

## FORMULAÇÃO POSICIONAL PARA DESCRIÇÃO DO COMPORTAMENTO MECÂNICO DE FLUÊNCIA EM VIGAS E ESTRUTURAS DE PÓRTICO

### POSITIONAL FORMULATION FOR CREEP MECHANICAL BEHAVIOR OF BEAMS AND FRAMED STRUCTURES

**Juliano dos Santos Becho<sup>1</sup>, Felício Bruzzi Barros<sup>2</sup>, Marcelo Greco<sup>3</sup>**

<sup>1</sup>Aluno de mestrado do Programa de Pós-Graduação em Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais. E-mail: julianoecho@dees.ufmg.br

<sup>2,3</sup>Professor Doutor do Departamento de Engenharia de Estruturas da Universidade Federal de Minas Gerais

<sup>2</sup>E-mail: felicio@dees.ufmg.br

<sup>3</sup>E-mail: mgreco@dees.ufmg.br

#### RESUMO

Este trabalho trata do desenvolvimento de uma formulação numérica não linear para descrever o comportamento mecânico viscoelástico de estruturas de pórticos e vigas submetidas a estado de tensão constante (fenômeno conhecido como fluência) e discretizadas em elementos finitos de pórtico plano. O desenvolvimento é baseado na formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos considerando a teoria clássica de Bernoulli-Euler. Essa formulação possibilita a realização de uma análise estrutural não linear física e geométrica. A não linearidade geométrica considerada refere-se à análise do equilíbrio da estrutura na posição deformada utilizando o método de Newton-Raphson. Já a não linearidade física considerada refere-se à adoção de uma relação reológica baseada no modelo de Maxwell generalizado. Três exemplos numéricos são analisados utilizando-se a formulação desenvolvida. Os dois primeiros descrevem e comparam o comportamento de fluência em uma viga com diferentes condições de contorno. O terceiro exemplo descreve o comportamento de fluência em um pórtico formado por dois pilares e uma viga. Além disso, uma calibração simples da formulação é realizada em relação à sollicitação axial de uma barra de Plástico Reforçado com Fibra de Vidro.

**Palavras-chave:** Viscoelasticidade, Fluência, Formulação Posicional, Método dos Elementos Finitos, Modelo Reológico.

#### ABSTRACT

The present work aims to develop a nonlinear numerical formulation used to describe the viscoelastic mechanical behavior of framed structures and beams under a constant stress state (known as creep phenomenon) and discretized by plane framed elements. The development is based on the nonlinear positional formulation of the Finite Element Method and it takes into consideration the beam kinematics of Bernoulli-Euler. This approach allows to perform a structural analysis with physical and geometrical nonlinearities. The geometrical nonlinearity involved refers to structural equilibrium in the deformed position obtained by the Newton-Raphson method. The physical nonlinearity is associated with the adoption of a viscoelastic behavior through a suitable rheological relation. This rheological relation is derived from the uniaxial rheological model, based on the generalized Maxwell model. Three numerical examples are analyzed by the developed formulation. The first two examples describe and compare the creep behavior of a beam with different boundary conditions. The third example describes the creep behavior of a framed structure, formed by two columns and one beam. Furthermore, a simple calibration of the formulation is performed considering axial loading experimental results of bar made by Glass Fiber Reinforced Polymers material.

**Keywords:** Viscoelasticity, Creep, Positional Formulation, Finite Elements Method, Rheological Model.

#### 1 – INTRODUÇÃO

No projeto de estruturas, um dos problemas fundamentais é encontrar uma solução que apresente bom desempenho estrutural (estrutura previsível e segura) com baixo custo econômico. Assim, muitos trabalhos estão relacionados ao estudo e modelamento do comportamento de materiais alternativos nas mais diversas áreas como infraestrutura, construção civil, indústria mecânica, indústria aeroespacial, entre outras. Como exemplos podem ser citados os trabalhos de Godat *et al.* (2013), Kästner *et al.* (2012), Sá *et al.* (2011) e Muñoz-Rojas *et al.* (2011).

Dentre os materiais alternativos abordados em recentes estudos se destacam os materiais poliméricos e os materiais compostos com matriz polimérica, principalmente por apresentarem boa relação

resistência/rigidez em comparação aos materiais estruturais convencionais. Apresentam, contudo, comportamento mecânico viscoelástico ou viscoelastoplástico dependendo de suas propriedades e dos níveis de tensão aos quais estão submetidos. Esses comportamentos caracterizam-se pela dependência do tempo nas respostas às sollicitações externas e são descritos pela combinação do comportamento viscoso, típico de materiais fluidos, com o comportamento elástico ou plástico, típico dos materiais sólidos.

Os interesses de parte dos recentes trabalhos relacionados aos comportamentos viscoelástico e viscoelastoplástico se concentram no desenvolvimento de formulações numéricas que adotam equações fenomenológicas baseadas em modelos reológicos, para representação da relação entre tensões, deformações e

tempo, e em técnicas de ajuste dos parâmetros desses modelos, como destacado nos trabalhos seguintes.

Em Mesquita; Coda (2003) é desenvolvida uma formulação tridimensional do método dos elementos de contorno para análise do comportamento viscoelástico considerando-se os modelos reológicos de Kelvin-Voigt e de Boltzmann. Em Panagiotopoulos; Mantić; Roubíček (2014) uma formulação semelhante é utilizada para comparar as respostas dos modelos sólidos de Hooke, Kelvin-Voigt e Boltzmann, que representam respectivamente os comportamentos elástico instantâneo, elástico amortecido e viscoelástico, além dos modelos para fluidos de Maxwell, Jeffreys e Burgers.

Semptikovski; Muñoz-Rojas (2013) propõem uma formulação tridimensional do método dos elementos finitos utilizando um elemento de viga simplificado. Nesse trabalho o comportamento viscoelástico linear em elementos constituídos de polietileno de alta densidade é considerado a partir do modelo reológico generalizado de Maxwell, com base em Kaliske; Rothert (1997).

Liu; Polak; Penlidis (2008) propõem uma formulação baseada em equações integrais para descrição do comportamento viscoelástico não linear do polietileno em aplicações estruturais. O comportamento viscoelástico é considerado adotando-se o modelo generalizado de Kelvin-Voigt e os respectivos parâmetros são obtidos por uma metodologia baseada em interpolação linear. Formulação semelhante é adotada em Kühl *et al.* (2013) para descrição do comportamento viscoelastoplástico do polietileno de alta densidade. Em que, para a parte viscoelástica da deformação, é adotado o modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt e, para a parte viscoplástica, é adotada a equação de Zapas-Crissman. Nesse caso os parâmetros viscoelásticos são obtidos por um ajuste de curva baseado no método de otimização por nuvem de partículas, enquanto os parâmetros viscoplásticos são obtidos por uma regressão linear do método dos mínimos quadrados.

Carniel; Muñoz-Rojas; Vaz (2015) apresentam uma formulação do método dos elementos finitos para análise de treliças espaciais com comportamento viscoelástico e viscoplástico incluindo degradação mecânica unidimensional. O modelo reológico generalizado de Kelvin-Voigt é adotado para descrição do comportamento viscoelástico, enquanto o comportamento viscoplástico é considerado a partir da equação de Perzyna e a degradação do material é considerada a partir do modelo de dano de Lemaitre. Os parâmetros do material são obtidos por um ajuste de curva baseado no método de otimização por nuvem de partículas.

