

## OBTENÇÃO DE UM ELEMENTO DE VIGA UNIFICADO COM A UTILIZAÇÃO DA FORMULAÇÃO CORROTACIONAL E O PRINCÍPIO DOS TRABALHOS VIRTUAIS COMPLEMENTARES

*DEDUCING A SHEAR FLEXIBLE BEAM ELEMENT USING THE CO-ROTATIONAL FORMULATION AND THE PRINCIPLE OF COMPLEMENTARY VIRTUAL WORK*

**William Taylor Matias Silva<sup>1</sup>, Maria Paz Duque Gutiérrez<sup>2</sup>, Gabriel Costa de Oliveira<sup>3</sup>**

Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília, DF.

<sup>1</sup>Doutor em Engenharia Civil, E-mail: taylor@unb.br

<sup>2</sup>Mestre em Engenharia Civil. E-mail: mpazduque@gmail.com

<sup>3</sup>Mestre em Engenharia Civil. E-mail: bielcostadeoliveira@gmail.com.

### RESUMO

Neste trabalho é descrito um modelo de elemento finito de viga unificado que não apresenta bloqueio por deformação a corte e engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Obtém-se a matriz de rigidez unificada desse elemento utilizando a formulação corrotacional que se baseia na separação dos modos de corpo rígido dos modos deformacionais e da aplicação do princípio dos trabalhos virtuais complementares. Implementa-se a matriz de rigidez em um programa de elementos finitos para a análise linear de pórticos planos. São mostrados os resultados de exemplos numéricos nos quais se constata a inexistência de travamento ao cisalhamento.

**Palavras-chave:** Descrição corrotacional, Princípios dos trabalhos virtuais complementares, Elemento de viga unificado.

### ABSTRACT

In this work is described a shear flexible beam element model without shear locking and integrating Euler-Bernoulli's and Timoshenko's beam theories. The unified stiffness matrix of this beam is obtained by using the co-rotational formulation that is based on the separation of displacement fields into rigid body modes and deformation modes. The principle of complementary virtual work is also used for finding the unified stiffness matrix. The stiffness matrix is then implemented in a finite element software for linear analysis of plane frames. Some examples are presented and numerical results demonstrate that a shear flexible beam element do not show shear locking effects.

**Keywords:** Co-rotational approach, Complementary virtual work, Shear flexible beam element.

### 1 – INTRODUÇÃO

Neste trabalho é descrito um modelo de elemento finito de viga 2D que contempla as teorias de Euler-Bernoulli e de Timoshenko e que não apresenta bloqueio por deformação a corte. Em primeiro lugar, na descrição cinemática deste elemento finito propõe-se a separação dos deslocamentos de corpo rígido, translações e rotações, dos deslocamentos deformacionais. Em seguida é necessário definir os modos de deformações do elemento. Neste trabalho é seguida a proposição metodológica descrita em Argyris *et al.* (1979) e que posteriormente foi utilizada, por exemplo, em um artigo publicado por Krenk (1994). Para o elemento de viga aqui descrito, os modos de deformações são bastante simples. O primeiro modo de deformação é obtido considerando o elemento sujeito a um estado de flexão pura, isto é, sem esforço cortante. Esse modo define uma elástica simétrica com rotações deformacionais  $\theta_s$ , nas extremidades do elemento, de mesmo módulo e sentido contrário. Por esta razão, é denominado de modo simétrico de deformação, enquanto que o segundo modo de deformação é obtido aplicando-se nas

extremidades do elemento um momento fletor  $M_a$  de mesmo módulo e de mesmo sentido o que gera um estado de cisalhamento constante e uma elástica antissimétrica, daí a denominação de modo antissimétrico de deformação. Argyris *et al.* (1979) definiram esses modos de deformações como modo de deformações naturais. Portanto, assume-se que qualquer modo de deformação do elemento de viga 2D será obtido pela superposição dos modos de deformações naturais. A partir dos modos de deformações naturais e da aplicação do Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares, que a rigor se trata do 2º Teorema de Castigliano, obtém-se a matriz de rigidez unificada do elemento que leva em consideração o efeito do esforço cortante. É importante destacar que o efeito do esforço cortante aparece naturalmente quando se aplica o Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares para o modo de deformação antissimétrico, como será mostrado na Seção 3 deste trabalho. Desta maneira, obtém-se um elemento finito de viga unificado que não apresenta bloqueio por deformação a corte e engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Pode-se destacar como uma das principais contribuições deste trabalho a aplicação da

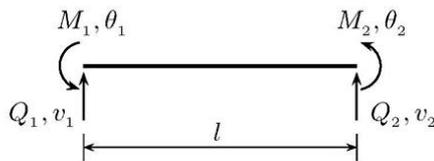
cinemática corrotacional juntamente com os modos de deformações naturais para a obtenção da matriz de rigidez unificada. Esse procedimento leva a um desenvolvimento algébrico bastante simples quando comparado com outras teorias de vigas unificadas como, por exemplo, as descritas em Reddy (1997). Cabe comentar que a matriz de rigidez, levando em conta o efeito de cisalhamento, também pode ser obtida aplicando o método das forças para uma viga engastada reta de seção transversal constante, vide Soriano (2005).

Por outro lado, a representação dos deslocamentos e rotações por meio de interpolações lineares introduz uma gama de aproximações, dentre as quais, provavelmente, uma das mais importantes é o travamento por cisalhamento. Este fenômeno é muito conhecido para muitas classes de elementos finitos de vigas, de placas e de cascas cuja formulação baseia-se em translações e rotações. Neste trabalho este fenômeno será ilustrado levando em conta os modos deformacionais simétrico e antissimétrico proposto para o elemento de viga 2D e pela utilização de interpolações lineares para as rotações. Essa metodologia está descrita de maneira sucinta em Krenk (2009). A seguir, descrevem-se algumas técnicas para evitar o travamento por corte no elemento de viga e ao mesmo tempo obtém-se algumas matrizes de rigidez decorrentes dessas técnicas. Demonstra-se que uma das correções propostas obtém a mesma matriz de rigidez unificada descrita neste trabalho. Finalmente, essas matrizes são implementadas em um programa computacional de elementos finitos para análises lineares estáticas de pórticos planos, por meio do qual pode ser mostrado que não ocorre o travamento por corte, constatado em três exemplos numéricos apresentados.

## 2 – DESCRIÇÃO CINEMÁTICA CORROTACIONAL

Seja um elemento finito de viga com quatro graus de liberdade, conforme mostrado na Figura 1.

