dos segmentos da trinca, função do tamanho dos elementos.

Em relação aos resultados numéricos de Winkler; Hofstetter; Lehar (2004), observa-se que o comportamento obtido com a malha refinada se assemelha ao do modelo numérico 2, no que diz respeito à obtenção do limite de carga e ao regime pós-crítico até o deslocamento igual a 0,25 mm. A partir deste deslocamento, o comportamento

obtido passa a se apresentar mais dúctil que o modelo numérico 2, semelhante ao modelo numérico 1.

Na Figura 11 é apresentado o número de iterações versus passo de carga, da análise com a malha refinada. Observa-se que alguns passos necessitaram de um alto número de iterações, recorrente no modelo proposto devido à perturbação do sistema com a introdução de novos graus de liberdade e rigidez, associados ao segmento de trinca incipiente. No entanto, apesar desta alta demanda de iterações por alguns passos, verifica-se que o tensor constitutivo do modelo de dano é consistente, observado pela taxa de convergência quadrática do erro do resíduo de forças, ilustrado na Tabela 1 para os passos 10, 25 e 200.

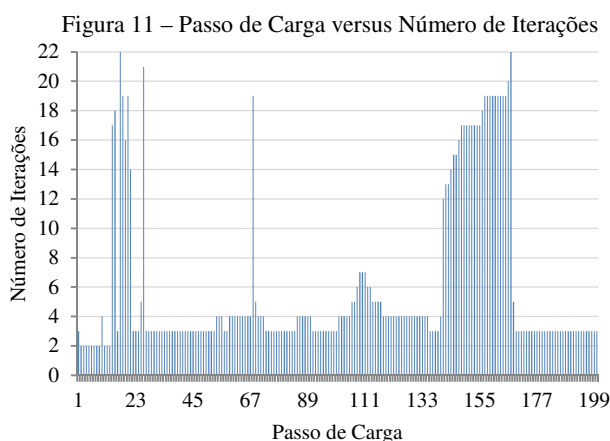


Tabela 1 – Erro do Resíduo de Forças versus Iteração

Iteração	Erro do Resíduo de Forças		
	Passo 10	Passo 25	Passo 200
1	1,873E+00	1,742E+00	1,847E-01
2	2,920E-01	1,222E+00	4,657E-03
3	2,855E-02	1,841E-01	<b>1,924E-04</b>
4	<b>4,730E-04</b>	5,988E-03	
5		<b>1,504E-04</b>	

Em relação ao custo computacional, a análise com a malha refinada demandou 19.316,875 segundos para ser processada, em uma máquina com processador Intel® Core™2Duo CPU T5800 @ 2.00GHz 798MHz, 1,99 GB de RAM.

## CONSIDERAÇÕES FINAIS

O modelo numérico implementado combina modelos de degradação distribuída com modelos baseados em funções interpoladoras com descontinuidades embutidas por meio do MEFG, bem como o MEFG com o modelo físico de fissura coesiva, a partir de leis tensão-abertura representativas das forças de coesão atuantes nos planos das trincas.

Tais combinações são monitoradas por uma medida de localização de deformações baseada na singularidade do tensor acústico. Por ser independente do modelo constitutivo distribuído adotado, esta medida de nucleação resguarda a generalidade do modelo.

Os recursos implementados permitem uma aproximação com boa precisão da resposta do processo de

fissuração, com capacidade de modelar trincas discretas que atravessam a malha de forma independente de sua geometria e topologia. A geometria da trinca, formada por segmentos retos, permite a propagação de trincas curvas ou retilíneas.

Os resultados numéricos apresentados neste artigo permitem concluir que o modelo implementado apresenta concordância com os modelos experimentais. Este modelo tem como principal vantagem a não necessidade de definição prévia da região de nucleação e do caminho da trinca ou de redefinição da malha durante o processamento.