Alguns estudos recentes em viscoelasticidade apresentam ainda desenvolvimentos referentes à utilização de derivadas fracionárias na obtenção de modelos reológicos mais simples e com maior precisão na representação do comportamento complexo de materiais reais, como materiais compostos, materiais poliméricos, tecidos biológicos, entre outros (BAHRINI *et al.*, 2013; SHEN *et al.*, 2013; PÉREZ ZERPA *et al.*, 2015).

Neste trabalho o interesse restringe-se ao comportamento mecânico viscoelástico caracterizado pela variação da deformação em materiais sólidos ao longo do

tempo quando submetidos a um estado de tensão constante, conhecido como fenômeno de fluência (MARQUES; CREUS, 2012; CHRISTENSEN, 2010).

Dentro deste contexto, este trabalho se dedica a apresentar o desenvolvimento e a implementação computacional de uma formulação numérica para descrição do comportamento de fluência em vigas e estruturas de pórtico constituídas de material viscoelástico. Essa descrição do comportamento de fluência consiste na obtenção da posição de equilíbrio dessas estruturas após determinado intervalo de tempo, sob determinado estado de carregamento estático, e na representação da evolução dos deslocamentos ao longo do tempo, ambas de forma qualitativa, visto que não será realizada uma calibração quanto ao esforço de flexão. Além disso, será demonstrada, de uma forma simples, a capacidade de ajuste e de representação quantitativa da formulação desenvolvida.

## 2 – DESENVOLVIMENTO DA FORMULAÇÃO

A formulação numérica desenvolvida tem como base a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos (CODA; GRECO, 2004), que foi originalmente desenvolvida para analisar estruturas reticuladas planas com não linearidades físicas e geométricas. No presente trabalho, essa formulação é particularizada para descrição do comportamento mecânico de fluência em elementos finitos de pórtico plano considerando-se a teoria clássica de Bernoulli-Euler e adotando-se uma medida de deformação de engenharia. Para tanto, a contribuição da fluência é introduzida a partir da adoção do modelo reológico de Maxwell generalizado (modelo padrão de sólido) na consideração da relação entre tensões, deformações e tempo.

O desenvolvimento dessa formulação pode ser apresentado em três etapas principais. As quais englobam o equacionamento geral da formulação posicional não linear, a definição da relação reológica e a particularização deste equacionamento ao comportamento mecânico de interesse.

### 2.1 – Equacionamento geral da formulação posicional não linear

De uma forma geral, a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos pode ser demonstrada partindo-se da Equação (1) que representa o funcional da energia potencial total ( $\Pi$ ) de uma estrutura solicitada por cargas externas.

$$\Pi = U - P \quad (1)$$

Em que:  $U$  é a energia de deformação total definida pela integral da energia de deformação específica  $u$  em um volume de referência inicial  $V$ , expressa pela Equação (2). Nessa equação,  $\sigma$  representa o campo das tensões em função do campo das deformações  $\epsilon$ , de acordo com a relação constitutiva ou reológica do material. Já  $P$  é a energia potencial das forças externas expressa pela Equação (3), na qual os graus de liberdade, considerando um elemento de pórtico plano com dois nós e três graus de

liberdade por nó, podem ser representados por  $X_i = (X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2, \theta_2)$  para  $i = (1, 2, 3, 4, 5, 6)$  e os respectivos carregamentos nodais para os dois graus de liberdade representados por  $F_i = (F_{X1}, F_{Y1}, M_{\theta1}, F_{X2}, F_{Y2}, M_{\theta2})$ .

$$U = \int_V u dV = \int_V \int_{\epsilon} \sigma d\epsilon dV \quad (2)$$

$$P = \sum F_i X_i \quad (3)$$

Aplicando-se o princípio da energia potencial total estacionária (BELYTSCHKO *et al.*, 2013) na Equação (1), pode-se obter a posição de equilíbrio da estrutura a partir da Equação (4). Assim, o equilíbrio da estrutura ocorrerá quando a derivada dessa energia potencial total, em relação aos graus de liberdade, for nula, ou seja, quando a taxa de variação da energia potencial total for nula.

$$\frac{d\Pi}{dX_i} = \frac{dU}{dX_i} - \frac{dP}{dX_i} = 0 \quad (4)$$

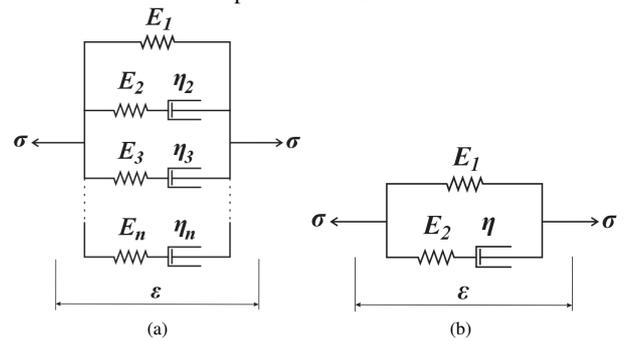
A Equação (4) representa um sistema de seis equações (três graus de liberdade para cada um dos dois nós que definem um elemento de pórtico).

Sabendo-se que, se a relação entre a energia de deformação total,  $U$ , e os parâmetros nodais,  $X_i$ , for não linear, a Equação (4) representa um sistema de equações não linear. Nesse caso, este precisa ser resolvido utilizando um método de resolução de sistemas de equações adequado. Além disso, é necessário adotar na Equação (2) uma relação constitutiva ou reológica que represente o comportamento do material de forma apropriada.

## 2.2 – Definição da relação reológica

Um dos pontos fundamentais em uma análise fisicamente não linear é a adoção de uma relação constitutiva ou reológica que represente de forma apropriada o comportamento do material. Dessa forma, assim como em Chung; Buist (2012), a relação que representa o comportamento de um material viscoelástico é deduzida a partir de um modelo reológico. A escolha do modelo reológico adequado se baseou no comportamento esperado para o fenômeno de fluência em materiais sólidos, sendo adotado então o modelo reológico uniaxial de Maxwell generalizado. Esse modelo, segundo Marques; Creus (2012), pode ser obtido pela associação em paralelo entre um modelo elástico e vários ramos de Maxwell, Figura 1-a. O modelo utilizado foi restrito a um ramo de Maxwell (um elemento elástico em série com um elemento viscoso) em paralelo com um elemento elástico (modelo de Hooke), resultando no modelo apresentado na Figura 1-b. Esse modelo também é conhecido como modelo padrão de sólido ou modelo de Zener.

Figura 1 – (a) Modelo de Maxwell generalizado; (b) Modelo padrão de sólido



A partir da Figura 1-b pode-se definir a tensão total e a deformação total, respectivamente, como nas Equações (5) e (6):

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 \quad (5)$$

$$\epsilon = \epsilon_1 = \epsilon_2 = \epsilon_2^e + \epsilon_2^v \quad (6)$$

Em que:  $\sigma$  e  $\epsilon$  representam, respectivamente, os campos de tensões e deformações normais. Nos quais os subscritos “1” e “2” se referem aos ramos elástico e de Maxwell, respectivamente. Já os sobrescritos “e” e “v” se referem, respectivamente, aos elementos elástico e viscoso.

