

EFEITOS PRODUZIDOS POR ENTALHES NOS TERÇOS EXTREMOS DO VÃO DE VIGAS ESTRUTURAIS DE MADEIRA

EFFECTS PRODUCED BY NOTCHES IN THE OUTER THIRDS OF THE SPAN OF STRUCTURAL TIMBER BEAMS

Mariana de Carvalho Silva Vieira¹, Francisco Antonio Romero Gesualdo²

¹Mestre em Engenharia Civil, Professora na Escola Superior de Administração, Marketing e Comunicação – ESAMC, Uberlândia, MG. E-mail: marianacsv@hotmail.com.

²Doutor em Engenharia de Estruturas, Universidade Federal de Uberlândia, Faculdade de Engenharia Civil, Uberlândia, MG. E-mail: gesualdo@ufu.br.

RESUMO

Frequentemente, as vigas de madeira são entalhadas para facilitar o apoio, executar ligações entre peças estruturais, dentre outros. Entretanto, a mudança brusca de seção transversal gera pontos de concentração de tensões na região do entalhe. A fim de se minimizar estes efeitos, existem recomendações nas normas vigentes para projeto de estruturas de madeira. Neste trabalho, foram feitas simulações numéricas de vigas entalhadas no terço extremo do vão e, por meio da análise das tensões e deslocamentos, avaliaram-se os efeitos produzidos pelos entalhes, comparando-se estes valores com aqueles obtidos pelas equações da teoria clássica da Resistência dos Materiais. A análise numérica foi feita pelo método dos elementos finitos, com o software ANSYS®. Devido à singularidade numérica nas quinas dos entalhes, utilizou-se a técnica de submodelamento associada à plasticidade do material para se atingir a convergência dos resultados. Foi feita também uma comparação entre os fatores de correção obtidos neste trabalho com os fatores propostos por diferentes normas. Dentre elas, a norma brasileira ABNT NBR 7190:1997 se mostrou mais deficiente com relação às especificações e justificativas e seria interessante que a mesma limitasse as dimensões de entalhe nos terços extremos de forma semelhante às normas norte-americana e chilena.

Palavras-chave: entalhe, mudança brusca de seção transversal, Métodos dos Elementos Finitos, simulação numérica, vigas entalhadas.

ABSTRACT

Very often, timber beams are notched to facilitate support, make connections between structural parts, and others. However, the abrupt change in cross-section creates stress concentrations around the notch. In order to correct these effects, several wood design standards provide special recommendations. The results of several numerical simulations of different cases of notched beams were presented in this work focusing in the analysis of stresses and displacements. It was also evaluated the effects produced by the notches in the beams, by comparison with those obtained by the classical equations of Strength of Materials. The numerical analysis was based on the finite element method, by ANSYS® software. Considering the numerical singularity at the corners of the notches, the submodeling technique associated with the plasticity of the material was used to achieve results convergence. It was also made a comparison between the correction factors obtained in this paper with those proposed by the analyzed standards for wooden structures. Among the analyzed standards, the Brazilian ABNT NBR 7190:1997 was the poorest in specifications and justifications, and it would be interesting that it limit the dimensions of the notches in the outer thirds of the span similarly to American and Chilean standards.

Keywords: notch, abrupt change in cross-section, Finite Element Method, numerical simulation, notched beams.

1 – INTRODUÇÃO

No Brasil, a madeira é empregada para diversos fins na construção civil, destacando-se em coberturas de edificações diversas, fôrmas, escoramentos, construções rurais e estruturas localizadas em ambientes corrosivos, visto que a madeira é naturalmente resistente a vários compostos químicos (FAHERTY; WILLIAMSON, 1999).

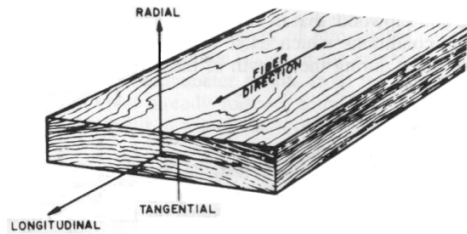
Diferentemente do aço, que é um material homogêneo e possui propriedades iguais em todas as direções, a madeira é um material anisotrópico, ou seja, possui diferentes propriedades em todas as direções. Simplificadamente, pode

ser considerado como ortotrópico, ou seja, consideram-se propriedades diferentes apenas em relação aos três eixos principais de crescimento, perpendiculares entre si, que são: longitudinal, perpendicular e tangencial às fibras, conforme pode ser visto na Figura 1. Na concepção de estruturas de madeira, devem ser levadas em conta as propriedades em cada direção.

É bastante comum a realização de entalhes em vigas de madeira, para facilitar a montagem e para adaptações construtivas. Estes entalhes geram uma perturbação do fluxo das tensões nas regiões onde estão localizados, que deve ser

levada em conta no projeto da estrutura (PORTEOUS; KERMANI, 2007).

Figura 1 – Esquema dos três eixos principais de crescimento da madeira, no que se refere à direção das fibras e anéis



Fonte: Faherty e Williamson (1999)

As diversas normas existentes no mundo todo, que regulamentam projeto e execução de estruturas de madeira, trazem recomendações para estes entalhes, como limitações de altura e largura, restrições de partes da viga para realização dos mesmos, e considerações de majoração de tensões ou minoração de resistências, a fim de se evitar danos às estruturas.

A norma ABNT NBR 7190:1997 ainda encontra-se um pouco deficiente nesse quesito, visto que apresenta recomendações com falta de esclarecimentos e justificativas aos projetistas (CORDOVIL; RIZZO, 2002).

Este trabalho teve por objetivo avaliar os efeitos causados por entalhes no terço extremo de vigas de madeira em seção retangular, submetidas a carregamento uniformemente distribuído, por meio do método dos elementos finitos, analisando-se tensões e deslocamentos.

2 – FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

Nesta fundamentação teórica, será feita uma breve abordagem sobre entalhes em vigas de madeira, seguida pela apresentação das recomendações da ABNT NBR 7190:1997 e de algumas normas internacionais para a execução de entalhes e, por fim, será mostrada uma comparação entre os critérios destas normas.

2.1 Entalhes em estruturas de madeira

De acordo com Cordovil e Rizzo (2002), um entalhe pode ser entendido como qualquer variação brusca de seção transversal feita em peças de madeira, quando necessita-se fazer um encaixe ou uma adaptação com outras peças em uma estrutura.

Mudanças bruscas de seção transversal, provocadas pelos entalhes, geram pontos de concentração de tensões na região do mesmo. Se ocorrerem na face tracionada de vigas, podem produzir concentração de tensões de tração perpendiculars às fibras. Essas situações devem ser evitadas, pois a madeira possui resistência baixa à tração nesta direção, e conseqüentemente, pode ocorrer o

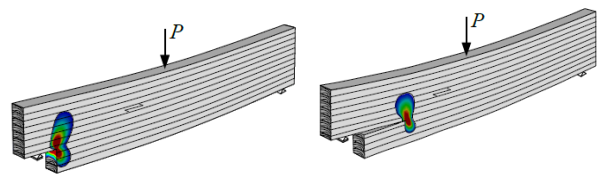
fendilhamento do material, iniciando-se no entalhe e resultando em ruptura frágil da peça (PFEIL; PFEIL, 2003).