Figura 1 – Elemento finito de viga 2D



O vetor de deslocamentos nodais é descrito pela Equação 1:

$$\mathbf{u}^T = (v_1, \theta_1, v_2, \theta_2) \quad (1)$$

Em que:  $v_1$  e  $v_2$  são as translações e  $\theta_1$  e  $\theta_2$  são as rotações das extremidades do elemento, conforme mostrado

na Figura 2a. Cabe destacar, que os deslocamentos nodais contêm tanto os modos de corpo rígido quanto os modos deformacionais do elemento de viga. Os modos de corpo rígido do elemento de viga são definidos pela Equação 2.

$$\mathbf{u}_r^T = (v_r, \theta_r) \quad (2)$$

Em que:  $v_r$  é a translação de corpo rígido dada por  $v_r = v_1$  considerando o nó inicial do elemento como referência.  $\theta_r$  é a rotação de corpo rígido, definida como positiva no sentido anti-horário conforme mostra-se na Figura 2a. Admitindo que as translações nodais  $v_1$  e  $v_2$  sejam pequenas, pode-se definir a rotação de corpo rígido como  $\theta_r = \frac{v_2 - v_1}{l}$ . Por outro lado, as rotações deformacionais do elemento são dadas por  $\bar{\theta}_1 = \theta_1 - \theta_r$  e  $\bar{\theta}_2 = \theta_2 - \theta_r$  respectivamente, conforme mostra-se na Figura 2a. Além disso, conforme mostra-se na Figura 2b, os modos de deformações naturais são definidos pela rotação nodal simétrica  $\theta_s$  e pela rotação nodal antissimétrica  $\theta_a$  respectivamente. Portanto, os deslocamentos deformacionais do elemento serão dados pela Equação 3.

$$\mathbf{u}_d^T = (\theta_s, \theta_a) \quad (3)$$

Para obter as rotações nodais correspondentes aos modos de deformações naturais, parte-se das seguintes relações,  $-\theta_s + \theta_a = \theta_1 - \theta_r$  e  $\theta_s + \theta_a = \theta_2 - \theta_r$ , definidas nos nós 1 e 2, respectivamente. Conseqüentemente, obtém-se as duas relações indicadas nas Equações 4a e 4b:

$$\theta_s = \frac{1}{2}(\theta_2 - \theta_1) \quad (4a)$$

$$\theta_a = \frac{1}{2}(\theta_2 + \theta_1) - \frac{1}{l}(v_2 - v_1) \quad (4b)$$

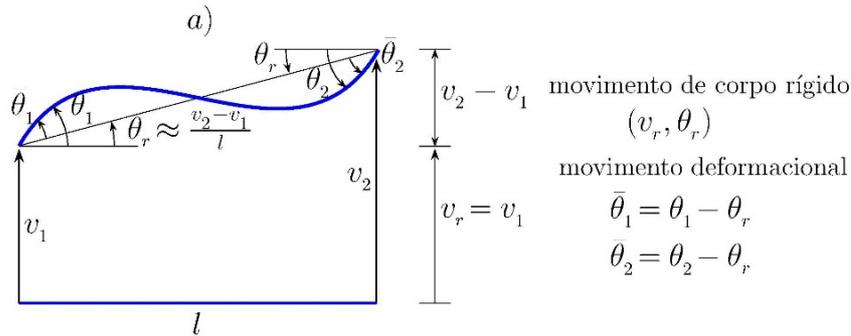
A relação entre os deslocamentos deformacionais e os deslocamentos nodais pode, então ser escrita pela relação matricial  $\mathbf{u}_d = \mathbf{B}\mathbf{u}$ , na qual  $\mathbf{B}$  é a matriz de transformação dada na Equação 5.

$$\begin{Bmatrix} \theta_s \\ \theta_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & -\frac{l}{2} & 0 & \frac{l}{2} \\ 1 & \frac{l}{2} & -1 & \frac{l}{2} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (5)$$

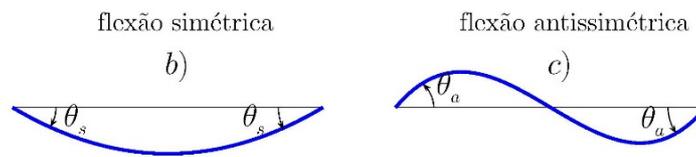
Conforme é mostrado na Figura 2b a rotação simétrica  $\theta_s$  caracteriza-se por rotações idênticas nos nós e de sentidos contrários, enquanto que a rotação antissimétrica  $\theta_a$  por rotações nodais iguais e de mesmo sentido. Na Seção 3 será obtida a matriz de rigidez do elemento de viga levando em consideração o estado de esforços internos gerados pelos modos deformacionais gerados por  $\theta_s$  e  $\theta_a$  respectivamente.

Obtenção de um elemento de viga unificado utilizando a formulação corrotacional e o princípio dos trabalhos virtuais complementares

Figura 2 – Elemento de viga 2D: a) Configuração deformada; b) Modo de deformação simétrico; c) Modo de deformação antissimétrico



modos naturais de deformação

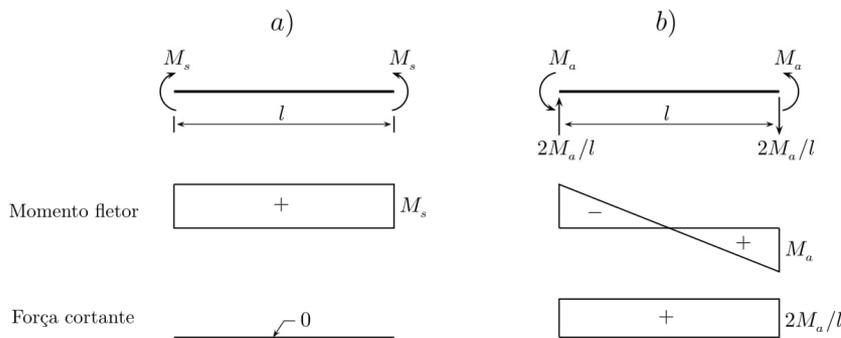


3 – MATRIZ DE RIGIDEZ UNIFICADA

Conforme mostrado na Figura 3a, o modo deformacional simétrico gera um estado de flexão pura cujos momentos nodais  $M_s$  são iguais e têm sentidos contrários. No estado de flexão pura o momento fletor é constante, conseqüentemente o esforço cortante é nulo, isto é,  $Q = 0$ . No entanto, na Figura 3b observa-se que o modo deformacional antissimétrico gera

um estado de flexão simples cujos momentos nodais  $M_a$  são iguais e possuem sentidos iguais resultando em um diagrama de momento fletor linear. O estado de flexão simples resulta em um esforço de cisalhamento constante no valor de  $Q = 2M_a/l$ .