Os campos de tensões e deformações requeridos nas Equações (5) e (6) podem ser definidos como nas Equações de (7) a (10):

$$\sigma_1 = E_1 \epsilon \quad (7)$$

$$\sigma_2 = \sigma_2^e = \sigma_2^v \quad (8)$$

$$\epsilon_2^e = \frac{\sigma_2^e}{E_2} \quad (9)$$

$$\epsilon_2^v = \frac{\sigma_2^v}{\eta} \quad (10)$$

Em que:  $\dot{\epsilon}$  representa a taxa de variação das deformações no tempo. Já os termos,  $E_1$ ,  $E_2$  e  $\eta$  são os parâmetros dos elementos descritos na Figura 1-b e representam as propriedades do material. O comportamento elástico instantâneo depende dos parâmetros  $E_1$  e  $E_2$ , sendo que a soma desses parâmetros representa o módulo de elasticidade do material. Além disso, o parâmetro  $E_1$  determina a deformação final (soma da deformação elástica instantânea e da deformação elástica amortecida), após um intervalo de tempo suficientemente grande, e representa o módulo de elasticidade do material no comportamento elástico amortecido. Já o parâmetro  $\eta$  representa o módulo de viscosidade do material, o qual determina a taxa de deformação com o tempo e proporciona um comportamento amortecido ao material.

Derivando a Equação (6) em relação ao tempo e utilizando-se as Equações (8) a (10), considerando-se as propriedades do material invariantes com o tempo, tem-se a Equação (11):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{\dot{\sigma}_2}{E_2} + \frac{\sigma_2}{\eta} \quad (11)$$

Reescrevendo-se a Equação (11), utilizando-se as Equações (5) e (7) e isolando-se a tensão total ( $\sigma$ ) tem-se a Equação (12):

$$\sigma = E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)\dot{\varepsilon}}{E_2} - \frac{\eta\dot{\sigma}}{E_2} \quad (12)$$

Em que:  $\dot{\sigma}$  representa a taxa de variação das tensões normais ao longo do tempo.

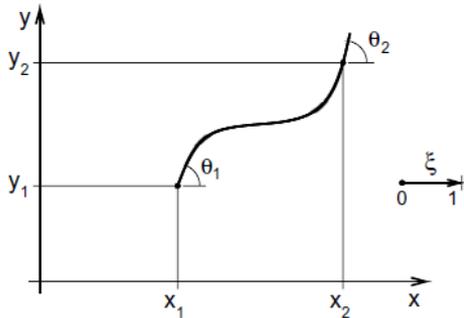
A Equação (12) pode ser simplificada, a fim de representar a relação reológica uniaxial do material viscoelástico para o caso do fenômeno de fluência, negligenciando-se o termo da taxa de variação das tensões com o tempo. Essa equação pode ser utilizada na Equação (2) para obtenção da energia de deformação total. Para tanto, sabendo-se as propriedades do material, é necessário definir uma medida de deformação adequada em relação ao elemento finito implementado.

### 2.3 – Particularização da medida de deformação

Partindo-se da formulação geral descrita na seção 2.1 e da relação reológica obtida na seção 2.2, é possível descrever a formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos, aplicada a descrição do comportamento de fluência em elementos de pórtico, particularizando-se a medida de deformação de forma adequada ao elemento finito implementado.

Para se particularizar a medida de deformação é necessário entender a geometria do elemento a ser estudado e a relação desta com a medida de deformação adotada. Assim, nesta formulação cada elemento finito tem sua geometria mapeada pela parametrização em função da variável adimensional  $\xi$  (variando de 0 a 1) conforme ilustrado na Figura 2.

Figura 2 – Parametrização da geometria (CODA; GRECO, 2004)



Em que:  $X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2$  e  $\theta_2$  são os parâmetros nodais do elemento finito e representam os graus de liberdade de cada nó.

Dessa forma é possível definir a posição de cada ponto do elemento e, conseqüentemente, a geometria em função dos parâmetros nodais utilizando-se as Equações (13), (14), (15) e (16).

$$l_x = (X_2 - X_1) \quad (13)$$

$$l_y = (Y_2 - Y_1) \quad (14)$$

$$x = X_1 + l_x \xi \quad (15)$$

$$y = c \xi^3 + d \xi^2 + e \xi + f \quad (16)$$

Na Equação (16) é necessário definir os parâmetros  $c, d, e$  e  $f$  em função dos parâmetros nodais. Assim, considerando-se as condições de contorno na Equação (16), tem-se a Equações de (17) a (20):

$$y_{(\xi=0)} = f = Y_1 \quad (17)$$

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=0} = e = \left. \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=0} = \text{TAN}(\theta_1) l_x \quad (18)$$

$$\left. \frac{dy}{d\xi} \right|_{\xi=1} = 3c + 2d + e = \left. \frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} \right|_{\xi=1} = \text{TAN}(\theta_2) l_x \quad (19)$$

$$y_{(\xi=1)} = c + d + \text{TAN}(\theta_1) l_x + Y_1 = Y_2 \quad (20)$$

A partir das Equações (19) e (20) tem-se as Equações (21) e (22):

$$c = (\text{TAN} \theta_2 + \text{TAN} \theta_1) l_x - 2l_y \quad (21)$$

$$d = 3l_y - (\text{TAN} \theta_2 + 2 \text{TAN} \theta_1) l_x \quad (22)$$

A medida de deformação de engenharia como definida em Ogden (1997) pode ser representada conforme a Equação (23):

$$\varepsilon = \frac{ds - ds_0}{ds_0} = \frac{\frac{ds}{d\xi} - \frac{ds_0}{d\xi}}{\frac{ds_0}{d\xi}} \quad (23)$$

Em que:  $ds$  representa o comprimento de uma fibra qualquer do corpo (paralela ao eixo central) em uma configuração deformada e  $ds_0$  representa o seu comprimento na configuração não deformada.

Para uma fibra na Linha Centroidal (LC) que passa pelo centro geométrico do elemento, pode-se definir as Equações (24) e (25):

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds_0}{d\xi} \right|_{LC} &= \sqrt{\left( \frac{dx_0}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dy_0}{d\xi} \right)^2} \\ &= \sqrt{(l_{x_0})^2 + (l_{y_0})^2} = l_0 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \left. \frac{ds}{d\xi} \right|_{LC} &= \sqrt{\left( \frac{dx}{d\xi} \right)^2 + \left( \frac{dy}{d\xi} \right)^2} \\ &= \sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} \end{aligned} \quad (25)$$

Assim, a deformação para a linha centroidal pode ser definida pela Equação (26), utilizando-se as Equações (23) a (25), como:

$$\begin{aligned} \varepsilon_{LC} &= \frac{\sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} - l_0}{l_0} \\ &= \frac{1}{l_0} \sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2} - 1 \end{aligned} \quad (26)$$

De acordo com a cinemática de Bernoulli-Euler pode-se descrever a deformação de uma fibra qualquer do elemento finito em função da deformação e da curvatura da fibra que passa pela linha centroidal, como expresso na Equação (27). Para isso, é necessário adotar uma coordenada  $z$ , ortogonal a linha centroidal, que define a distância de uma fibra qualquer em relação a essa linha.

$$\varepsilon = \varepsilon_{LC} + \kappa z \quad (27)$$

Em que:  $\kappa$  representa a curvatura do elemento, definida segundo Zill; Wright; Cullen (2011), em função da variável adimensional  $\xi$ , representada na Equação (28):

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\frac{dx}{d\xi} \frac{d^2y}{d\xi^2} - \frac{d^2x}{d\xi^2} \frac{dy}{d\xi}}{\left( \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\xi}\right)^2} \right)^3} \\ &= \frac{l_x(6c\xi + 2d)}{\left(\sqrt{(l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2}\right)^3} \end{aligned} \quad (28)$$

A partir das Equações (26) a (28), pode-se definir a deformação normal de uma fibra qualquer, em função de  $\xi$ ,  $z$  e dos parâmetros nodais  $X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2$  e  $\theta_2$  que definem os parâmetros  $c, d, e$  e  $f$ .