De acordo com Foliente e McLain (1992), os entalhes devem ser evitados sempre que possível e, quando realmente houver a necessidade de executá-los, devem ser projetados em localização adequada e com geometria e formato a fim de minimizar os efeitos adversos. Sendo assim, pode-se dizer que os mesmos devem ser projetados de acordo com as normas, manuais e códigos vigentes para projeto e dimensionamento de estruturas de madeira de cada localidade.

Segundo Jockwer *et al.* (2014), as recomendações das normas e outros documentos são formuladas com base em equações simplificadas vindas de testes experimentais e de equações provenientes de modelos analíticos, baseadas na mecânica da fratura linear elástica, energia de fratura ou outras soluções mais complexas.

Os fenômenos de concentração de tensões surgem a partir do desvio das tensões devido à redução brusca da seção transversal, e podem levar ao surgimento e propagação de fissuras, conforme mostra a Figura 2, fazendo com que a viga se separe em duas partes e tenha sua altura efetiva reduzida.

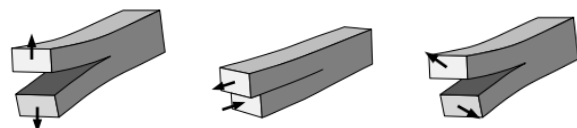
Figura 2 – Fissuras geradas na quina do entalhe devido à concentração de tensões de tração perpendiculars às fibras
a – Surgimento da fissura b – Propagação da fissura



Fonte: Jockwer (2014)

Quando um entalhe apresenta trincas devido a apenas concentração de tensões de tração normais às fibras, o mecanismo de falha da viga pode ser descrito pelo modo de fratura I, como mostrado na Figura 3-a. Já o modo de fratura II (Figura 3-b) ocorre quando a concentração é decorrente apenas de tensões de cisalhamento e, por fim, o modo de fratura misto, conforme mostrado na Figura 3-c, ocorre devido a uma combinação de concentrações destes dois tipos de tensões (JOCKWER, 2014).

Figura 3 – Modos de fratura
a – Modo I (por tração) b – Modo II (por cisalhamento) c – Modo misto



Fonte: Jockwer (2014)

Masuda (1996) realizou análises numéricas e experimentais de vigas biapoiadas com entalhes na região

dos apoios, tanto retangulares quanto com mísulas. No caso dos entalhes retangulares, a fratura ocorreu por tensões de tração perpendiculares às fibras da madeira na parte interna das quinas dos entalhes, enquanto que no caso de entalhes com mísulas, ocorreu de forma mista devido a tensões cisalhantes e de tração.

2.2 Critérios da ABNT NBR 7190:1997 para entalhes

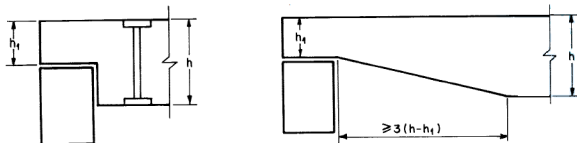
A norma brasileira indica que, para uma viga de largura b e altura h , com variação brusca de seção transversal em qualquer posição, deve-se multiplicar a tensão cisalhante solicitante de cálculo (τ_d) na região do entalhe, de altura h_1 , pelo fator de ponderação h/h_1 , resultando na Equação (1). Deve ser respeitada também a limitação de $h_1 > 0,75 \cdot h$.

$$\tau_d = \frac{3 \cdot V_d}{2 \cdot b \cdot h_1} \cdot \left(\frac{h}{h_1} \right) \quad (1)$$

Em que: V_d = esforço cortante de cálculo na região do entalhe.

Se houver situação com $h_1/h \leq 0,75$, porém, sempre com $h_1 \geq 0,5 \cdot h$, a norma recomenda alguns pormenores construtivos, também para limitar a tendência de fendilhamento da viga, como o uso de parafusos verticais dimensionados à tração axial para a totalidade da força cortante a ser transmitida (Figura 4-a), ou a execução de mísulas, com comprimento não inferior a três vezes a altura do entalhe, a fim de variar a seção transversal gradualmente e evitar pontos de concentração de tensões (Figura 4-b).

Figura 4 – Pormenores construtivos em vigas entalhadas
a – Entalhe com parafuso vertical b – Entalhe com mísula



Fonte: ABNT NBR 7190:1997

2.3 Critérios do Eurocode 5 (EUROCODE, 2004) para entalhes

O Eurocode 5 (EUROCODE, 2004) considera todos os entalhes com mísula. Primeiramente, são apresentadas situações nas quais o efeito de concentração de tensões pode ser desprezado, que são:

- Flexão que provoca tensões de tração no entalhe, em que a inclinação deste é menor do que 1:i, com $i \geq 10$;
- Quando a flexão provoca tensões de compressão no entalhe.

A norma também traz o coeficiente de ponderação k_v para a resistência ao cisalhamento, quando tem-se entalhes na região do apoio, a fim de se considerar a perda de

resistência gerada pela redução de seção transversal de uma viga de largura b e altura h , que é dado conforme segue, considerando-se o menor valor dos valores dados pela Equação (2).

$$k_v = \min \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ k_n \times \left(1 + \frac{1,1 \times i^{1,5}}{\sqrt{h}} \right) \\ \frac{1}{\sqrt{h} \times \left(\sqrt{\alpha \times (1 - \alpha)} + 0,8 \times \frac{x}{h} \times \sqrt{\frac{1}{\alpha} - \alpha^2} \right)} \end{array} \right. \quad (2)$$

Em que: k_n = coeficiente dado de acordo com o tipo de madeira, que pode assumir os valores a seguir:

- Para madeira estrutural composta (LVL): 4,5;
- Para madeira maciça: 5,0;
- Para madeira laminada colada: 6,5.

i = inclinação da mísula (proporção 1:i);

x = distância entre o ponto onde está aplicada a reação de apoio e o início da mísula, em mm;

α = relação entre a altura da seção na região do entalhe (h_{ef}) pela altura total da viga (h).

2.4 Critérios da norma NDS (ANSI, 2005) para entalhes

A norma norte-americana estabelece que, para vigas de seção retangular de largura b e altura d , fletidas em relação ao eixo de maior inércia, entalhadas nos apoios e no bordo tracionado, tem-se que o esforço cortante (V'_{τ}) deve ser calculado de acordo com a Equação (3), multiplicando-se o valor do esforço cortante na região do entalhe, de altura d_n , pelo fator de ponderação $(d_n/d)^2$.

$$V'_{\tau} = \left[\frac{2}{3} \cdot F_v \cdot b \cdot d_n \right] \cdot \left[\frac{d_n}{d} \right]^2 \quad (3)$$

Em que: F'_v = tensão cisalhante no entalhe.