Figura 3 – Diagramas de esforços internos: a) Flexão simétrica; b) Flexão antissimétrica



Para determinar as rotações simétricas  $\theta_s$  nos nós aplica-se um par de momentos virtuais simétricos  $\delta M_s = 1$  em ambos os nós do elemento, enquanto que para as rotações antissimétricas  $\theta_a$  aplica-se um par de momentos virtuais antissimétricos  $\delta M_a = 1$ , respectivamente. O trabalho virtual externo é igual em cada nó, e as rotações nodais podem ser obtidas por meio do princípio dos trabalhos virtuais complementares dado pelas Equações 6a e 6b:

$$2\theta_s = \int_0^l \frac{\delta M_s(x) M_s(x)}{EI} dx = \frac{M_s l}{EI} \quad (6a)$$

$$2\theta_a = \int_0^l \left( \frac{\delta M_a(x) M_a(x)}{EI} + \frac{\delta Q_a(x) Q_a(x)}{GA_0} \right) dx = \frac{M_a l}{3EI} + \frac{4M_a l}{GA_0 l^2} \quad (6b)$$

Para obter os resultados anteriores foram utilizados as funções  $M_s(x)$  e  $M_a(x)$  e suas respectivas variações virtuais  $\delta M_s(x)$  e  $\delta M_a(x)$  detalhadas na Tabela 1.

Tabela 1 – Variação virtual dos esforços internos em relação a  $M_s$  e  $M_a$ , respectivamente

| Flexão simétrica  |   |
|---|---|
| $M(x) = M_s$  |   |
| $\delta M(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial M_s} \delta M_s = 1 \delta M_s;$                             | $\delta M_s = 1 \therefore \delta M(x) = 1$                             |
| Flexão antissimétrica   |   |
| $M(x) = \left(\frac{2x}{l} - 1\right) M_a$  |   |
| $\delta M(x) = \frac{\partial M(x)}{\partial M_a} \delta M_a = \left(\frac{2x}{l} - 1\right) \delta M_a,$ | $\delta M_a = 1 \therefore \delta M(x) = \left(\frac{2x}{l} - 1\right)$ |
| $Q(x) = \frac{dM(x)}{dx} = \frac{2M_a}{l}$  |   |
| $\delta Q(x) = \frac{\partial Q(x)}{\partial M_a} \delta M_a = \frac{2}{l} \delta M_a,$                   | $\delta M_a = 1 \therefore \delta Q(x) = \frac{2}{l}$                   |

Dessa maneira, os coeficientes de flexibilidade do elemento de viga contêm duas relações dadas na Equação 7.

$$\theta_s = \frac{M_s l}{EI}, \quad \theta_a = (1 + \Phi) \frac{M_a l}{6EI} \quad (7)$$

Em que o efeito da deformação de cisalhamento é determinada pelo parâmetro adimensional  $\Phi$  indicado na Equação 8.

$$\Phi = \frac{12EI}{GA_0 l^2} \quad (8)$$

Em que:  $A_0$  é a área da seção transversal corrigida pelo fator de forma que leva em conta o efeito da distribuição das tensões cisalhamento na seção transversal. Por exemplo, para seções retangulares este valor é 5/6, enquanto que para seções I,  $A_0$  é aproximadamente igual à área da alma. Para a especificação de fatores de forma de outras formas de seções transversais, vide Roark e Young (1976). Nos exemplos numéricos aqui descritos será adotado o valor  $A_0 = \frac{5}{6}A$ . Note-se que para a hipótese de Bernoulli,  $\Phi = 0$ .

Escreve-se o vetor de forças nodais  $f^T = (Q_1, M_1, Q_2, M_2)$  em função dos momentos fletores simétricos e antissimétricos de acordo com seus sentidos definidos na Figura 3 e com os sentidos dos graus de liberdade do elemento de viga definidos na Figura 1. Portanto, chega-se à Equação 9.

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{EI}{(1 + \Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4 + \Phi)l^2 & -6l & (2 - \Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2 - \Phi)l^2 & -6l & (4 + \Phi)l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} v_1 \\ \theta_1 \\ v_2 \\ \theta_2 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Em forma compacta a Equação 12 pode ser escrita como  $f = K \cdot u$ , na qual  $K$  é a matriz de rigidez do elemento de viga definido na Figura 1, cujos coeficientes são dados na Equação 12. Observa-se que a matriz leva em consideração a hipótese

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 2M_a/l \\ -M_s + M_a \\ -2M_a/l \\ M_s + M_a \end{Bmatrix} = \frac{1}{l} \begin{bmatrix} 0 & 2 \\ -l & l \\ 0 & -2 \\ l & l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_s \\ M_a \end{Bmatrix} \quad (9)$$

Por outro lado, usando a Equação 7 obtém-se a Equação 10.

$$M_s = \frac{2EI}{l} \theta_s; \quad M_a = \frac{1}{(1 + \Phi)} \frac{6EI}{l} \theta_s \quad (10)$$

Dessa maneira, o vetor de forças nodais pode ser escrito em função dos modos deformacionais definidos na Figura 2b. Então, são substituídos os valores de  $M_s$  e  $M_a$ , dados pela Equação 10 na Equação 9, e chega-se à Equação 11.

$$\begin{Bmatrix} Q_1 \\ M_1 \\ Q_2 \\ M_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{(1 + \Phi)l^2} \begin{bmatrix} 0 & 6 \\ -(1 + \Phi)l & 3l \\ 0 & -6 \\ (1 + \Phi)l & 3l \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_s \\ \theta_a \end{Bmatrix} \quad (11)$$

Por fim, para obter a matriz de rigidez do elemento de viga definido na Figura 1 expressa-se o vetor de forças nodais em função dos deslocamentos nodais. Assim, substituindo os valores de  $\theta_s$  e  $\theta_a$ , dados pela Equação 5 na Equação 11, obtém-se a Equação 12:

de Bernoulli e o efeito da deformação por cisalhamento por meio do parâmetro  $\Phi$ . Na Seção 4 será demonstrado que a matriz de rigidez não introduz o efeito de bloqueio por deformação de corte. É importante destacar o uso da

metodologia de separação do movimento de corpo rígido do movimento deformacional do elemento de viga para a obtenção da matriz de rigidez. Em seguida, definem-se os esforços internos resultantes dos modos de deformação simétrico e antissimétrico, respectivamente. Aplica-se o princípio dos trabalhos virtuais complementares para obter os coeficientes de flexibilidade e, por fim, os coeficientes de rigidez. Krenk (1994) utilizou essa abordagem para obter a matriz de rigidez de vigas de altura variável e de vigas curvas, além de incluir o efeito do esforço cortante na obtenção dos coeficientes de rigidez desses elementos. É importante ressaltar que esta matriz pode ser obtida aplicando o método das forças para uma viga biengastada resta de seção transversal constante, vide Soriano (2005).