Na sequência, utilizando-se as Equações (2) e (12), após negligenciar o termo da taxa de variação da tensão com o tempo, a energia de deformação total pode ser expressa como na Equação (29):

$$U = \int_V \int_{\varepsilon} \left( E_1 \varepsilon + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \dot{\varepsilon} \right) d\varepsilon dV \quad (29)$$

Definindo-se a taxa de deformação ( $\dot{\varepsilon}$ ) pela regra da cadeia, utilizando-se a derivada em relação aos graus de liberdade, tem-se a Equação (30):

$$\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt} = \frac{d\varepsilon}{dX_i} \frac{dX_i}{dt} = \varepsilon_{,i} \dot{X}_i \quad (30)$$

Em que:  $\dot{X}_i$  representa a velocidade de variação de posição na direção de cada um dos seis graus de liberdade ( $X_1, Y_1, \theta_1, X_2, Y_2$  e  $\theta_2$ ) e  $\varepsilon_{,i}$  é a derivada da Equação (27) em relação aos graus de liberdade.

Procedendo-se com uma troca de variáveis, pode-se representar a integral do segundo termo da Equação (29) em relação aos graus de liberdade. Para tanto, é utilizada a

Equação (27) na relação entre  $d\varepsilon$  e  $dX_i$ , conforme Equação (31)

$$d\varepsilon = \varepsilon_{,i} dX_i = (\varepsilon_{LC,i} + \kappa_{,i} z) dX_i \quad (31)$$

Substituindo-se as Equações (27), (30) e (31) na Equação (29) e avaliando-se a integral do primeiro termo em relação à deformação ( $\varepsilon$ ), a energia de deformação total pode ser representada pela Equação (32):

$$\begin{aligned} U &= \int_V \left[ \frac{E_1}{2} (\varepsilon_{LC}^2 + 2\varepsilon_{LC}\kappa z + \kappa^2 z^2) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (\varepsilon_{LC,i}^2 + 2\varepsilon_{LC,i} \kappa_{,i} z + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_{,i}^2 z^2) \dot{X}_i dX_i \right] dV \end{aligned} \quad (32)$$

Utilizando-se a variável adimensional  $\xi$ , a integral em relação ao volume da Equação (32) pode ser avaliada em relação à área da seção transversal e ao comprimento parametrizado, como representado na Equação (33).

$$\begin{aligned} U &= l_0 \int_0^1 \int_A \left[ \frac{E_1}{2} (\varepsilon_{LC}^2 + 2\varepsilon_{LC}\kappa z + \kappa^2 z^2) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (\varepsilon_{LC,i}^2 + 2\varepsilon_{LC,i} \kappa_{,i} z + \right. \\ &\quad \left. + \kappa_{,i}^2 z^2) \dot{X}_i dX_i \right] dA d\xi \end{aligned} \quad (33)$$

Considerando-se a hipótese dos elementos serem constituídos de materiais homogêneos e isotrópicos, a Equação (33) pode ser avaliada em relação à área e, rearranjando seus termos, a energia de deformação total fica expressa como na Equação (34):

$$\begin{aligned} U &= \int_0^1 l_0 \left[ \left( \frac{E_1 A}{2} \varepsilon_{LC}^2 + \frac{E_1 I}{2} \kappa^2 \right) + \right. \\ &\quad \left. + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (A \varepsilon_{LC,i}^2 + I \kappa_{,i}^2) \dot{X}_i dX_i \right] d\xi \end{aligned} \quad (34)$$

A Equação (34) define a energia de deformação total, em função das propriedades físicas do material, das propriedades geométricas do elemento, dos parâmetros nodais e da variável adimensional  $\xi$ , de forma completa exceto pela velocidade de variação de posição na direção de cada grau de liberdade  $\dot{X}_i$ , a qual será definida na seção 2.4 em função de  $\xi$  e dos parâmetros nodais.

Utilizando-se as Equações (3) e (34) na Equação (4), a qual representa a aplicação do princípio da energia potencial total estacionária, é possível obter a resolução do sistema que fornece a posição de equilíbrio de uma estrutura plana, discretizada em elementos de pórtico e submetida a um estado de carregamento estático específico, considerando a contribuição do comportamento viscoelástico de fluência do material.

2.4 – Representação da velocidade de variação de posição na direção dos graus de liberdade

Inicialmente são definidas as variações das posições de um ponto qualquer do elemento utilizando-se as Equações (15) e (16), para o caso das posições em  $x$  e  $y$ , avaliadas nos equilíbrios inicial (estrutura indeformada) e atual (estrutura deformada). Já para o caso do giro  $\theta$  em uma seção transversal qualquer, definida por  $\xi$ , considerando-se a geometria parametrizada do elemento, Figura 2, tem-se as Equações (35) e (36):

$$\frac{dy}{dx} \frac{dx}{d\xi} = 3c\xi^2 + 2d\xi + e = \text{TAN}(\theta) l_x \quad (35)$$

$$\theta = \text{ARCTAN} \left( \frac{3c\xi^2 + 2d\xi + e}{l_x} \right) \quad (36)$$

Em que:  $c$ ,  $d$  e  $e$  podem ser definidos pelas Equações (18), (21) e (22).

Dessa forma, utilizando-se as Equações (15), (16) e (36) é possível obter a variação de posição nas direções  $x$ ,  $y$  e  $\theta$  de um ponto qualquer do elemento. Finalmente, em um determinado intervalo de tempo e eliminando-se os movimentos de corpo rígido do elemento, a representação da velocidade de variação de posição ( $\dot{X}_1$ ) de um ponto  $\xi$  qualquer do elemento, na direção do grau de liberdade  $X_1$ , pode ser expressa como na Equação (37):

$$\dot{X}_1 = \frac{x(\xi) - x(\xi = 0)}{\Delta t} - \frac{x^0(\xi) - x^0(\xi = 0)}{\Delta t} \quad (37)$$

Em que:  $\Delta t$  representa o intervalo de tempo necessário para o elemento passar da posição inicial (indicado pelo parâmetro com sobrescrito “0”) para a posição atual (indicado pelo parâmetro sem sobrescrito). De forma análoga à Equação (37), é possível definir as velocidades de variação de posição na direção de cada grau de liberdade,  $\dot{X}_i$ , para serem utilizadas na Equação (34).

3 – IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Como descrito na seção 2.1, para obtenção da posição de equilíbrio da estrutura é necessário resolver numericamente o sistema de equações representado pela Equação (4). Assim, algumas estratégias e passos algébricos serão descritos nesta seção com o intuito de possibilitar a implementação computacional da formulação desenvolvida.