Em relação à madeira serrada, a norma NDS (ANSI, 2005) indica que, quando os entalhes estiverem na região dos apoios em vigas sujeitas à flexão, sua altura não deve ser maior do que $1/4$ da altura total da seção transversal. Quando estiverem presentes nos terços extremos da viga, tanto no bordo tracionado quanto no comprimido, os entalhes não devem ter altura superior a $1/6$ da altura total da viga, e a largura deve ser inferior ou igual a um terço da altura total da viga. Não são permitidos entalhes em vigas de largura maior do que $3 \frac{1}{2}$ polegadas, exceto quando for na região do apoio, e entalhes no terço médio da viga.

2.5 Critérios da norma CSA O86:2010 para entalhes

De acordo com a norma canadense, para entalhes na região dos apoios na face tracionada das vigas de largura b e altura d , a resistência ao cisalhamento deve ser multiplicada pelo coeficiente de ponderação K_N , dado conforme a Equação (4).

$$K_N = \left[0,006d \cdot \left(1,6 \cdot \left(\frac{1}{\alpha} - 1 \right) + \eta^2 \cdot \left(\frac{1}{\alpha^3} - 1 \right) \right) \right]^{-\frac{1}{2}} \quad (4)$$

Em que: α é um parâmetro dado conforme a Equação (5).

$$\alpha = 1 - \left(\frac{d_n}{d} \right) \quad (5)$$

Em que: d_n é a altura do entalhe, em mm, e não deve exceder 0,25 vezes a altura da seção transversal da viga; η é um parâmetro dado conforme a Equação (6).

$$\eta = \left(\frac{e}{d} \right) \quad (6)$$

Em que: e é a distância medida paralelamente ao eixo do elemento, a partir do centro do suporte mais próximo até o canto interno do entalhe, em mm.

2.6 Critérios da norma INN NCh 1198:2006 para entalhes

Em relação à madeira serrada, a norma chilena indica que entalhes retos, na região dos apoios e na parte inferior de vigas de seção transversal retangular de largura b e altura h , submetidas à flexão, devem ter altura (a) menor ou igual à metade da altura total da viga, enquanto que a distância entre a reação de apoio até a face interna do entalhe (e) deve ser menor ou igual a 1/3 da altura da seção devido ao entalhe (h_r). No caso de entalhes com mísulas, valem as mesmas recomendações, além de que o ângulo de inclinação da mísula (α) deve ser menor ou igual a 30°.

A resistência ao cisalhamento destes entalhes também deve ser multiplicada pelo coeficiente de ponderação K_r ou K_{ri} , dados conforme Tabela 1, para entalhes retos e inclinados (com mísula).

Tabela 1 – Fator de modificação para entalhes inferiores, K_r e K_{ri}

Tipo de entalhe inferior	Valor do fator de modificação para o entalhe inferior	Condição
Reto	$K_r = \left(\frac{h_r}{h} \right)^2$	$a \leq 0,5h$
Inclinado	$K_{ri} = \frac{h_r}{h}$	

Fonte: Traduzido de INN NCh 1198:2006

A norma INN Nch 1198:2006, assim como a norma NDS (ANSI, 2005), permitem apenas entalhes nos terços extremos da viga, desde que sua altura não ultrapasse 1/6 da altura total da viga e , sua largura, 1/3 da altura total. Para vigas com largura maior do que 90 mm não se aceitam entalhes no bordo tracionado.

2.7 Comparação entre os critérios

Pode-se concluir que a norma NDS (ANSI, 2005), a norma INN Nch 1198:2006 e a norma CSA O86:2010 são as normas mais conservadoras em relação à posição dos entalhes, em que nas duas primeiras não são permitidos no terço médio da viga, enquanto que na última, são permitidos apenas na região dos apoios.

Em relação às dimensões dos entalhes para madeira serrada, a norma NDS (ANSI, 2005) é a mais rígida, apresentando as maiores limitações, sendo a altura máxima de 1/6 da altura total da viga e a largura máxima de 1/3 da altura total, para entalhes nos terços extremos, tanto no bordo tracionado quanto no comprimido, e altura máxima do entalhe na região do apoio igual a 1/4 da altura total.

A norma brasileira indica altura máxima igual 1/4 da altura da viga para entalhes retos em qualquer posição no bordo tracionado, o que é bem menos seguro em comparação à norma NDS (ANSI, 2005), que nem mesmo permite entalhes no terço médio da viga. O Eurocode 5 (EUROCODE, 2004) não apresenta limitações de dimensões para entalhes, exceto para os casos nos quais o efeito da concentração de tensões gerado pelo entalhe pode ser desprezado.

Os procedimentos de ponderação de solicitações e resistências ao cisalhamento para entalhes na região do apoio são semelhantes entre as normas ABNT NBR 7190:1997, NDS (ANSI, 2005) e INN NCh 1198:2006.

Em relação à norma ABNT NBR 7190:1997, nota-se que, para entalhes na região do apoio, não é levada em conta a distância entre a reação de apoio ou face do apoio até o início do entalhe, parâmetro este que é considerado pelas normas internacionais analisadas.

A norma brasileira também não traz informações mais detalhadas a respeito do uso de parafusos verticais, como a possibilidade de se utilizar mais de uma linha de furação ou se pode haver mais de um parafuso por linha de furação.

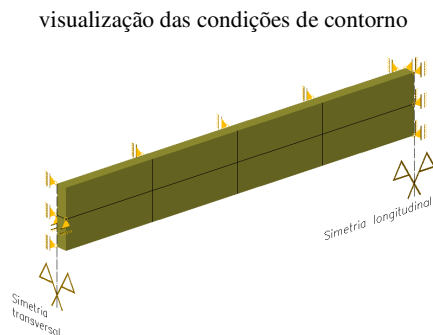
3 – METODOLOGIA

Foram realizadas simulações numéricas das vigas entalhadas, e buscou-se comparar os valores obtidos nas mesmas com os calculados pelas fórmulas da teoria clássica da Resistência dos Materiais, e comparar as recomendações propostas em normas diversas para o projeto de entalhes em vigas de madeira.

As simulações numéricas foram realizadas pelo método dos elementos finitos, com o uso do programa ANSYS versão 15.0.7. A fim de se diminuir a quantidade de dados

processados, foram utilizados recursos de simetria longitudinal e transversal em todos os casos, ou seja, apenas um quarto da viga foi manipulado, empregando-se apoios móveis na vertical nos pontos de simetria, caracterizando a condição de engaste móvel (Figura 5). O apoio móvel da extremidade esquerda foi considerado na altura média da viga.