#### 4 – BLOQUEIO POR CISALHAMENTO

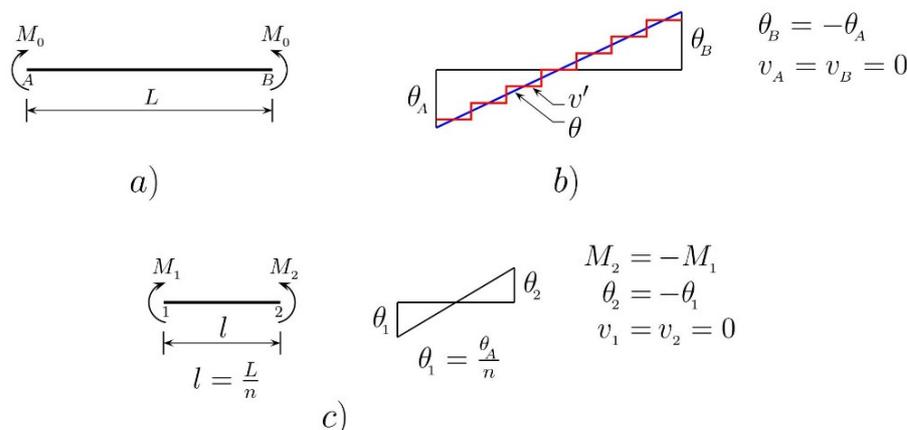
A representação dos deslocamentos e rotações por meio de interpolações lineares introduz um número de aproximações, dentre as quais provavelmente uma das mais importantes é o travamento por cisalhamento. Este fenômeno, que é muito conhecido para muitas classes de elementos finitos de vigas, de placas e de cascas, cuja formulação baseia-se em translações e rotações, será ilustrado aqui por meio de um simples elemento de viga 2D. Portanto, considera-se uma viga biapoada sob flexão pura conforme mostra-se na Figura 4a, conseqüentemente esta viga estará sujeita a um estado de cisalhamento nulo. Por outro lado, a curvatura e a deformação de cisalhamento são dadas na Equação 13.

$$\kappa = \theta'; \quad \gamma = v' - \theta \quad (13)$$

Com essas medidas de deformações, a energia elástica armazenada da viga biapoada é escrita como indicado na Equação 14.

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L (EI\kappa^2 + GA_0 \gamma^2) dx \quad (14)$$

Figura 4 – a) Viga biapoada sob flexão pura; b) Distribuições linear e de função degrau de rotações no intervalo de [0,L]; c) Elemento finito de viga sob flexão pura com nós indeslocáveis



Em que  $A_0$  é a área da seção transversal corrigida pelo fator de forma que leva em conta a distribuição das tensões de cisalhamento como definido. O problema do travamento por cisalhamento surge devido ao segundo termo da Equação 14, uma vez que o mesmo não é capaz de representar um estado de cisalhamento nulo se as variáveis  $v'(x)$  e  $\theta(x)$  são interpoladas linearmente.

Seja a viga biapoada de comprimento  $L$  discretizada em  $n$  elementos idênticos de comprimento  $l = L/n$  sujeitos a flexão pura conforme mostra-se na Figura 4c. Para cada elemento a translação  $v(x)$  e a rotação  $\theta(x)$  são interpoladas linearmente em função dos respectivos valores nodais. Os valores exatos da curvatura  $\kappa = \theta'$  e das rotações nodais da viga biapoada são dadas na Equação 15.

$$\kappa = \theta' = \frac{M_0}{EI}, \quad \theta_A = -\theta_B = \frac{M_0 L}{2EI} \quad (15)$$

Na Figura 4b é mostrada a função linear de  $\theta(x)$  no intervalo de  $[0, L]$ . Devido a interpolação linear de  $v(x)$  em cada elemento, a sua derivada  $v'(x)$  será constante. No presente caso cada elemento deforma-se simetricamente, desta maneira a função  $v'(x)$  intercepta a função  $\theta(x)$  na metade de cada elemento como mostra-se a Figura 4b. Dentro do intervalo  $[0, L]$ , a função  $v'(x)$  é representada por uma função degrau, como conseqüência a deformação por cisalhamento  $\gamma = v' - \theta$  é diferente de zero em cada elemento, enquanto que a solução exata é dada por  $\gamma = 0$ . Portanto, o segundo termo da energia de deformação, para o caso de flexão pura, deveria anular-se, isto é,  $\frac{1}{2} \int_0^L GA_0 \gamma^2 dx = 0$ . Este fato acontece devido às variáveis  $v(x)$  e  $\theta(x)$  terem sido interpoladas linearmente o que acarreta o travamento por cisalhamento.

Para calcular uma expressão aproximada da energia de deformação da viga discretizada em  $n$  elementos, as variáveis  $v(x)$  e  $\theta(x)$  para cada elemento serão interpoladas linearmente como indicadas nas Equações 16a e 16b:

$$\theta = \left(1 - \frac{x}{l}\right)\theta_1 + \frac{x}{l}\theta_2 \quad (16a)$$

$$v = \left(1 - \frac{x}{l}\right)v_1 + \frac{x}{l}v_2 \quad (16b)$$

Desta maneira, a curvatura e a deformação de cisalhamento são dadas pelas Equações 17a, 17b e 17c:

$$\kappa = \frac{d\theta}{dx} = \frac{\theta_2 - \theta_1}{l} = \frac{2\theta_1}{l} \quad (17a)$$

$$v' = \frac{dv}{dx} = \frac{v_2 - v_1}{l} = 0, \text{ com } v_2 = v_1 = 0 \quad (17b)$$

$$\gamma = v' - \theta = \left(1 - \frac{2x}{l}\right)\theta_1 \quad (17c)$$

Lembrar que a razão  $\theta_A/n$  representa a proporcionalidade entre  $\theta_A$  e  $\theta_1$  conforme mostra-se na Figura 4c. Substituindo as Equações 17a e 17c na Equação 14 chega-se à Equação 18.

$$U_{aprox} = \frac{1}{2}n \int_0^l EI \left(\frac{2\theta_1}{l}\right)^2 dx + \frac{1}{2}n \int_0^l GA_0 \left(1 - \frac{2x}{l}\right)^2 \theta_1^2 dx \quad (18)$$

$$U_{aprox} = \frac{1}{2}EIL \left(\frac{2\theta_A}{L}\right)^2 + \frac{1}{6}GA_0L \left(\frac{\theta_A}{n}\right)^2$$

O primeiro termo representa o valor exato, enquanto que o segundo termo é uma consequência indesejável devido à inconsistência na representação da deformação de cisalhamento. É conveniente escrever este resultado de acordo com a Equação 19.

$$U_{aprox} = \left(1 + \frac{1}{n^2\Phi_L}\right) U_{exata} \quad (19)$$

Em que  $\Phi_L$  é um parâmetro de cisalhamento adimensional da viga biapoçada dado pela Equação 20.

$$\Phi_L = \frac{12EI}{L^2GA_0} \quad (20)$$

Para viga de Bernoulli a rigidez ao cisalhamento é infinita, o que implica em  $\Phi_L = 0$ . Portanto, conclui-se que a interpolação linear para as translações e rotações não reproduzem a hipótese de Bernoulli para vigas. Por outro lado, observa-se que o efeito de bloqueio por cisalhamento no caso de flexão pura depende do parâmetro  $n^2\Phi_L$ , que é o fator de cisalhamento de um elemento individual, e é dado pela Equação 21.

$$\phi = n^2\Phi = \frac{12EI}{l^2GA_0} \quad (21)$$

Trata-se do mesmo parâmetro obtido na Seção 3, dado pela Equação 8. Nota-se pela Equação 19 que este fator introduz um aumento artificial na rigidez da viga biapoçada sob flexão pura e que este erro decresce com  $n^{-2}$ , porém, é indesejável o uso de muitos elementos para obter a solução de um simples problema de viga.