Utilizando-se a variável adimensional  $\xi$ , a integral em relação ao volume da Equação (2) pode ser avaliada em relação à área da seção transversal e ao comprimento parametrizado como na Equação (38):

$$U = l_0 \int_0^1 \int_A u \, dA \, d\xi \quad (38)$$

Substituindo-se a integral da energia de deformação específica na área por uma variável auxiliar  $u_t$  tem-se a Equação (39):

$$U = \int_0^1 l_0 u_t \, d\xi \quad (39)$$

Comparando-se as Equações (39) e (34), tem-se a Equação (40):

$$l_0 u_t = l_0 \left[ \left( \frac{E_1 A}{2} \varepsilon_{LC}^2 + \frac{E_1 I}{2} \kappa^2 \right) + \int_{X_i} \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} (A \varepsilon_{LC,i}^2 + I \kappa_i^2) \dot{X}_i \, dX_i \right] \quad (40)$$

A aplicação do princípio da energia potencial total estacionária pode ser reescrita como na Equação (41):

$$\frac{d\Pi}{dX_i} = \int_0^1 l_0 u_{t,i} \, d\xi - F_i = 0 \quad (41)$$

Sendo a energia de deformação total não linear em relação aos parâmetros nodais, a solução do sistema não linear expresso pela Equação (41) pode ser obtida por meio do método de Newton-Raphson (MECLACHLAN; KRISHNAN, 2007) desenvolvendo-se o processo iterativo descrito como na Equação (42):

$$g(X) \cong g(X^0) + \nabla g(X^0) \Delta X \cong 0 \quad (42)$$

Em que:  $X$  é o vetor das posições atuais,  $X^0$  é o vetor das posições iniciais e  $\Delta X$  representa o vetor de correção das posições nodais. Já o termo  $\nabla g(X^0)$  representa a matriz Hessiana e  $g(X^0)$  representa o vetor dos resíduos, que podem ser representados, respectivamente, como nas Equações (43) e (44):

$$g(X^0) = \int_0^1 l_0 u_{t,i} \, d\xi \Big|_{X^0} - F_i \quad (43)$$

$$\nabla g(X^0) = \int_0^1 l_0 u_{t,ik} \, d\xi \Big|_{X^0} \quad (44)$$

Para tanto, é necessária a determinação algébrica dos termos  $l_0 u_{t,i}$  e  $l_0 u_{t,ik}$ , para posterior avaliação das integrais presentes nas Equações (43) e (44). Assim, definindo-se as variáveis auxiliares  $B$  e  $G$  como nas Equações (45) e (46):

$$B = (l_x)^2 + (3c\xi^2 + 2d\xi + e)^2 \quad (45)$$

$$G = (l_x)^2 (6c\xi + 2d)^2 \quad (46)$$

Utilizando-se as Equações (45) e (46), as Equações (26) e (28), que definem a deformação da linha centroidal e a curvatura, respectivamente, podem ser reescritas como nas Equações (47) e (48):

$$\varepsilon_{LC} = \frac{1}{l_0} \sqrt{B} - 1 \quad (47)$$

$$\kappa = \frac{\sqrt{G}}{B^{3/2}} \quad (48)$$

Substituindo-se as Equações (47) e (48) na Equação (40) e derivando-se em relação aos graus de liberdade tem-se a Equação (49):

$$l_0 u_{t,i} = \frac{E_1 A}{2l_0} \left(1 - \frac{l_0}{\sqrt{B}}\right) B_{,i} + \frac{E_1 I l_0}{2} \left(\frac{G_{,i} B - 3GB_{,i}}{B^4}\right) + \frac{\eta(E_1 + E_2)}{E_2} \left[ l_0 \left(\left(\frac{B_{,i}}{2l_0\sqrt{B}}\right)^2 A + \left(\frac{G_{,i}}{2B^{3/2}\sqrt{G}} - \frac{3\sqrt{G}B_{,i}}{2B^{5/2}}\right) I \right) \dot{X}_i \right] \quad (49)$$

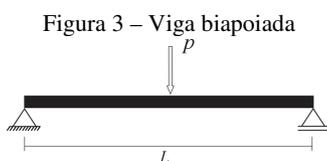
Derivando-se a Equação (49) novamente em relação aos graus de liberdade é possível obter a expressão para  $l_0 u_{t,ik}$ . Definidas as expressões para  $l_0 u_{t,i}$  e  $l_0 u_{t,ik}$ , em função dos parâmetros nodais e da variável adimensional  $\zeta$ , é possível avaliar as integrais de 0 a 1 em  $\zeta$  de forma numérica utilizando-se os pontos de Gauss e seus respectivos pesos ao longo do comprimento do elemento. Dessa forma, as Equações (43) e (44) podem ser resolvidas e o método de Newton-Raphson pode ser implementado computacionalmente para obtenção da posição de equilíbrio da estrutura.

#### 4 – EXEMPLOS NUMÉRICOS E ANÁLISE DE RESULTADOS

Nesta seção serão analisados três exemplos numéricos utilizando-se a formulação desenvolvida e implementada computacionalmente. Os dois primeiros descrevem e comparam o comportamento de fluência em uma viga com diferentes condições de contorno. O terceiro exemplo descreve o comportamento de fluência em um pórtico formado por dois pilares e uma viga e ilustra a influência desse comportamento mecânico na definição da posição de equilíbrio ao longo do tempo.

##### 4.1 – Viga biapoiada com carregamento concentrado

O primeiro exemplo numérico trata de uma viga biapoiada com carga concentrada aplicada no centro do vão, como ilustrado na Figura 3. O primeiro objetivo deste exemplo foi comparar o resultado numérico e o resultado analítico, ambos para o comportamento elástico, a fim de validar o código desenvolvido para o caso particular de comportamento elástico. O segundo objetivo foi comparar o resultado numérico do comportamento viscoelástico com o resultado numérico do comportamento elástico. Esses resultados foram baseados na medida da flecha (deslocamento vertical) no centro do vão ao longo do tempo.



A viga ilustrada na Figura 3 apresenta um vão livre ( $L$ ) igual 4 m e foi discretizada em dez elementos finitos de 0,4 m de comprimento cada. A área da seção transversal de cada elemento é de  $2,4 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$  e a inércia da seção é de  $2,0 \cdot 10^{-6} \text{ m}^4$ . Os módulos de elasticidade e o módulo de viscosidade são, respectivamente,  $E_1 = 63 \text{ GPa}$ ,  $E_2 = 7 \text{ GPa}$  e  $\eta = 0,5 \text{ GPa}\cdot\text{anos}$ .

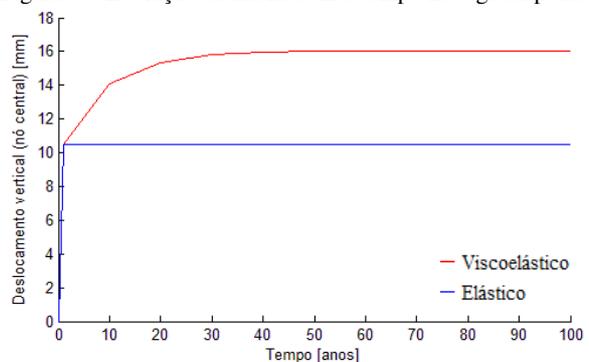
A carga ( $p$ ) foi aplicada em um único passo no centro do vão e tem intensidade de 1100 N. A análise foi realizada considerando-se dez passos de tempo de  $\Delta t = 10$  anos, totalizando uma análise de 100 anos.