Figura 5 – Condições de vinculações para ¼ da viga (sem entalhe) considerando uma malha extremamente pobre para melhor



Como referência para todas as simulações, foram adotados seção transversal retangular com largura (b) de 5 cm e altura (h) de 15 cm, vão da viga de 3 m, biapoiado, e madeira do tipo Dicotiledônea C40, cujas propriedades consideradas são dadas a seguir:

- Resistência de cálculo à compressão paralela às fibras: $f_{c0,d} = 1,60 \text{ kN/cm}^2$;
- Resistência de cálculo à compressão perpendicular às fibras: $f_{c90,d} = 0,40 \text{ kN/cm}^2$;
- Resistência de cálculo ao cisalhamento: $f_{v0,d} = 0,19 \text{ kN/cm}^2$;
- Módulo de elasticidade paralelo às fibras efetivo: $E_{c0,ef} = E_x = 1092 \text{ kN/cm}^2$;
- Módulo de elasticidade em relação ao eixo y: $E_y = 54,6 \text{ kN/cm}^2$;
- Módulo de elasticidade em relação ao eixo z: $E_z = 54,6 \text{ kN/cm}^2$;
- Coeficiente de Poisson na direção y para força em x: $\nu_{xy} = 0,30$;
- Coeficiente de Poisson na direção z para força em y: $\nu_{yz} = 0,10$;
- Coeficiente de Poisson na direção z para força em x: $\nu_{xz} = 0,10$;
- Módulo de cisalhamento no plano xy: $G_{xy} = 54,6 \text{ kN/cm}^2$;
- Módulo de cisalhamento no plano yz: $G_{yz} = 54,6 \text{ kN/cm}^2$;
- Módulo de cisalhamento no plano xz: $G_{xz} = 54,6 \text{ kN/cm}^2$.

Obs.: o k_{mod} considerado nas resistências de cálculo da madeira foi de 0,56.

Considerou-se o entalhe no terço extremo do vão, a 50 cm do apoio esquerdo, e foram testadas alturas de entalhe (h_1) de 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm e 7 cm, e larguras de entalhe (c) de 5 cm, 6 cm e 8 cm.

As análises foram feitas com carregamento uniformemente distribuído nas vigas. Para determinação do mesmo, foi estimada uma solicitação que provocasse tensão normal ou deslocamento limite na viga, admitindo-se o mais crítico entre os dois.

Considerando o caso de uma viga biapoiada com vão de 3 m, e força uniformemente distribuída (q), obteve-se um valor de $q = 0,022 \text{ kN/cm}$, definido pelo máximo deslocamento ($L/200$) previsto na norma ABNT NBR 7190:1997. Conhecendo-se este valor limite, decidiu-se utilizar $q = 0,015 \text{ kN/cm}$.

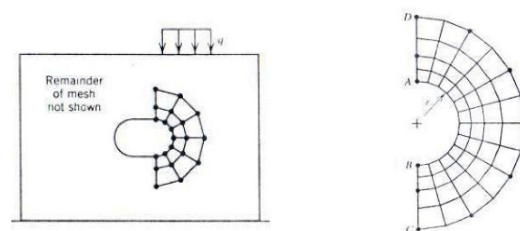
Optou-se por utilizar o recurso da ação da gravidade para imposição do carregamento nas vigas, ou seja, toda a solicitação foi transformada como ação gravitacional aplicada em todos os elementos. Esta solicitação de cálculo em uma viga de seção transversal 5 cm × 15 cm, com $L = 300 \text{ cm}$, implica em considerar uma massa específica (densidade) para a viga igual a:

$$\gamma = \frac{q \cdot L}{\text{Vol}} = \frac{0,015 \times 300}{5 \times 15 \times 300} = 2 \cdot 10^{-4} \text{ kN/cm}^3$$

Trabalhou-se com malha retangular, em função da regularidade e proporcionalidade das dimensões e, como no modelo há um ponto de singularidade, que é a quina do entalhe, cuidados especiais tiveram de ser tomados, visto que nesta região não há convergência dos resultados conforme refina-se a malha.

Para se contornar o problema de concentração de tensões na quina do entalhe, trabalhou-se com a técnica de submodelamento que, segundo Cook (1995), consiste em se modelar o problema todo com uma malha que seja refinada o suficiente para fornecer resultados adequados de deslocamentos, e posteriormente gerar-se um submodelo no entorno da região a ser analisada, com malha mais refinada, impondo-se nos nós os deslocamentos previamente determinados como condição de contorno (Figura 6).

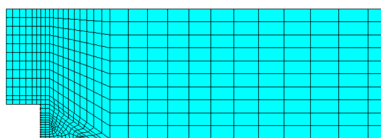
Figura 6 – Exemplo da técnica de submodelagem
a – Malha do problema global (malha suficiente) b – Submodelo da área de interesse, em que os nós A, B, C e D também aparecem no modelo global



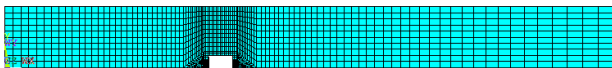
Fonte: Cook (1995)

Fazendo-se os testes de malha decidiu-se trabalhar, no modelo completo, com malha mais concentrada na região próxima à quina, pois nesta região os parâmetros eram mais sensíveis ao refinamento, deixando-se as partes menos sensíveis com malha menos densa, a fim de se economizar tempo de processamento (Figura 7). Para cada caso simulado foi feito um teste de malha individual, variando-se o número de divisões nas áreas ao redor da quina e analisando-se os resultados dos parâmetros, a fim de se escolher adequadamente a malha. O material do modelo completo foi considerado no regime elástico linear.

Figura 7 – Configuração da malha a ser utilizada
a – Malha gerada na região próxima à quina direita

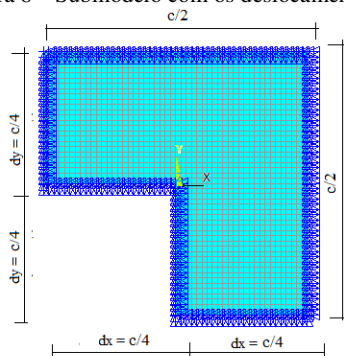


b – Malha do modelo completo da viga



O submodelo foi considerado em forma de L invertido na região da quina. É imprescindível que a malha no modelo completo seja suficientemente apropriada para fornecer bons resultados de deslocamentos, visto que estes seriam impostos ao submodelo como condições de contorno. As dimensões do mesmo foram consideradas em função do parâmetro “c”, que é a largura do entalhe, de acordo com a Figura 8. Foi admitida plasticidade no material do submodelo, a fim de se conseguir a convergência dos parâmetros nesta região.

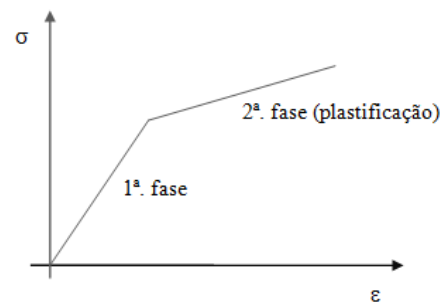
Figura 8 – Submodelo com os deslocamentos impostos



Para incluir no modelo numérico as características elásticas mais próximas às condições reais (madeira como material ortotrópico), foi utilizado no ANSYS o modelo de material denominado ANISO. Desta forma, puderam ser consideradas tensões de escoamento para diferentes direções, no caso, representadas pelos valores das tensões S_x , S_y e S_{xy} . Sendo assim, foi necessário empregar o elemento SOLID45, em vez do elemento SOLID185, que é o elemento tridimensional básico da versão 15.0.7 do ANSYS. Este

último, apesar de mais moderno, não tem esta capacidade (ANSYS, 2013). O SOLID45 é um elemento definido por oito nós, com três graus de liberdade em cada nó: translações nos eixos x, y e z. O material foi considerado como bilinear, onde a segunda fase representa o escoamento do material, conforme Figura 9.