## REFERÊNCIAS

- ALVES, P. D. **Estratégia global-local aplicada ao método dos elementos finitos generalizados**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2012.
- BABUSKA, I.; CALOZ, G.; OSBORN, J. E. Special finite element method for a class of second order elliptic problems with rough coefficients. **SIAM Journal on Numerical Analysis**, v. 36, p. 3553-3576, 1994. <https://doi.org/10.1137/0731051>.
- BARROS, F. B. **Métodos Sem Malha e Métodos dos Elementos Finitos Generalizados em Análise Não-Linear de Estruturas**. Tese (Doutorado), EESC-USP, São Carlos, SP, Brasil, 2002.
- BARROS, F. B.; PROENÇA, S. P. B.; BARCELLOS, C. S. de. On error estimator and p-adaptivity in the generalized finite element method. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 60, n. 14, p. 2373-2398, 2004. <https://doi.org/10.1002/nme.1048>.
- CAROL, I.; RIZZI, E.; WILLAM, K. On the formulation of anisotropic elastic degradation. I. theory based on a pseudo-logarithmic damage tensor rate. **International Journal of Solids and Structures**, v. 38, p. 491-518, 2001. [https://doi.org/10.1016/S0020-7683\(00\)00030-5](https://doi.org/10.1016/S0020-7683(00)00030-5).
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. **Hp clouds – a meshless method to solve boundary-value problem**. Technical Report, TICAM, The University of Texas at Austin, 1995.
- DUARTE, C. A.; ODEN, J. T. An h-p adaptive method using cloud. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 139, n. 1-4, p. 237-262, 1996. [https://doi.org/10.1016/S0045-7825\(96\)01085-7](https://doi.org/10.1016/S0045-7825(96)01085-7).
- HILLERBORG, A.; MODEER, M.; PETERSSON, P. E. Analysis of crack formation and crack growth in concrete by means of fracture mechanics and finite elements. **Cement and Concrete Research**, v. 6, n. 6, p. 773-782, 1976. [https://doi.org/10.1016/0008-8846\(76\)90007-7](https://doi.org/10.1016/0008-8846(76)90007-7).
- JIRÁSEK, M. Modeling of localized damage and fracture in quasibrittle materials, In: VERMEER, P. A.; DIEBELS, S.; EHLERS, W.; HERRMANN, H. J.; LUDING, S.; RAMM, E. (Ed.). **Continuous and Discontinuous Modelling of Cohesive-Frictional Materials**. Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, p. 17-29, 2001. [https://doi.org/10.1007/3-540-44424-6\\_2](https://doi.org/10.1007/3-540-44424-6_2).

- JIRÁSEK, M. Mathematical analysis of strain localization. **Damage and fracture in geomaterials**, p. 977-991, 2007a.
- JIRÁSEK, M. Mathematical analysis of strain localization. **In: ALERT Doctoral School 2007 – Damage and fracture in geomaterials**, Aussois, France, 2007b. <https://doi.org/10.1080/17747120.2007.9692973> <https://doi.org/10.3166/regc.11.977-991>.
- KARIHALOO, B. **Fracture Mechanics and Structural Concrete**. Concrete design and construction series, Longman Scientific & Technical, 1995.
- KLEIN, P.; GAO, H. Crack nucleation and growth as strain localization in a virtual-bond continuum. **Engineering Fracture Mechanics**, v. 61, n. 1, p. 21-48, 1998. [https://doi.org/10.1016/S0013-7944\(98\)00048-4](https://doi.org/10.1016/S0013-7944(98)00048-4).
- MELENK, J. M. **On Generalized Finite Element Methods**. PhD Dissertation. University of Maryland, College Park, 1995.
- MOËS, N.; DOLBOW, J.; BELYTSCHKO, T. A finite element method for crack growth without remeshing. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 46, n. 1, p. 131-150, 1999. [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1<131::AID-NME726>3.3.CO;2-A](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.3.CO;2-A) [https://doi.org/10.1002/\(SICI\)1097-0207\(19990910\)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J](https://doi.org/10.1002/(SICI)1097-0207(19990910)46:1<131::AID-NME726>3.0.CO;2-J).
- MOHAMMADI, S. **Extended finite element method for fracture analysis of structures**. Blackwell Pub, 2008. <https://doi.org/10.1002/9780470697795>.
- PENNA, S. S. **Formulação Multipotencial para Modelos de Degradação Elástica – Unificação Teórica, Proposta de Novo Modelo, Implementação Computacional e Modelagem de Estruturas de Concreto**. Tese (Doutorado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2011.
- PITANGUEIRA, R. L. S. **Mecânica de Estruturas de Concreto com Inclusão de Efeitos de Tamanho e Heterogeneidade**. Tese (Doutorado), Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro – PUC, Rio de Janeiro, 1998.
- PITUBA, J. J. C. **Estudo e aplicação de modelos constitutivos para o concreto fundamentados na mecânica do dano contínuo**. Dissertação (Mestrado), Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, Brasil, 1998.
- ROTS, J. G. **Computational modeling of concrete fracture**. PhD Dissertation, Delft University of Technology, Delft, Deutschland, 1988.
- SHAH, S. P.; SWARTZ, S. E.; OUYANG, C. **Fracture Mechanics of Concrete: Applications of Fracture Mechanics to Concrete, Rock and other Quasi-Brittle Materials**. John Wiley & Sons, Inc., 605 Third Avenue, New York, NY 10158-0012, 1995.
- SILVA, L. L. **Sistema Gráfico Interativo para Análise de Nucleação e Propagação de Trincas**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2016.
- WELLS, G. N.; SLUYS, L. J. A new method for modelling cohesive cracks using finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v. 50, n. 12, p. 2667-2682, 2001. <https://doi.org/10.1002/nme.143>.
- WINKLER, B.; HOFSTETTER, G.; LEHAR, H. Application of a constitutive model for concrete to the analysis of a precast segmental tunnel lining. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v. 28, n. 7-8, p. 797-819, 2004. <https://doi.org/10.1002/nag.362>.
- WOLFF, K. P. **Implementação computacional de um modelo de fissuração para o concreto baseado no método dos elementos finitos estendidos (XFEM)**. Dissertação (Mestrado), Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, MG, Brasil, 2010.