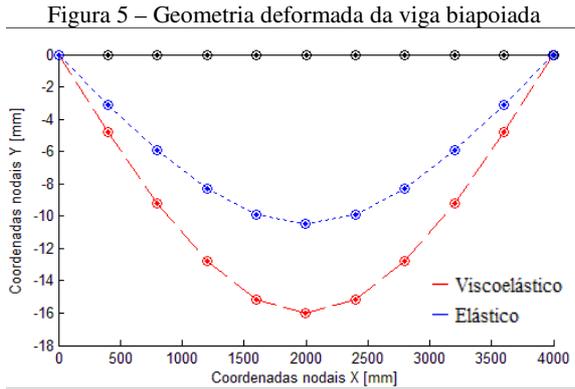
Os resultados numéricos para os comportamentos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 4. Já o resultado analítico para o caso elástico (LEET; UANG; GILBERT, 2011) foi obtido por meio da Equação (50) e forneceu valor de flecha igual a  $10,476 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . A geometria indeformada e as geometrias deformadas para os comportamentos elástico e viscoelástico estão ilustradas na Figura 5.

$$\text{Flecha analítica máxima} = \frac{pL^3}{48(E_1 + E_2)I} \quad (50)$$

Pelos resultados, numérico e analítico, para o comportamento elástico é possível observar que o código é válido e forneceu resultado preciso. A partir da Figura 4 é possível observar que o código consegue descrever o comportamento de fluência (aumento da deformação ao longo do tempo sob tensão constante) e que este comportamento pode acarretar em deformações adicionais relevantes dependendo das propriedades do material e das cargas aplicadas. Neste exemplo teórico estudado, a viga apresentou flecha viscoelástica numérica máxima de  $16,025 \cdot 10^{-3} \text{ m}$  em um período de aproximadamente 70 anos, aproximadamente 53% superior à flecha elástica numérica máxima, que foi de  $10,476 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ . Observa-se que este problema praticamente não apresentou efeitos não lineares geométricos devido aos pequenos deslocamentos verticais que ocorreram. Os resultados apresentados fornecem uma tendência apenas qualitativa do comportamento de fluência visto que a formulação ainda não foi calibrada por meio de resultados experimentais para o material adotado no exemplo.

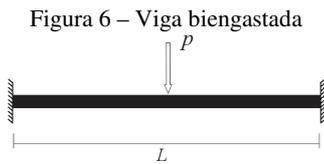
Figura 4 – Evolução da flecha com o tempo na viga biapoiada





#### 4.2 – Viga biengastada com carregamento concentrado

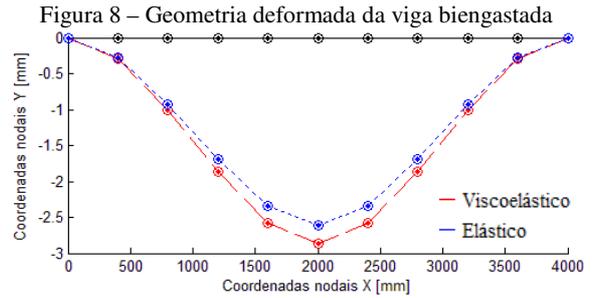
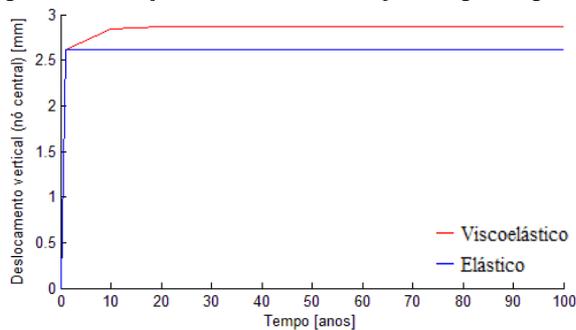
O segundo exemplo numérico trata de uma viga biengastada, ilustrada na Figura 6, com carga concentrada aplicada no centro do vão e com os mesmos dados de carregamento, material, geometria e discretização do exemplo anterior, bem como a estratégia de análise adotada. O objetivo desse exemplo é comparar a contribuição da fluência no valor da flecha no centro do vão com a alteração nos tipos de apoios em relação ao exemplo anterior.



Os resultados numéricos para os comportamentos elástico e viscoelástico estão expostos na Figura 7. Já o resultado analítico para o caso elástico (LEET; UANG; GILBERT, 2011) foi obtido por meio da Equação (51) e forneceu valor de flecha igual a  $2,618 \cdot 10^{-3}$  m. A geometria indeformada e as geometrias deformadas para os comportamentos elástico e viscoelástico estão ilustradas na Figura 8.

$$\text{Flecha analítica máxima} = \frac{pL^3}{192(E_1 + E_2)I} \quad (51)$$

Figura 7 – Evolução da flecha com o tempo na viga biengastada



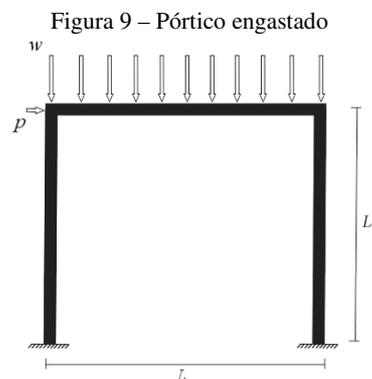
A partir dos resultados apresentados é possível observar que para a viga biengastada a contribuição da fluência foi menos pronunciada em relação à viga biapoiada. Isso se deve principalmente à diferença na distribuição das tensões normais ao longo das vigas nos dois exemplos, consequência da distribuição dos esforços internos de flexão, e ao fato do comportamento viscoelástico estar relacionado ao nível de tensão que um determinado material está submetido.

Neste exemplo a viga apresentou flecha viscoelástica numérica máxima de  $2,868 \cdot 10^{-3}$  m em um período de aproximadamente 40 anos, aproximadamente 10% superior à flecha elástica numérica máxima, que foi de  $2,618 \cdot 10^{-3}$  m.

#### 4.3 – Pórtico engastado

O último exemplo numérico trata da análise de um pórtico formado por uma viga e dois pilares. As ligações entre esses membros são consideradas rígidas e as bases dos pilares são engastadas. O pórtico está submetido a um carregamento uniformemente distribuído ao longo de toda a viga, além, de um carregamento concentrado no nó que une o pilar lateral esquerdo e a viga. A geometria do pórtico, a distribuição das cargas e as condições de contorno nos apoios estão ilustradas na Figura 9.

Tanto os pilares quanto a viga, expostos na Figura 9, apresentam comprimento ( $L$ ) igual 4 m e foram discretizados em dez elementos finitos de 0,4 m de comprimento cada, totalizando trinta elementos na estrutura. A área da seção transversal de cada elemento é de  $2,4 \cdot 10^{-3}$  m<sup>2</sup> e a inércia da seção é de  $2,0 \cdot 10^{-6}$  m<sup>4</sup>. Os módulos de elasticidade e o módulo de viscosidade são, respectivamente,  $E_1 = 189$  GPa,  $E_2 = 21$  GPa e  $\eta = 0,02$  GPa·anos.



As cargas foram aplicadas em um único passo, com carga distribuída ( $w$ ) de intensidade 42.000 N/m e carga concentrada ( $p$ ) de intensidade 5.000 N. A análise foi realizada considerando-se dez passos de tempo de  $\Delta t = 10$  anos, totalizando uma análise de 100 anos.

Os resultados apresentados nas Figuras 10 e 11 se referem aos deslocamentos do nó central da viga nas direções horizontal e vertical, respectivamente. Já na Figura 12 são apresentadas a geometria indeformada e as geometrias deformadas considerando-se os comportamentos elástico e viscoelástico. É possível observar que o comportamento viscoelástico pode alterar significativamente a posição de equilíbrio do pórtico ao longo do tempo para um mesmo estado de carregamento.