Figura 9 – Material de comportamento bilinear



A relação entre estes limites de escoamento foi considerada de acordo com a norma ABNT NBR 7190:1997 relação entre limite de escoamento para tensão normal em x (S_{plast}), e o limite para tensão normal em y como 0,25 do S_{plast} . Para a tensão cisalhante em xy, como 0,12 do S_{plast} . Além dos limites de escoamento, foi necessário também impor uma redução dos módulos E_x , E_y , E_z , G_{xy} , G_{yz} e G_{xz} , para a fase de plastificação. Considerou-se esta redução igual a 50% do valor da primeira fase de cada parâmetro. Isto foi estabelecido após testes, que indicavam uma redução ótima entre 50% e 75%.

Para se escolher a tensão de escoamento (S_{plast}) adequada a cada caso simulado, ou seja, cada combinação de altura e largura de entalhe na viga, tomou-se como base o valor da tensão na quina pelo modelo completo ($S_{x,q}$), ou seja, a tensão de escoamento deveria ser menor que este valor. Posteriormente, foi analisada a convergência dos parâmetros S_x , S_y e S_{xy} na quina conforme variou-se o número de divisões do submodelo (ndiv), na vertical e na horizontal. Em todos os casos simulados, trabalhou-se com número de divisões igual a 20, que fornecia resultados adequados.

Considerou-se o entalhe no terço extremo do vão a 50 cm do apoio esquerdo, e foram testadas alturas de entalhe (h_1) de 2 cm, 3 cm, 4 cm, 5 cm, 6 cm e 7 cm, e larguras de entalhe (c) de 5 cm, 6 cm e 8 cm.

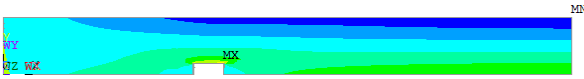
4 – RESULTADOS

Simulando-se inicialmente os modelos completos de viga com malha suficiente, percebeu-se que, para todos os casos de alturas e larguras de entalhe analisadas, a máxima tensão S_x de tração ocorreu na quina do entalhe (ponto MX), enquanto a mínima (ponto MN) ocorreu no meio do vão, para entalhes com altura até 3 cm (Figura 10-a), e na região do entalhe, na face superior da viga, para entalhes com altura a partir de 4 cm (Figura 10-b). Em relação à tensão normal S_y

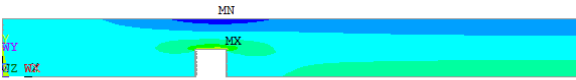
e a tensão cisalhante S_{xy} , as máximas também ocorreram sempre na quina, conforme mostram a Figura 10-c e Figura 10-d, respectivamente, e o deslocamento vertical (u) máximo (MN), no meio do vão, conforme Figura 10-e.

Figura 10 – Viga com entalhe no terço extremo do vão

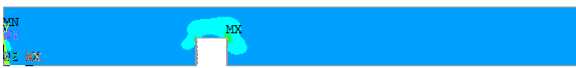
a – Tensões normais S_x para uma viga com entalhe de altura menor que 4 cm



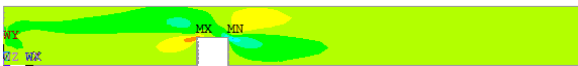
b – Tensões normais S_x para uma viga com entalhe de altura a partir de 4 cm



c – Tensões normais S_y



d – Tensões cisalhantes S_{xy}



e – Deslocamentos verticais u

Tabela 2 – Resultados das simulações para vigas com entalhes de largura 8 cm

c (cm)	h1 (cm)	U (cm)	Sx_MIN (kN/cm ²)	Sx (kN/cm ²)	Sy (kN/cm ²)	Sxy (kN/cm ²)	Sx_cMIN (kN/cm ²)	Sx_cMAX (kN/cm ²)	Splast (kN/cm ²)
8,00	2,00	1,12	0,69	1,31	0,14	0,10	0,90	0,90	1,00
8,00	3,00	1,16	0,80	1,67	0,22	0,15	0,90	0,90	1,50
8,00	4,00	1,22	0,95	2,05	0,29	0,20	0,90	0,90	2,00
8,00	5,00	1,30	1,15	2,46	0,38	0,26	0,89	0,89	2,50
8,00	6,00	1,42	1,43	2,94	0,47	0,31	0,89	0,89	3,00
8,00	7,00	1,59	1,82	3,50	0,58	0,36	0,89	0,89	3,50

Tabela 3 – Resultados das simulações para vigas com entalhes de largura 6 cm

c (cm)	h1 (cm)	U (cm)	Sx_MIN (kN/cm ²)	Sx (kN/cm ²)	Sy (kN/cm ²)	Sxy (kN/cm ²)	Sx_cMIN (kN/cm ²)	Sx_cMAX (kN/cm ²)	Splast (kN/cm ²)
6,00	2,00	1,12	0,68	1,30	0,14	0,10	0,90	0,90	1,00
6,00	3,00	1,15	0,77	1,67	0,21	0,15	0,90	0,90	1,50
6,00	4,00	1,21	0,92	2,05	0,29	0,20	0,90	0,90	2,00
6,00	5,00	1,28	1,12	2,46	0,37	0,25	0,90	0,90	2,50
6,00	6,00	1,39	1,39	2,93	0,47	0,31	0,90	0,90	3,00
6,00	7,00	1,55	1,77	3,49	0,58	0,36	0,89	0,89	3,50

Tabela 4 – Resultados das simulações para vigas com entalhes de largura 5 cm

c (cm)	h1 (cm)	U (cm)	Sx_MIN (kN/cm ²)	Sx (kN/cm ²)	Sy (kN/cm ²)	Sxy (kN/cm ²)	Sx_cMIN (kN/cm ²)	Sx_cMAX (kN/cm ²)	Splast (kN/cm ²)
5,00	2,00	1,11	0,67	1,30	0,14	0,10	0,90	0,90	1,00
5,00	3,00	1,15	0,76	1,67	0,21	0,15	0,90	0,90	1,50
5,00	4,00	1,20	0,90	2,06	0,29	0,20	0,90	0,90	2,00
5,00	5,00	1,27	1,10	2,47	0,37	0,25	0,90	0,90	2,50
5,00	6,00	1,37	1,37	2,95	0,46	0,30	0,90	0,90	3,00
5,00	7,00	1,52	1,75	3,52	0,57	0,35	0,90	0,90	3,50



A tensão mínima da viga começou a ocorrer na região do entalhe para valores de alturas a partir de 4 cm devido à redução da seção transversal residual naquela região, que foi suficiente para fazer com que a compressão paralela às fibras se tornasse mais crítica naquele local, mesmo estando submetido a momento fletor menor do que no centro, ficando este mais propenso a falhas. Em todos os casos, foi analisada a quina da direita, mais próxima do meio do vão, por apresentar os valores mais críticos.