A seguir são descritas, de maneira sucinta, técnicas para evitar o travamento por deformação de cisalhamento. Segundo Krenk (2009) há, basicamente, três técnicas para evitar o travamento por cisalhamento em elementos finitos com formulação em deslocamentos. Para o elemento de viga sob flexão pura aqui descrito é suficiente adotar uma interpolação linear para  $\theta(x)$  e uma interpolação quadrática para  $v(x)$  pois representaria de maneira consistente a deformação de

cisalhamento, isto é,  $\gamma = v' - \theta = 0$ . Para teoria de vigas mais abrangente pode-se evitar o travamento com a introdução de um nó no centro do elemento para os graus de liberdades translacionais ou a adoção de um modo de deformação adicional, que posteriormente é eliminado em nível de elemento. Essa técnica é descrita, por exemplo, em Ibrahimbegović (1995). A segunda técnica é a utilização da integração reduzida que é adotada para não levar em conta certas contribuições para o cálculo da matriz de rigidez do elemento. Esta técnica, por exemplo, está descrita em Hughes (1997). Para o exemplo descrito na Seção 3, esta técnica corresponde a avaliar a deformação por cisalhamento no centro do elemento. Portanto, é mostrado, na Figura 4b, que as contribuições indesejadas de deformação de cisalhamento não seriam computadas para a avaliação da energia de deformação do elemento. A terceira estratégia consiste em modificar os coeficientes de rigidez para compensar os erros introduzidos pelas interpolações lineares de  $\theta(x)$  e de  $v(x)$ . A seguir são obtidos os coeficientes de rigidez à flexão e ao cisalhamento modificados  $\bar{EI}$  e  $\bar{GA}_0$ , respectivamente, para o elemento de viga com interpolação linear.

Para elementos de vigas são utilizados os esforços internos gerados pelos modos de deformação simétricos e antissimétricos, apresentados na Figura 3, para obter os coeficientes de rigidez modificados. O modo antissimétrico será analisado primeiro. Como pode-se observar na Figura 3b e na Tabela 1, o momento fletor varia linearmente de  $-M_a$  a  $M_a$ , enquanto o esforço cortante é constante e vale  $Q = 2M_a/l$ . Desta maneira, a energia de deformação é dada pela Equação 22.

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^l \left( \frac{M^2(x)}{EI} + \frac{Q^2(x)}{GA_0} \right) dx = \frac{M_a^2 l}{6EI} + \frac{2M_a^2}{GA_0 l} \quad (22)$$

A Equação 22 pode ser reescrita como a Equação 23.

$$U_{exata} = \frac{6}{(1+\Phi)} \frac{EI}{l} \theta_a^2 \quad (23)$$

Na qual o parâmetro de cisalhamento é dado por  $\Phi = 12EI/GA_0l^2$ . Observe que este parâmetro já foi definido nas

Obtenção de um elemento de viga unificado utilizando a formulação corrotacional e o princípio dos trabalhos virtuais complementares

Seções 3 e 4 pelas Equações 8 e 21, respectivamente. A energia de deformação pode ser expressa em função das rotações nodais  $\theta_a$  por meio da relação  $2\theta_a = \partial U / \partial M_a$ , na qual o fator 2 corresponde a igual contribuição do momento fletor  $M_a$  aplicado nas extremidades do elemento. Assim, substituindo esta relação na Equação 23 chega-se à Equação 24.

$$U_{exata} = \frac{6}{(1+\Phi)} \frac{EI}{l} \theta_a^2 \quad (24)$$

Calcula-se, agora, a energia de deformação aproximada utilizando a Equação 14 com o parâmetro  $\overline{GA}_0$  corrigido com a finalidade de representar a flexão antissimétrica utilizando interpolação linear. Como o esforço cortante, para este caso, é constante, consequentemente a deformação por cisalhamento é constante, isto é,  $\gamma = cte$ . De acordo com as Equações 13 e 17b isto implica em  $\theta = cte$  e  $\theta' = 0$ , portanto o primeiro termo da Equação 14 é nulo, o que leva à Equação 25.

$$U_{aprox} = \frac{1}{2} \int_0^l \overline{GA}_0 \theta^2(x) dx = \frac{\overline{GA}_0 l}{2} \theta_a^2 \quad (25)$$

Para determinar o parâmetro  $\overline{GA}_0$  impõe-se que as duas expressões da energia de deformação, Equações 24 e 25, sejam idênticas. Desta maneira, o coeficiente de rigidez ao cisalhamento equivalente é escrito conforme a Equação 26.

$$\overline{GA}_0 = \frac{\Phi}{1+\Phi} GA_0 \quad (26)$$

O procedimento para a análise da flexão simétrica é similar. Neste caso, o momento fletor é constante e o estado de cisalhamento é nulo, desta maneira a expressão exata da energia de deformação é escrita conforme a Equação 27.

$$U_{exata} = \frac{1}{2} \int_0^l \frac{M^2(x)}{EI} dx = \frac{M_s^2 l}{2EI} \quad (27)$$

O ângulo nas extremidades do elemento é calculado pela relação  $2\theta_s = \partial U / \partial M$ , aplicando tal relação na Equação 27, chega-se à Equação 28.

$$U_{exata} = \frac{2EI}{l} \theta_s^2 \quad (28)$$

Calcula-se, agora, a energia de deformação aproximada utilizando as Equações 14 e 17 e os coeficientes de rigidez modificados  $\overline{EI}$  e  $\overline{GA}_0$ , obtendo-se a Equação 29.

$$U_{aprox} = \frac{1}{2} \int_0^l (\overline{EI} \kappa^2(x) + \overline{GA}_0 \gamma^2(x)) dx = \left( \frac{2\overline{EI}}{l} + \frac{1}{6} \overline{GA}_0 l \right) \theta_s^2 \quad (29)$$

O parâmetro  $\overline{EI}$  é selecionado impondo que as expressões da energia de deformação dadas pelas Equações 28 e 29 sejam idênticas quando se utiliza o valor de  $\overline{GA}_0$  dado pela Equação 26. Dessa maneira, este parâmetro corrigido é escrito de acordo com a Equação 30.

$$\overline{EI} = \frac{\Phi}{1+\Phi} EI \quad (30)$$

Observa-se que esse procedimento leva a fatores de correção idênticos para os coeficientes de rigidez  $EI$  e  $GA_0$ . Em elementos finitos é usual obter as matrizes de rigidez por meio da integração numérica. A matriz de rigidez do elemento pode ser obtida a partir da expressão da energia de deformação escrita em forma matricial de acordo com a Equação 31.

$$U = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} \quad (31)$$

Em que  $\mathbf{u}$  é o vetor de deslocamentos nodais definidos na Equação 1. Usando a interpolação linear dada na Equação 17 e a integração completa da energia de deformação expressa pela Equação 14, obtém-se a matriz de rigidez dada pela Equação 32.