Neste exemplo o nó central da viga apresentou deslocamento horizontal máximo de 0,196 m para o comportamento viscoelástico em um período de aproximadamente 70 anos, valor aproximadamente 2,5 vezes superior em relação ao deslocamento horizontal máximo para o comportamento elástico, que foi de 0,079 m. Quanto à deformação vertical máxima, o mesmo nó, para o mesmo período de tempo, apresentou valor de 0,166 m para o comportamento viscoelástico, 6% superior ao deslocamento vertical máximo para o comportamento elástico, que foi de 0,156 m.

Figura 10 – Deslocamento horizontal ao longo do tempo

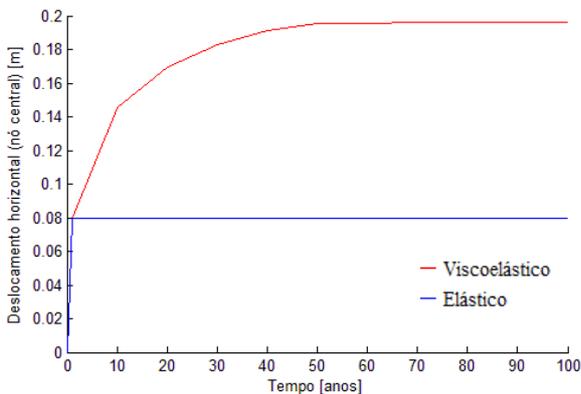


Figura 11 – Deslocamento vertical ao longo do tempo

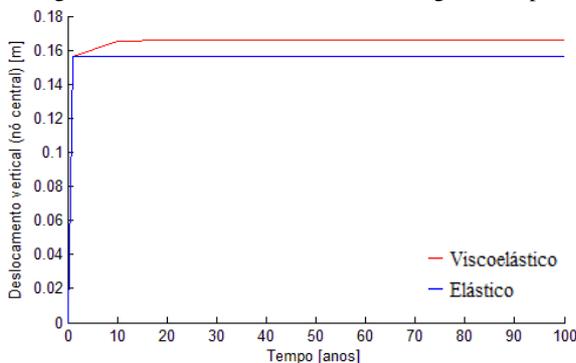
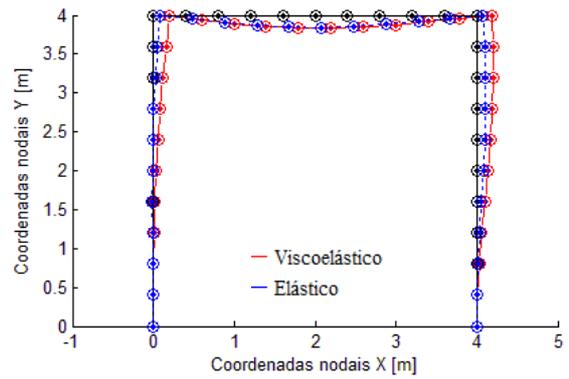


Figura 12 – Geometria deformada do pórtico

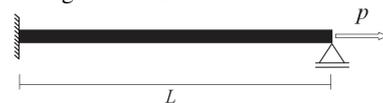


## 5 – CALIBRAÇÃO QUANTO AO ESFORÇO AXIAL

Com o intuito de demonstrar a capacidade de ajuste e representação quantitativa do comportamento de fluência utilizando-se a formulação desenvolvida, uma calibração simples, considerando apenas esforços axiais, foi realizada com base em resultados experimentais obtidos na literatura (YOUSSEF, 2010). Esses resultados foram obtidos de ensaios de fluência em barras pultrudadas de Plástico Reforçado com Fibra de Vidro (PRFV), constituídas de fibras de vidro-E de alta resistência (77,3% por volume) e resina vinil éster. As barras possuem um metro de comprimento, área da seção transversal circular de  $70,88 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2$  e módulo de elasticidade igual a 46,9 GPa. Os ensaios se basearam na obtenção das deformações por fluência das barras, ao longo de 10.000 horas, sob estado de tensão uniaxial constante em quatro níveis diferentes de tensão (15%, 30%, 45% e 60% em relação à tensão última do material, que é de 854 MPa).

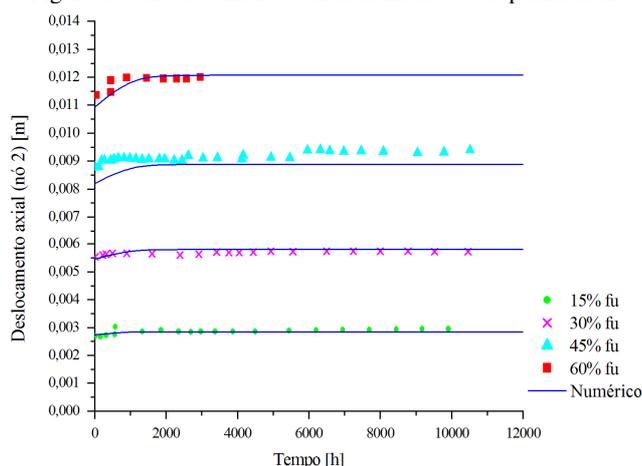
No modelo numérico a barra foi discretizada por um elemento de pórtico engastado em uma das extremidades e apoiado na outra extremidade, como ilustrado na Figura 13.

Figura 13 – Barra tracionada



As cargas foram aplicadas na extremidade apoiada e referem-se às cargas de tração que fornecem os quatro níveis de tensão ensaiados. Os resultados experimentais, nos quatro níveis de tensão, estão representados por pontos discretos na Figura 14.

Figura 14 – Deslocamentos axiais numéricos e experimentais



A calibração da formulação desenvolvida consistiu na obtenção de uma relação entre o módulo de viscosidade e o nível de tensão que o material está submetido. Assim, a partir do ajuste do módulo de viscosidade para cada nível de tensão foi realizada uma regressão quadrática, utilizando o método dos mínimos quadrados, obtendo-se a Equação (52):

$$\eta = 4,4125 \cdot 10^{11} + 1,3329 \cdot 10^3 \sigma - 6,8557 \cdot 10^{-7} \sigma^2 \quad (52)$$

Os resultados numéricos obtidos pela formulação calibrada, substituindo-se a Equação (52) na Equação (40), estão representados na Figura 14 pelas linhas contínuas nos quatro níveis de tensão e demonstram a capacidade de ajuste da formulação.

## CONCLUSÕES

Neste trabalho foi apresentada uma formulação desenvolvida para descrever o comportamento mecânico viscoelástico em vigas e estruturas de pórtico, mais especificamente o fenômeno de fluência, baseado na formulação posicional não linear do Método dos Elementos Finitos e no modelo reológico generalizado de Maxwell. A formulação foi implementada computacionalmente e apresentou capacidade de representação da evolução dos deslocamentos das estruturas com o tempo, sob carregamento estático, de forma qualitativa, apresentando perfis de deslocamento e posições de equilíbrio como esperados pela teoria da viscoelasticidade e como verificado nos trabalhos citados.

Por meio da calibração simples apresentada, foi possível demonstrar a capacidade de ajuste dos parâmetros do modelo e de representação quantitativa do comportamento de fluência utilizando a formulação desenvolvida. Entretanto, para uma descrição quantitativa do comportamento de fluência de uma forma mais abrangente (adequada ao elemento finito de pórtico utilizado na formulação) se faz necessária uma calibração a partir de resultados experimentais de esforços de flexão em vigas e pórticos com materiais e propriedades específicas.