Os valores no meio do vão de tensões normais (S_{x_cMAX} e S_{x_cMIN}) e deslocamento vertical (u_{centro}), bem como o valor da tensão mínima na região do entalhe (S_{x_qMIN}), foram obtidos diretamente do modelo com malha suficiente no regime elástico linear, visto que nestas regiões não existe singularidade na geometria, enquanto que os valores das tensões na quina foram obtidos fazendo-se o submodelo contemplando plasticidade no material.

Escolhidos os limites de escoamento S_{plast} para cada combinação de altura e largura de entalhe, obtiveram-se os resultados mostrados nas Tabelas 2, 3 e 4 para larguras de entalhe de 8 cm, 6 cm e 5 cm, respectivamente.

Percebeu-se que todos os parâmetros cresceram consideravelmente conforme aumentou-se a altura do entalhe, e permaneceram praticamente estáveis conforme se variou a largura do mesmo (variações menores que 6% para todos os parâmetros, entre as larguras 5 cm e 8 cm). As tensões normais máximas e mínimas no meio do vão praticamente não foram afetadas pela presença do entalhe na viga, ficando seus valores muito próximos aos da viga cheia (0,9 kN/cm²). Notou-se também um leve crescimento do deslocamento vertical no meio do vão conforme aumentou-se a largura do entalhe, principalmente para as alturas maiores, devido à maior redução de material da viga dada pela maior largura.

Pôde-se notar também que, para o carregamento escolhido, os valores de S_x ultrapassaram o limite de resistência da madeira ($f_{c,0d} = 1,60$ kN/cm²) a partir da altura de entalhe de 3 cm. Entalhes com altura a partir de 4 cm extrapolaram o limite do parâmetro S_{xy} ($f_{v,0d} = 0,19$ kN/cm²), a partir de 6 cm, o S_y ($f_{c,90d} = 0,40$ kN/cm²), enquanto que o deslocamento vertical limite ($L/200$, que resulta em $u_{lim} = 1,50$ cm) e a tensão mínima na região do entalhe ($f_{c,0d} = 1,60$ kN/cm²) apenas foram excedidos em entalhes com altura a partir de 7 cm.

Posteriormente, foram calculados os parâmetros pelas fórmulas da teoria clássica da Resistência dos Materiais. Foi agregado o índice “t” para designar estas tensões “teóricas”. Então, tem-se as tensões no centro máxima ($S_{x,cMAXt}$) e mínima ($S_{x,cMINt}$), bem como as máximas tensões normal

($S_{x,qt}$) e cisalhante ($S_{xy,qt}$) na quina. Considerou-se também a tensão cisalhante máxima na quina com o fator de multiplicação proposto pela norma ABNT NBR 7190:1997 ($S_{xy,qtN}$). Fazendo-se a relação entre os valores das simulações pelos valores teóricos, foi possível comparar os resultados. Para o caso dos deslocamentos, esta comparação foi feita diretamente com a viga cheia, dividindo-se o deslocamento da simulação para cada caso pelo deslocamento da viga cheia ($u_{t,centro}$).

Percebeu-se que a diferença entre os valores teóricos e simulados das tensões máxima e mínima no meio do vão ficou em torno de 1%. Para a tensão mínima na região do entalhe, os valores teóricos foram maiores que os simulados (de 7% a 10%), e para a tensão máxima na quina, os valores teóricos foram inferiores, com os simulados de 75% a 106% maiores. Isso ocorre em função do entalhe estar na face tracionada das vigas, gerando maior perturbação nas tensões nesta região, além de que a posição do entalhe (face superior ou inferior), não é levada em conta nas fórmulas clássicas, apenas a redução de seção transversal.

Para a tensão cisalhante, os valores das simulações foram de 193% a 596% maiores que os teóricos, com o fator de correção proposto pela ABNT NBR 7190:1997 insuficiente para correção destas tensões. Estes resultados podem ser vistos nas Tabelas 5, 6 e 7 para larguras de entalhe de 8 cm, 6 cm e 5 cm, respectivamente.

Tabela 5 – Valores teóricos dos parâmetros e comparação com os valores simulados para vigas com entalhes de largura 8 cm

c (cm)	h1 (cm)	Δu	$S_{x,t}$ (kN/cm ²)	$S_x/S_{x,t}$	$S_{x,tMIN}$ (kN/cm ²)	$S_{x,MIN}/S_{x,tMIN}$	$S_{xy,t}$ (kN/cm ²)	$S_{xy}/S_{xy,t}$	Fator ABNT NBR 7190:1997
8,00	2,00	1,09	0,75	1,75	0,75	0,93	0,03	3,08	1,15
8,00	3,00	1,13	0,88	1,91	0,88	0,91	0,03	4,41	1,25
8,00	4,00	1,18	1,04	1,96	1,04	0,91	0,04	5,42	1,36
8,00	5,00	1,26	1,26	1,95	1,26	0,91	0,04	6,16	1,50
8,00	6,00	1,38	1,56	1,88	1,56	0,92	0,05	6,65	1,67
8,00	7,00	1,54	1,97	1,77	1,97	0,92	0,05	6,96	1,88

Tabela 6 – Valores teóricos dos parâmetros e comparação com os valores simulados para vigas com entalhes de largura 6 cm

c (cm)	h1 (cm)	Δu	$S_{x,t}$ (kN/cm ²)	$S_x/S_{x,t}$	$S_{x,tMIN}$ (kN/cm ²)	$S_{x,MIN}/S_{x,tMIN}$	$S_{xy,t}$ (kN/cm ²)	$S_{xy}/S_{xy,t}$	Fator ABNT NBR 7190:1997
6,00	2,00	1,08	0,73	1,78	0,73	0,93	0,03	3,01	1,15
6,00	3,00	1,12	0,85	1,95	0,85	0,91	0,04	4,26	1,25
6,00	4,00	1,17	1,02	2,01	1,02	0,90	0,04	5,25	1,36
6,00	5,00	1,24	1,23	2,00	1,23	0,91	0,04	5,98	1,50
6,00	6,00	1,35	1,52	1,93	1,52	0,92	0,05	6,49	1,67
6,00	7,00	1,50	1,92	1,82	1,92	0,92	0,05	6,79	1,88

Tabela 7 – Valores teóricos dos parâmetros e comparação com os valores simulados para vigas com entalhes de largura 5 cm

c (cm)	h1 (cm)	Δu	S_{x_t} (kN/cm ²)	S_x/S_{x_t}	S_{x_tMIN} (kN/cm ²)	S_{x_MIN}/S_{x_tMIN}	S_{xy_t} (kN/cm ²)	S_{xy}/S_{xy_t}	Fator ABNT NBR 7190:1997
5,00	2,00	1,08	0,72	1,81	0,72	0,93	0,03	2,93	1,15
5,00	3,00	1,12	0,84	1,99	0,84	0,90	0,04	4,17	1,25
5,00	4,00	1,16	1,00	2,06	1,00	0,90	0,04	5,14	1,36
5,00	5,00	1,23	1,21	2,04	1,21	0,91	0,04	5,89	1,50
5,00	6,00	1,33	1,50	1,97	1,50	0,91	0,05	6,38	1,67
5,00	7,00	1,48	1,89	1,86	1,89	0,92	0,05	6,63	1,88

A evolução destes parâmetros pode ser melhor visualizada nas Figuras de 11 a 15, que apresentam os diagramas com a variação dos valores numéricos e teóricos referentes a tensão normal mínima no centro, tensão normal máxima no centro, tensão normal S_x na quina, tensão normal mínima na região do entalhe e tensão cisalhante S_{xy} na quina, respectivamente, conforme variou-se a altura e a largura do entalhe.