Por outro lado, usando a interpolação linear dada na Equação 17 e apenas um ponto de Gauss no meio do elemento para integrar a energia de deformação expressa pela Equação 14, obtém-se a matriz de rigidez dada pela Equação 33.

Substituindo os parâmetros  $\overline{GA}_0$  e  $\overline{EI}$  dados pelas Equações 26 e 30, respectivamente, na expressão da matriz de rigidez dada pela Equação 33, chega-se à Equação 34.

$$\mathbf{K} = \frac{\overline{EI}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{GA}_0}{6l} \begin{bmatrix} 6 & 3l & -6 & 3l \\ 3l & 2l^2 & -3l & 2l^2 \\ -6 & -3l & 6 & -3l \\ 3l & l^2 & -3l & 2l^2 \end{bmatrix} \quad (32)$$

$$\mathbf{K} = \frac{\overline{EI}}{l} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \frac{\overline{GA}_0}{4l} \begin{bmatrix} 4 & 2l & -4 & 2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \\ -4 & -2l & 4 & -2l \\ 2l & l^2 & -2l & l^2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

$$\mathbf{K} = \frac{EI}{(1+\Phi)l^3} \begin{bmatrix} 12 & 6l & -12 & 6l \\ 6l & (4+\Phi)l^2 & -6l & (2-\Phi)l^2 \\ -12 & -6l & 12 & -6l \\ 6l & (2-\Phi)l^2 & -6l & (4+\Phi)l^2 \end{bmatrix} \quad (34)$$

A Equação 34 é a matriz de rigidez do elemento de viga obtida na Seção 3, que contempla as hipóteses de Bernoulli e Timoshenko.

### 5 – EXEMPLOS NUMÉRICOS

As matrizes de rigidez dadas pelas Equações 32 e 34 foram implementadas em um programa computacional de elementos finitos para análises lineares estáticas de pórticos planos denominado de *plane\_frame.f90* desenvolvido pelo primeiro autor deste artigo. Nos exemplos numéricos a seguir são consideradas três vigas isostáticas. A primeira viga está submetida à flexão pura, a segunda sujeita a um esforço cortante constante e a terceira a um esforço cortante linear. Para mostrar o travamento por cisalhamento utilizam-se os coeficientes de rigidez  $EI$  e  $GA_0$  sem a correção do fator  $\Phi$  na matriz de rigidez expressa na Equação 32. Por outro lado, para obter soluções isentas de bloqueio por corte utiliza-se a matriz de rigidez dada pela Equação 34. Essas vigas foram discretizadas com 8 e 16 elementos, porém, podem ser utilizadas malhas com qualquer número de elementos. Quando se utiliza a matriz de rigidez dada pela Equação 32, com os coeficientes de rigidez sem a correção do fator de cisalhamento, obtém-se uma resposta mais rígida que a exata. Para malhas grosseiras o erro aumenta. Portanto, para minimizar esse erro é necessário utilizar malhas mais refinadas, como será demonstrado nos exemplos numéricos a seguir. Por outro lado, quando se utiliza a matriz de rigidez

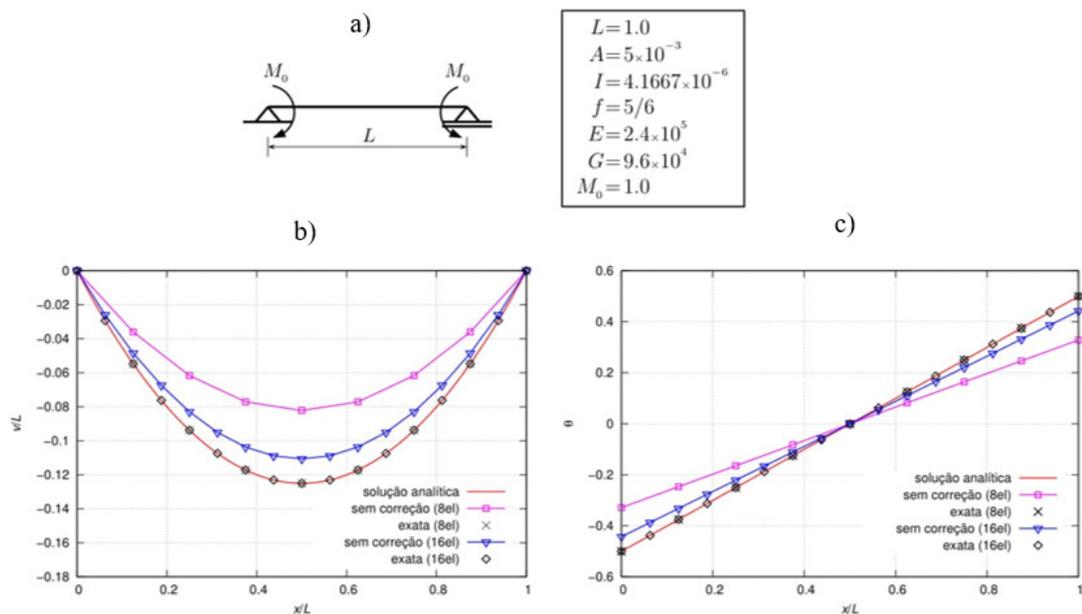
dada pela Equação 34, independentemente da malha utilizada, os resultados numéricos coincidem com os resultados da solução analítica. Os resultados numéricos serão comparados com a solução exata obtida pela equação da linha elástica  $EIy''(x) = M(x)$ . Em Krenk (2000) é encontrada a formulação teórica da equação da linha elástica que leva em consideração o efeito do cisalhamento no cálculo dos deslocamentos de vigas. Por fim, as vigas possuem seção transversal retangular e foram consideradas as seguintes relações:  $L = 10h$ ,  $h = 2b$ ,  $G = 0,4E$ ,  $A_0 = \frac{5}{6}A$  e  $\Phi_L = 0,03$ .