Analisando os exemplos apresentados verificou-se que o efeito da fluência pode ocorrer de forma mais

pronunciada dependendo das condições de contorno e da geometria da estrutura, devido aos níveis e as distribuições de tensões proporcionadas. Ainda com base nos exemplos analisados, é possível perceber que os efeitos da fluência podem gerar deslocamentos adicionais consideráveis em estruturas submetidas a carregamentos estáticos, conforme destacado por pesquisas citadas ao longo do trabalho. Assim, dependendo da aplicação, das condições de serviço e das tolerâncias de projeto e de segurança adotadas, esse fenômeno de fluência não pode ser negligenciado, podendo gerar falhas em períodos longos sob tensões consideravelmente inferiores a tensão limite do material.

## AGRADECIMENTOS

Os autores agradecem os apoios financeiros concedidos pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior – CAPES e pela Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de Minas Gerais – FAPEMIG.

## REFERÊNCIAS

- BAHRANI, S. M. S.; EGHTEHAD, M.; FARID, M.; GHAVANLOO, E. Large deflection of viscoelastic beams using fractional derivative model. **Journal of Mechanical Science and Technology**, v. 27, n. 4, p. 1063-1070, 2013. <http://dx.doi.org/10.1007/s12206-013-0302-9>.
- BELYTSCHKO, T.; LIU, W. K.; MORAN, B.; ELKHODARY, K. **Nonlinear finite elements for continua and structures**. 2<sup>nd</sup> ed., John Wiley & Sons, Chichester, 2013.
- CARNIEL, T. A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; VAZ, M. A viscoelastic viscoplastic constitutive model including mechanical degradation: Uniaxial transient finite element formulation at finite strains and application to space truss structures. **Applied Mathematical Modelling**, v. 39, n. 5, p. 1725-1739, 2015. <http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2014.09.036>.
- CHRISTENSEN, R. M. **Theory of viscoelasticity**. 2<sup>nd</sup> ed., Dover Publications, New York, 2010.
- CHUNG, C. W.; BUIST, M. L. A novel nonlinear viscoelastic solid model. **Nonlinear Analysis: Real World Applications**, v. 13, n. 3, p. 1480-1488, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.nonrwa.2011.11.011>.
- CODA, H. B.; GRECO, M. A simple FEM formulation for large deflection 2D frame analysis based on position description. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, v. 193, n. 33, p. 3541-3557, 2004. <http://dx.doi.org/10.1016/j.cma.2004.01.005>.
- GODAT, A.; LÉGERON, F.; GAGNÉ, V.; MARMION, B. Use of FRP pultruded members for electricity transmission towers. **Composite Structures**, v. 105, p. 408-421, 2013. <http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2013.05.025>.
- KALISKE, M.; ROTHERT, H. Formulation and implementation of three-dimensional viscoelasticity at small and finite strains. **Computational Mechanics**, v. 19, n. 3, p. 228-239, 1997. <http://dx.doi.org/10.1007/s004660050171>.
- KÄSTNER, M.; OBST, M.; BRUMMUND, J.; THIELSCH, K.; ULBRICHT, V. Inelastic material behavior of polymers—experimental characterization, formulation and implementation of a material model. **Mechanics of Materials**, v. 52, p. 40-57, 2012. <http://dx.doi.org/10.1016/j.mechmat.2012.04.011>.
- KÜHL, A.; MUÑOZ-ROJAS, P. A.; VAZ, M.; CARNIEL, T. A. Modeling nonlinear viscoelastoplastic behavior or high density

- polyethylene (HDPE) using particle swarm optimization (PSO). In: **XXXIV Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering**. Pirenópolis, Brazil, 2013.
- LEET, K.; UANG, C. M.; GILBERT, A. **Fundamentals of structural analysis**. 4. ed. McGraw-Hill, New York, 2011.
- LIU, H.; POLAK, M.; PENLIDIS, A. A practical approach to modeling time-dependent nonlinear creep behavior of polyethylene for Structural applications. **Polymer Engineering and Science**, v. 48, n. 1, p. 159-167, 2008.  
<http://dx.doi.org/10.1002/pen.20942>.
- MARQUES, S. P. C.; CREUS, G. J. **Computational viscoelasticity**. Springer, Heidelberg, 2012.  
<http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25311-9>.
- MECLACHLAN, G.; KRISHNAN, T. **The EM algorithm and extensions**. John Wiley & Sons, Chichester, 2007.
- MESQUITA, A. D.; CODA, H. B. A simple Kelvin and Boltzmann viscoelastic analysis of three-dimensional solids by the boundary element method. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, v. 27, n. 9, p. 885-895, 2003.  
[http://dx.doi.org/10.1016/S0955-7997\(03\)00060-2](http://dx.doi.org/10.1016/S0955-7997(03)00060-2).
- MUÑOZ-ROJAS, P. A.; MENDONÇA, P. T. R.; BENVENUTTI, I. J.; CREUS, G. J. Modeling nonlinear viscoelastic behavior of High Density Polyethylene (HDPE): application of stress-time equivalence versus interpolation of rheological properties. In: **III International Symposium on Solid Mechanics**. Florianópolis, Brazil, 2011.
- OGDEN, R. W. **Non-linear elastic deformation**. Dover Publications, New York, 1997.
- PANAGIOTOPOULOS, C. G.; MANTIČ, V.; ROUBÍČEK, T. A simple and efficient BEM implementation of quasistatic linear visco-elasticity. **International Journal of Solids and Structures**, v. 51, n. 13, p. 2261-2271, 2014.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2014.02.028>.
- PÉREZ ZERPA, J. M.; CANELAS, A.; SENSALÉ, B.; BIA SANTANA, D.; ARMENTANO, R. L. Modeling the arterial wall mechanics using a novel high-order viscoelastic fractional element. **Applied Mathematical Modelling**, 2015.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.apm.2015.04.018>.
- SÁ, M. F.; GOMES, A. M.; CORREIA, J. R.; SILVESTRE, N. Creep behavior of pultruded GFRP elements—Part 1: Literature review and experimental study. **Composite Structures**, v. 93, n. 10, p. 2450-2459, 2011.  
<http://dx.doi.org/10.1016/j.compstruct.2011.04.013>.
- SEMPTIKOVSKI, S. C.; MUÑOZ-ROJAS, P. A. A Geometrically Nonlinear Simplified Beam Element with Linear Viscoelastic Behaviour. In: **IV International Symposium on Solid Mechanics**, Porto Alegre, Brazil, 2013.
- SHEN, J. J.; LI, C. G.; WU, H. T.; KALANTARI, M. Fractional order viscoelasticity in characterization for atrial tissue. **Korea-Australia Rheology Journal**, v. 25, n. 2, p. 87-93, 2013.  
<http://dx.doi.org/10.1007/s13367-013-0009-6>.
- YOUSSEF, T. A. **Time-dependent behavior of fibre reinforced polymer (FRP) bars and FRP reinforced concrete beams under sustained load**. Ph.D. thesis, University of Sherbrooke, Sherbrooke, Canada, 2010.
- ZILL, D.; WRIGHT, W. S.; CULLEN, M. R. **Advanced engineering mathematics**. 4<sup>th</sup> ed., Jones & Bartlett Learning, London, 2011.