Figura 11 – Variação da tensão mínima no centro

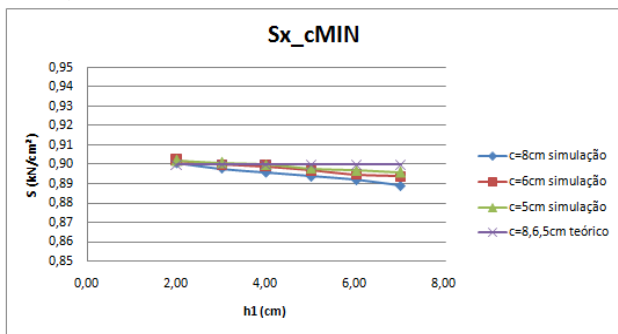


Figura 12 – Variação da tensão máxima no centro

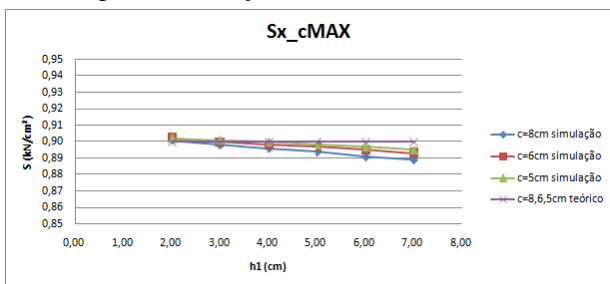


Figura 13 – Variação da tensão normal S_x máxima na quina

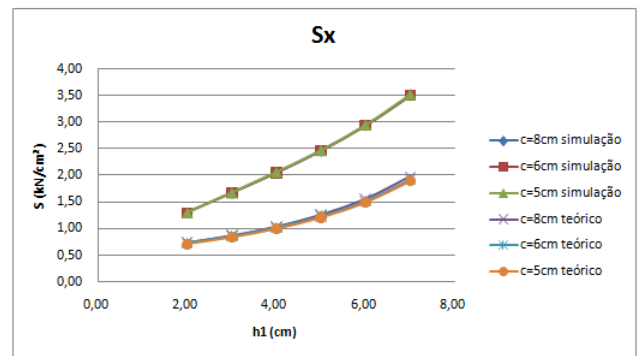


Figura 14 – Variação da tensão normal S_x mínima na região do entalhe

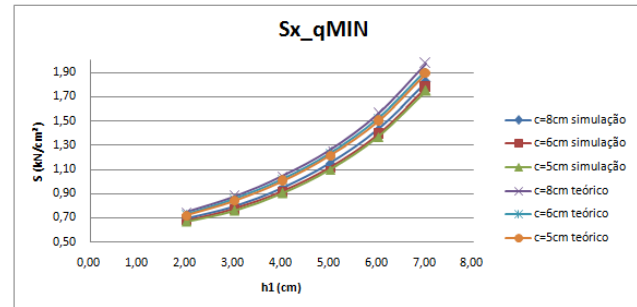
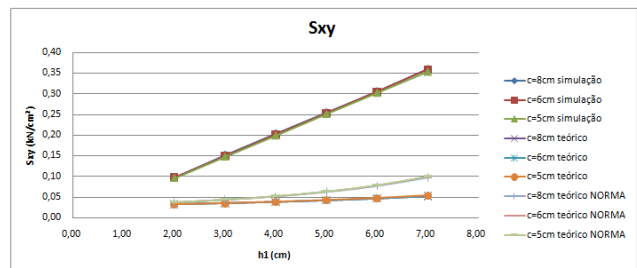


Figura 15 – Variação da tensão cisalhante S_{xy} na quina



As normas NDS (ANSI, 2005) e INN NCh 1198:2006 permitem também entalhes nos terços extremos da viga, desde que a altura dos mesmos não ultrapasse 1/6 da altura total da viga (no caso 2,5 cm), e a largura seja menor ou

igual do que 1/3 da altura total da viga (no caso 5 cm). A norma ABNT NBR 7190:1997, por sua vez, não limita a posição dos entalhes, apenas a altura dos mesmos a no máximo ¼ da altura total da viga quando retos (3,75 cm no caso). Desta forma, foram analisados também os fatores de

correção das tensões cisalhantes para estes casos. Essa comparação pode ser vista nas Tabelas de 8 a 10 para vigas com carregamento uniformemente distribuído com entalhes de largura 8 cm, 6 cm e 5 cm, respectivamente.

Tabela 8 – Comparação entre os fatores de correção para vigas com entalhes de largura 8 cm

c (cm)	h1 (cm)	Sxy (kN/cm ²)	Sxy_t (kN/cm ²)	Sxy/ Sxy_t	Fator de correção ABNT	Fator de correção NDS	Fator de correção NCh 1198
8,00	2,00	0,10	0,03	3,08	1,15	1,33	1,33
8,00	3,00	0,15	0,03	4,41	1,25	1,56	1,56
8,00	4,00	0,20	0,04	5,42	1,36	1,86	1,86
8,00	5,00	0,26	0,04	6,16	1,50	2,25	2,25
8,00	6,00	0,31	0,05	6,65	1,67	2,78	2,78
8,00	7,00	0,36	0,05	6,96	1,88	3,52	3,52

Nota: valores com coloração reduzida indicam situação fora do intervalo de validade da norma.

Tabela 9 – Comparação entre os fatores de correção para vigas com entalhes de largura 6 cm

c (cm)	h1 (cm)	Sxy (kN/cm ²)	Sxy_t (kN/cm ²)	Sxy/ Sxy_t	Fator de correção ABNT	Fator de correção NDS	Fator de correção NCh 1198
6,00	2,00	0,10	0,03	3,01	1,15	1,33	1,33
6,00	3,00	0,15	0,04	4,26	1,25	1,56	1,56
6,00	4,00	0,20	0,04	5,25	1,36	1,86	1,86
6,00	5,00	0,25	0,04	5,98	1,50	2,25	2,25
6,00	6,00	0,31	0,05	6,49	1,67	2,78	2,78
6,00	7,00	0,36	0,05	6,79	1,88	3,52	3,52

Nota: valores com coloração reduzida indicam situação fora do intervalo de validade da norma.