#### 5.1 Exemplo: Viga biapoiaada sob flexão pura

Considera-se neste exemplo uma viga biapoiaada sob flexão pura como mostrado na Figura 5a. Também constam nesta figura as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os valores exatos das máximas rotações e translações dados pela Equação 35.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{M_0}{EI} \left( x - \frac{L}{2} \right) \\ \theta_A(x=0) &= -\theta_B(x=L) = \frac{M_0 L}{2EI} \\ v(x) &= \frac{M_0}{2EI} (Lx - x^2) \\ v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= \frac{M_0 L^2}{8EI} \end{aligned} \quad (35)$$

Figura 5 – Viga biapoiaada sob flexão pura: a) Propriedades mecânicas e geométricas; b) Deslocamentos; c) Rotações



Observe-se que para este caso o esforço cortante é nulo, portanto não há a influência da rigidez ao cisalhamento do deslocamento da viga. Na Figura 5b mostram-se os resultados

numéricos para as translações enquanto que na Figura 5c são mostrados os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos. Observa-se que

Obtenção de um elemento de viga unificado utilizando a formulação corrotacional e o princípio dos trabalhos virtuais complementares

para os casos sem a correção pelo parâmetro  $\Phi$  obteve-se uma resposta mais rígida, tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para avaliar o aumento artificial da rigidez calcula-se, por exemplo, o erro relativo entre a máxima rotação dada pela Equação 35b e a máxima rotação, isto é,  $\frac{|\theta_{num}^{max} - \theta_{exato}^{max}|}{|\theta_{exato}^{max}|} \times 100\%$ , ou calcula-se o

erro relativo entre o máximo deslocamento dado pela Equação 35d e o máximo deslocamento obtido numericamente, isto é,  $\frac{|v_{num}^{max} - v_{exato}^{max}|}{|v_{exato}^{max}|} \times 100\%$ . Como a análise é linear os valores dados

por estes erros relativos serão idênticos. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para a rotação quanto para a translação máximas, enquanto que para a malha de 16 elementos esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Por outro lado, pode-se observar nas Figuras 5b e 5c que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro  $\Phi$  foram coincidentes com os valores exatos tanto para as translações

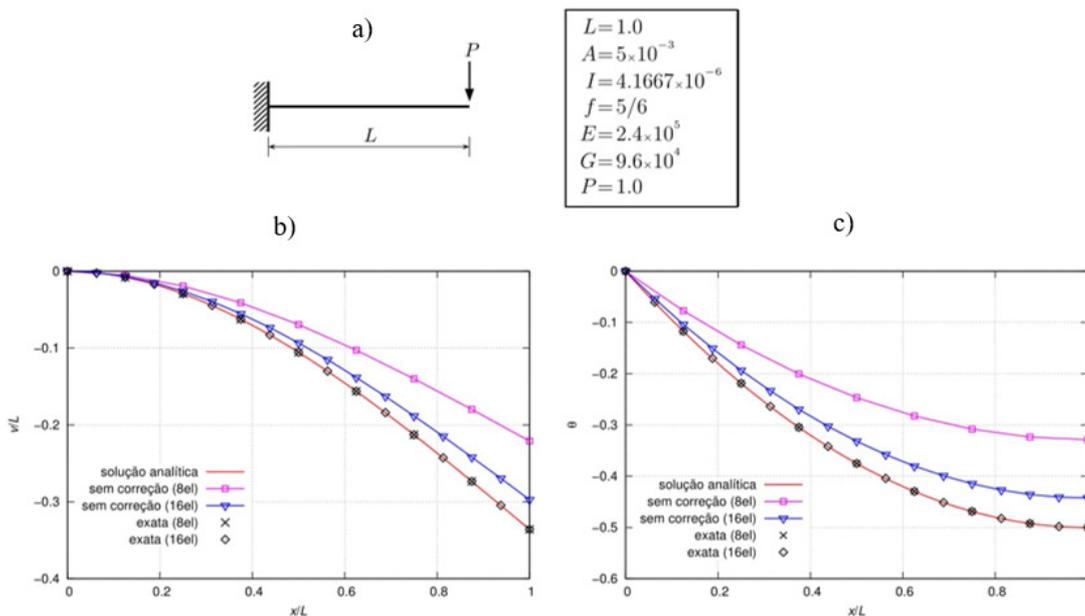
quanto para as rotações, o que mostra que a matriz de rigidez dada na Equação 34 é livre do bloqueio por cisalhamento, não causando, assim, um aumento artificial de rigidez.

5.2 Exemplo: Viga engastada com uma força aplicada na extremidade livre

Considera-se neste exemplo uma viga engastada com uma força aplicada na extremidade livre como mostra a Figura 6a, também constam nesta figura as propriedades geométricas e mecânicas da viga. Os valores exatos das máximas rotações e translações são dados na Equação 36.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{Px}{EI} \left( \frac{x}{2} - L \right) \\ \theta_A(x=0) &= 0, \quad \theta_B(x=L) = -\frac{PL^2}{2EI} \\ v(x) &= \frac{Px^2}{2EI} \left( L - \frac{x}{3} \right) + \frac{Px}{GA_0} \\ v(x=L) &= \frac{PL^3}{3EI} + \frac{PL}{GA_0} \end{aligned} \quad (36)$$

Figura 6 – Viga engastada com uma força aplicada na extremidade livre: a) Propriedades mecânicas e geométricas; b) Deslocamentos; c) Rotações



Observa-se que devido ao esforço cortante constante há a influência da rigidez ao cisalhamento no deslocamento da viga de acordo com a Equação 36c. Na Figura 6b mostram-se os resultados numéricos para as translações enquanto que na Figura 6c mostram-se os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos. Observa-se que, para os casos sem a correção pelo parâmetro  $\Phi$ , obteve-se uma resposta mais rígida, tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos,

respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para a rotação quanto para a translação máximas, enquanto que para a malha de 16 elementos esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Os valores dos erros foram idênticos aos do exemplo da Seção 5.1, pois o parâmetro de cisalhamento  $\Phi$  adotado é o mesmo para ambos exemplos. Por outro lado, pode-se observar nas Figuras 6b e 6c que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro  $\Phi$  foram

coincidentes com os valores exatos tanto para as translações quanto para as rotações, assim como no exemplo da Seção 5.1, conclui-se que a correção feita com o parâmetro  $\Phi$  evita o bloqueio por cisalhamento e consequentemente não provoca um aumento artificial de rigidez.