Tabela 10 – Comparação entre os fatores de correção para vigas com entalhes de largura 5 cm

c (cm)	h1 (cm)	Sxy (kN/cm ²)	Sxy_t (kN/cm ²)	Sxy/ Sxy_t	Fator de correção ABNT	Fator de correção NDS	Fator de correção NCh 1198
5,00	2,00	0,10	0,03	2,93	1,15	1,33	1,33
5,00	3,00	0,15	0,04	4,17	1,25	1,56	1,56
5,00	4,00	0,20	0,04	5,14	1,36	1,86	1,86
5,00	5,00	0,25	0,04	5,89	1,50	2,25	2,25
5,00	6,00	0,30	0,05	6,38	1,67	2,78	2,78
5,00	7,00	0,35	0,05	6,63	1,88	3,52	3,52

Nota: valores com coloração reduzida indicam situação fora do intervalo de validade da norma.

Percebeu-se, que em todos os casos, os fatores de correção do trabalho foram maiores do que os propostos pelas normas analisadas, ficando o da norma ABNT NBR 7190:1997 mais crítico. Entretanto, dentre os casos analisados, os únicos permitidos pelas normas NDS (ANSI, 2005) e INN NCh 1198:2006, de acordo com as limitações de dimensões de entalhe, seriam vigas com entalhe de altura 2 cm e largura 5 cm, nos quais nenhum dos parâmetros obtidos pelas simulações numéricas ultrapassou os limites de resistência do material.

Os casos permitidos pela norma ABNT NBR 7190:1997, dentre os analisados, seriam vigas com entalhes de alturas 2 cm e 3 cm, porém, para os carregamentos analisados, o parâmetro S_x na quina em vigas com entalhes a partir de 3 cm de altura extrapolaram o limite de resistência da madeira para todas as larguras analisadas, indicando que seria interessante a norma brasileira adotar a limitação de altura de entalhe semelhante à das normas NDS (ANSI, 2005) e INN NCh 1198:2006.

CONCLUSÕES

Depois da modelagem das vigas, as conclusões obtidas foram as seguintes:

- A tensão cisalhante máxima S_{xy} nas simulações, não ocorre no ponto médio da seção transversal reduzida pelo entalhe, como indica a teoria clássica da Resistência dos Materiais, e sim na quina do mesmo;
- Para alturas de entalhe a partir de 4 cm, a tensão mínima da viga começa a ocorrer na região do entalhe, e isso se deve à redução da seção transversal residual, fazendo com que a compressão paralela às fibras se torne mais crítica naquela região do que no meio do vão, ficando mais propensa à falhas;
- Os valores teóricos de tensão normal S_x na quina se apresentaram consideravelmente inferiores aos simulados, e isso ocorre em função do entalhe estar na face tracionada das vigas, o que acaba causando maior

perturbação nas tensões nesta região, além de que a posição do entalhe não é levada em conta nas fórmulas clássicas;

- Entalhes no treço extremo não influenciaram as tensões normais no meio do vão da viga, que apresentaram valores muito próximos aos da viga cheia, porém influenciaram nos deslocamentos desta mesma região;
- Os valores teóricos das tensões cisalhantes foram consideravelmente inferiores aos valores das simulações, mesmo multiplicados pelo fator de correção proposto pela ABNT NBR 7190:1997, mostrando insuficiência do fator para estes casos;
- Os deslocamentos verticais no meio do vão aumentaram proporcionalmente ao aumento da largura do entalhe, devido à maior redução de material da viga dada pela largura, o que não é considerado nas fórmulas da teoria clássica da Resistência dos Materiais;
- Para as limitações de dimensões de entalhe da ABNT NBR 7190:1997, em algumas situações o parâmetro S_x na quina excedeu o limite de resistência da madeira, indicando que a norma deveria adotar critérios de limitação de dimensões semelhantes aos da norma NDS (ANSI, 2005) e INN NCh 1198:2006.

Pode-se concluir que é de fundamental importância considerar a perturbação no fluxo de tensões causada por entalhes em vigas de madeira, a fim de se garantir o correto dimensionamento da viga pela avaliação apropriada do comportamento mecânico da estrutura e, conseqüentemente, garantir a segurança da edificação, pois a capacidade de carga das vigas será consideravelmente reduzida.

Quanto ao ponto de singularidade na estrutura a ser modelada, como o canto vivo da quina do entalhe, é imprescindível que este seja tratado adequadamente nas simulações numéricas, principalmente por meio da consideração da não linearidade física do material para esta região. Vale mencionar que os resultados de uma análise linear elástica, neste caso, são válidos na medida em que as deformações plásticas do material são pequenas.

AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem à CAPES pelo apoio financeiro durante parte do trabalho.

REFERÊNCIAS

ANSI – AMERICAN NATIONAL STANDARDS INSTITUTE. **NDS**: National Design Specification for wood construction. Washington, D. C., 2005.
ANSYS 15.0.7 Notice. Computational Applications and System Integration Inc., 2013.
ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 7190**: Projeto de estruturas de madeira. Rio de Janeiro, 1997.

COOK, R. D. **Finite Element Modeling for Stress**

Analysis. Madison: John Wiley & Sons, 1995.

CORDOVIL, F. A. B.; RIZZO, I. M. L. **Vigas entalhadas**. In: VIII ENCONTRO BRASILEIRO EM MADEIRA E ESTRUTURAS DE MADEIRA, julho de 2002, Uberlândia. **Anais...** Uberlândia, 2002, 10 p.

CSA – ASSOCIATION CANADIENNE DE NORMALISATION. **CSA O86-09**: Règles de calcul des charpentes en bois. Ontario, 2010.

EUROCODE – EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDIZATION. **Eurocode 5**: Design of timber structures – Part 1-1: General - Common rules and rules for buildings. Brussels, 2004.

FAHERTY, K. F.; WILLIAMSON, T. G. **Wood engineering and construction**. 3.ed. Boston: McGraw Hill, 1999.

FOLIENSTE, G. C.; McLAIN, T. E. Design of notched wood beams. **Journal of Structural Engineering**, v. 118, n. 9, p. 2407-2420, 1992. [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-9445\(1992\)118:9\(2407\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:9(2407)).

INSTITUTO NACIONAL DE NORMALIZACIÓN – INN. **NCh 1198:2006** – Madera: Construcciones en madera – Cálculo. Santiago, 2006.

JOCKWER, R. **Structural behavior of glued laminated timber beams with unreinforced and reinforced notches**. ETH Zurich, Zurich, 2014, 166 p.

JOCKWER, R.; STEIGER, R.; FRANGI, A. State-of-the-art review on approaches for the design of timber beams with notches. **Journal of Structural Engineering**, v. 140, n. 3, p. 01-13, 2014.

MASUDA, M. **Application of the Finite Small Area Fracture Criteria to Bending of Beams with End Sloped Notches**. Proceedings of International Wood Engineering Conference, 1996, New Orleans, USA, v. 4, p. 136-143.

PFEIL, W.; PFEIL, M. **Estruturas de Madeira**. 6.ed. Rio de Janeiro: Livros Técnicos e Científicos, 2003.

PORTEOUS, J.; KERMANI, A. **Structural Timber Design to Eurocode 5**. Oxford: Blackwell Science, 2007. <http://dx.doi.org/10.1002/9780470697818>.