5.3 Exemplo: Viga biapoiada sujeita a uma força uniformemente distribuída

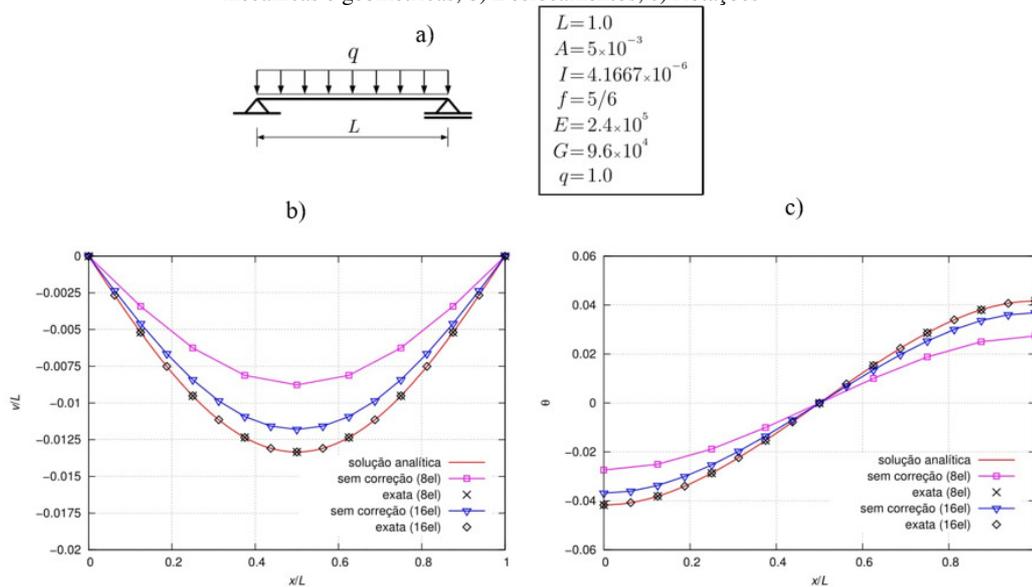
Considera-se neste exemplo uma viga biapoiada sujeita a uma carga uniformemente distribuída como mostra a Figura 7a. As propriedades geométricas bem como as mecânicas estão detalhadas na Figura 7a. Os valores exatos das máximas rotações e translações dadas nas expressões indicadas na Equação 37. Devido à distribuição linear de esforço cortante nota-se que há a influência da rigidez ao cisalhamento no deslocamento da viga de acordo com a Equação 37c.

Na Figura 7b mostram-se os resultados numéricos para as translações enquanto que na Figura 7c mostram-se os resultados numéricos para as rotações, ambos contrastados com os resultados analíticos. Observa-se que, para os casos sem a correção pelo parâmetro  $\Phi$ , obteve-se uma resposta mais rígida, tanto para as translações quanto para as rotações com 8 e 16 elementos, respectivamente. Para a malha de 8 elementos houve um aumento de rigidez de 34,25% tanto para

rotação quanto para a translação máximas, enquanto que para a malha de 16 elementos esse aumento foi de 11,52% para ambas rotação e translação máximas. Os valores dos erros foram idênticos aos exemplos das Seções 5.1 e 5.2, pelo fato já comentado sobre o mesmo valor para o parâmetro de cisalhamento  $\Phi$  para as três vigas apresentadas neste trabalho. Por outro lado, pode-se observar nas Figuras 7b e 7c que os resultados numéricos obtidos com o uso do parâmetro  $\Phi$  foram coincidentes com os valores exatos tanto para as translações quanto para as rotações, assim como nos exemplos das Seções 5.1 e 5.2, conclui-se que a correção feita com o parâmetro  $\Phi$  evita o bloqueio por cisalhamento e consequentemente não provoca um aumento artificial de rigidez.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= \frac{q}{EI} \left( \frac{Lx^2}{4} - \frac{x^3}{6} - \frac{L^3}{24} \right) \\ \theta_A(x=0) = -\theta_B(x=L) &= -\frac{qL^3}{24EI} \\ v(x) &= \frac{qx}{12EI} \left( -Lx^2 + \frac{x^3}{2} + \frac{L^3}{2} \right) + \frac{qx}{2GA_0} (L-x) \\ v\left(x = \frac{L}{2}\right) &= \frac{5qL^4}{384EI} + \frac{qL^2}{8GA_0} \end{aligned} \quad (37)$$

Figura 7 – Deslocamento e rotação da viga biapoiada submetida a uma força uniformemente distribuída: a) Propriedades mecânicas e geométricas; b) Deslocamentos; c) Rotações



CONCLUSÕES

A seguir são apresentadas, de forma sucinta, as conclusões deste estudo.

A definição dos modos deformacionais simétrico e antissimétrico, ou modos de deformação naturais, permite gerar facilmente os respectivos esforços internos

autoequilibrados, isto é, os esforços de flexão pura e de flexão simples.

Qualquer modo de deformação do elemento de viga 2D pode ser obtido pela superposição dos modos de deformação naturais, como foi demonstrado nos exemplos numéricos ao analisar uma viga 2D com diferentes condições de contorno e de carregamento. O uso da formulação corrotacional, do

Princípio dos Trabalhos Virtuais Complementares e dos modos de deformações naturais permitiu a obtenção de uma matriz de rigidez unificada que engloba as teorias de vigas de Euler-Bernoulli e de Timoshenko. Essa matriz de rigidez não apresenta bloqueio por deformação de corte e, conseqüentemente, não produz um aumento artificial de rigidez. É importante frisar a simplicidade algébrica para a obtenção da matriz de rigidez que resulta da aplicação desta metodologia. O uso de interpolações lineares para deslocamentos e rotações e dos modos de deformações naturais permitiu uma descrição algébrica “elegante” para explicar o fenômeno de travamento por corte em elementos de vigas 2D. Também foram descritas, de forma detalhada, algumas técnicas para evitar o bloqueio por cisalhamento, que culminou na correção dos coeficientes de rigidez  $EA$  e  $GA_0$ . A correção permitiu a obtenção das matrizes de rigidez livres de travamento por cisalhamento com utilização da interpolação linear. Por fim, a separação do movimento do elemento de viga em movimento de corpo rígido e em movimento deformacional permite incluir os efeitos da não linearidade geométrica com uso da descrição cinemática corrotacional.

**Engineering**, v. 149, p. 113-132, 1997.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825\(97\)00075-3](http://dx.doi.org/10.1016/S0045-7825(97)00075-3).

ROARK, R. J.; YOUNG, W. C. **Formulas for stress and strain**, McGraw Hill, 1976.

SORIANO, H. L. **Análise de estruturas. Formulação matricial e implementação computacional**. Editora Ciência Moderna, 2005.

#### REFERÊNCIAS

ARGYRIS, J. H.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. St.; DUNNE, P. C.; HAASE, M.; KLEIBER, M.; MALEJANNAKIS, G. A.; MLEJNEK, H.-P.; MÜLLER, M.; SCHARPF, D. W. Finite element method – The natural approach. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 17-18, Part 1, p. 1-106, 1979.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(79\)90083-5](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(79)90083-5).

HUGHES, T. J. R. **The finite element method, linear static and dynamic finite element analysis**, Dover, 1997.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A. On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: Three-dimensional curved beam elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 122, p. 11-26, 1995. [http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825\(95\)00724-F](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7825(95)00724-F).

KRENK, S. A general format for curved and nonhomogeneous beam elements. **Computers and Structures**, v. 50, p. 449-454, 1994.  
[http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949\(94\)90015-9](http://dx.doi.org/10.1016/0045-7949(94)90015-9).

KRENK, S. **Mechanics and analysis of beams, columns and cables**, 2<sup>nd</sup>. Edition, Springer, 2001.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-56694-3>.

KRENK, S. **Non-linear modeling and analysis of solids and structures**, Cambridge University Press, 2009.  
<http://dx.doi.org/10.1017/CBO9780511812163>.

REDDY, J. N. On locking-free shear deformable beam finite elements. **Computer Methods in Applied Mechanics and**